МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

# Минимальные 1-расширения ориентаций циклов

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Дондукова Михаила Дмитриевича

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент ___________ М. Б. Абросимов
23.01.2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ___________ М. Б. Абросимов
23.01.2020 г.

Саратов 2020

# ВВЕДЕНИЕ

Разделы математики, связанные с развитием цифровых технологий, стали особо важны в последнее время. При их изучении сейчас используются не только методы, позволяющие рассматривать непрерывные физические модели, но и логические, комбинаторные или алгебраические для дискретных математических моделей. Сильно увеличилась популярность такого раздела дискретной математики как теория графов.

Так как задача проверки рёберных и вершинных $k$-расширений графов является NP-полной, не известно алгоритма построения оптимальной $k$-устойчивой реализации графов за полиномиальное время. В данной работе рассматривается задача генерации всех минимальных 1-расширений ориентаций циклов.

Цель работы – практическая реализация алгоритма поиска минимальных 1-расширений ориентаций циклов на языке программирования Java, применение его для получения каталога минимальных 1-расширений ориентаций циклов с числом вершин до 8, анализ результатов и сбор статистики.

Дипломная работа состоит из введения, 7 разделов, заключения, списка использованных источников и 3 приложений. Общий объём работы – 48 страниц, из них 24 страницы – основное содержание, включая 13 рисунков и 5 таблиц, список использованных источников из 14 наименований.

# КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

## 1 Необходимые определения

Граф $G^*$ называется *вершинным (рёберным) $k$-расширением графа $G$*, если граф $G$ вкладывается в любой граф, полученный из $G^*$ удалением произвольных $k$ вершин (рёбер).

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным $k$-расширением* ($k$ натуральное) $n$-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1. граф $G^*$ является вершинным $k$-расширением $G$, то есть граф $G$ вкладывается в каждый подграф графа $G^*$, получающийся удалением любых его $k$ вершин;
2. граф $G^*$ содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3. $\alpha^*$ имеет минимальную мощность при выполнении условий 1, 2.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным $k$-расширением* ($k$ натуральное) $n$-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1. граф $G^*$ является рёберным $k$-расширением $G$, то есть граф $G$ вкладывается в каждый подграф графа $G^*$, получающийся удалением любых его $k$ рёбер;
2. граф $G^*$ содержит $n$ вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3. $\alpha^*$ имеет минимальную мощность при выполнении условий 1, 2 [6].

Далее будем использовать сокращения: МР-1Р – минимальное рёберное 1-расширение, МВ-1Р – минимальное вершинное 1-расширение.

## 2 Примеры ориентаций графов

### 2.1 Ориентации полного графа с тремя вершинами

Ребро графа можно ориентировать несколькими способами: либо ребро заменяется дугой (два варианта) либо парой дуг. Рассмотрение различных ориентаций графа удобно начать с полного графа с тремя вершинами. Изображение графа показано на рисунке 1 и построено с помощью программы yEd Graph Editor [8].

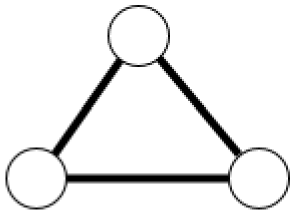

Рисунок 1 – Полный граф с тремя вершинами

На рисунке 2 показаны два различных варианта ориентации данного графа. Но они являются изоморфными.

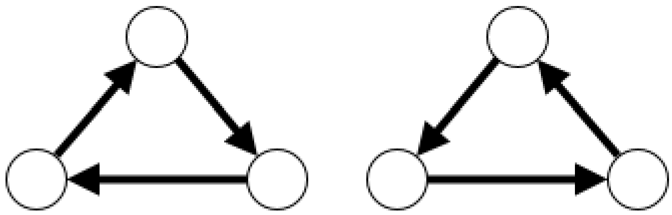

Рисунок 2 – Изоморфные ориентации графа

На рисунке 3 показаны все неизоморфные ориентации, если рассматривать только диграфы. Поскольку эти графы полные и направленные, они – турниры.

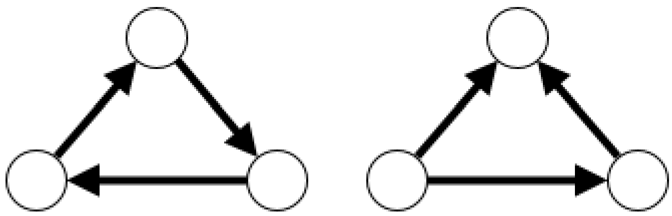

Рисунок 3 – Неизоморфные ориентации графа, если между вершинами одно ребро

## 2.2 Ориентации полного графа с четырьмя вершинами

Можно рассмотреть полный граф с четырьмя вершинами. Он показан на рисунке 5.

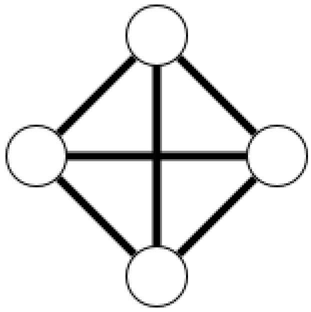

Рисунок 5 – Полный граф с четырьмя вершинами

У полного графа с четырьмя вершинами легко можно изобразить все его неизоморфные ориентации, если рассматривать только диграфы. Такие ориентации показаны на рисунке 6.

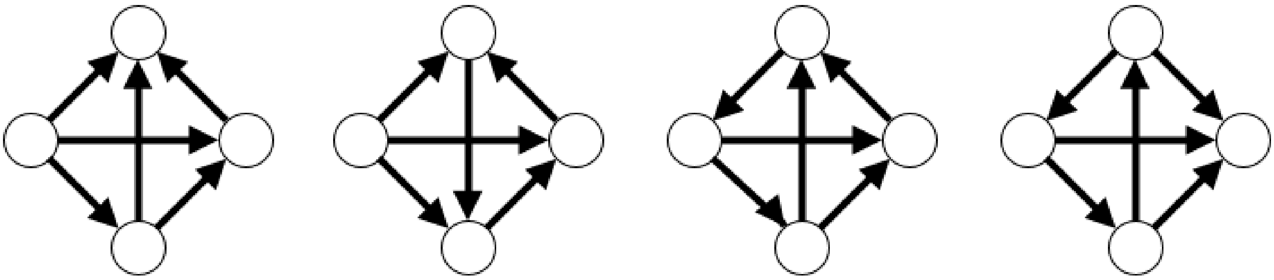

Рисунок 6 – Неизоморфные ориентации графа, если между вершинами только одно ребро

## 3 Минимальные вершинные и рёберные 1-расширения циклов

Теорема Хейза «О минимальных вершинных 1-расширениях цикла» говорит, что минимальное вершинное 1-расширение цикла $C_n$ имеет вектор степеней $(3, \ldots, 3)$ при $n = 2k + 1$ и $(4, 3, \ldots, 3)$ при $n = 2k$ и может быть построено по следующим схемам [1, 9]:

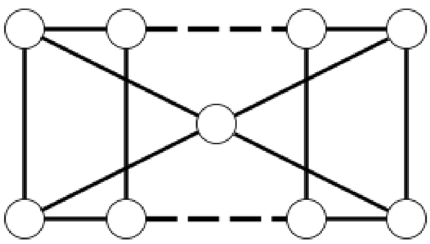

Рисунок 7 – Минимальное вершинное 1-расширение цикла $C_n$ при $n = 2k$

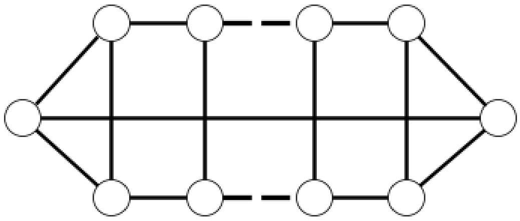

Рисунок 8 – Минимальное вершинное 1-расширение цикла $C_n$ при $n = 2k + 1$

Так же существует теорема, которая говорит, что графы, построенные по схемам из теоремы Хейза «О минимальных вершинных 1-расширениях цикла», являются минимальными рёберными 1-расширениями циклов (но количество вершин не меняется) [2, 9].

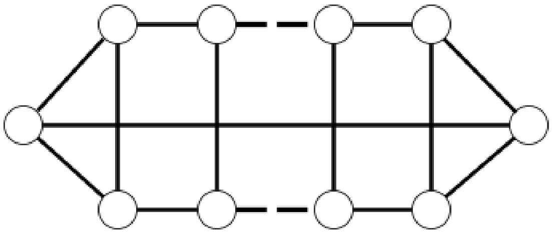

Рисунок 9 – Минимальное рёберное 1-расширение цикла $C_n$ при $n = 2k$

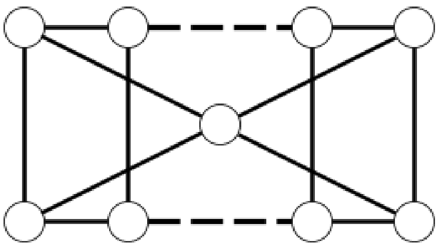

Рисунок 10 – Минимальное рёберное 1-расширение цикла $C_n$ при $n = 2k + 1$

## 4 Алгоритм генерации минимальных 1-расширений ориентаций циклов

Поиск МВ-1Р и МР-1Р для графов осуществляется независимо и последовательно. Алгоритм поиска работает с матрицей смежности исходного графа. В данной работе в качестве исходных графов рассматриваются только неизоморфные ориентированные циклы, у которых между любой парой вершин не более одной дуги; в качестве минимальных 1-расширений рассматриваются графы, которые могут содержать встречные дуги между парой вершин.

## 5 Программная реализация генерации и подсчёта минимальных 1-расширений ориентаций циклов

В ходе работы была разработана и реализована программа «CycleMin1Extension» для получения всех неизоморфным минимальных вершинных и рёберных 1-расширений ориентаций циклов. Программа написана на языке программирования Java в среде разработки IntelliJ IDEA Community Edition 2019.3.1. Полный исходный код программы на языке Java представлен в приложении А.

Алгоритм действий программы является точной реализацией алгоритма, описанного в пункте 4 данной работы. Программа считывает по очереди ориентированные циклы из входного файла. Для каждого запускается поиск всех МВ-1Р, потом всех МР-1Р. Полученные результаты сохраняются в файл, и программа переходит к следующему ориентированному циклу.

## 6 Расширения с заданным числом дополнительных дуг

Ниже представлена таблицы 2 и 3 с информацией о суммарном количестве расширений с заданным минимальным числом дополнительных дуг для ориентаций циклов с количеством вершин до 8 включительно.

Таблица 2 – Информация о количестве МВ-1Р

| | 3 вер. | 4 вер. | 5 вер. | 6 вер. | 7 вер. | 8 вер. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 доп. дуги | 1 | - | - | - | - | - |
| 4 доп. дуги | - | 1 | 4 | - | - | - |
| 5 доп. дуг | 1 | 17 | - | 1 | 6 | - |
| 6 доп. дуг | - | 1 | - | 37 | 7 | 2 |
| 7 доп. дуг | - | - | 3 | 114 | 103 | 261 |
| 8 доп. дуг | - | - | - | 2 | - | 481 |
| 9 доп. дуг | - | - | - | - | 6 | - |
| 10 доп. дуг | - | - | - | - | - | 7 |

Таблица 3 – Информация о количестве МР-1Р

| | 3 вер. | 4 вер. | 5 вер. | 6 вер. | 7 вер. | 8 вер. |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 доп. дуги | - | 2 | - | - | - | - |
| 3 доп. дуги | 2 | - | 3 | 4 | - | - |
| 4 доп. дуги | - | 5 | 36 | 30 | 10 | 25 |
| 5 доп. дуг | - | - | 3 | 16 | 274 | 25 |
| 6 доп. дуг | - | - | - | 9 | - | 73 |
| 7 доп. дуг | - | - | - | - | 24 | - |
| 8 доп. дуг | - | - | - | - | - | 126 |

В таблицах 4 и 5 содержится информация о суммарном количестве ориентаций циклов с количеством вершин до 8 включительно, минимальные 1-расширения которых содержат заданное числом дополнительных дуг.

Таблица 4 – Информация о количестве ориентаций с заданным числом дополнительных дуг у МВ-1Р

| | 3 вер. | 4 вер. | 5 вер. | 6 вер. | 7 вер. | 8 вер. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 доп. дуги | 1 | - | - | - | - | - |
| 4 доп. дуги | - | 1 | 3 | - | - | - |
| 5 доп. дуг | - | 2 | - | 1 | 1 | - |
| 6 доп. дуг | 1 | 1 | - | 5 | 4 | 1 |
| 7 доп. дуг | - | - | 1 | 2 | 4 | 11 |
| 8 доп. дуг | - | - | - | 1 | - | 9 |
| 9 доп. дуг | - | - | - | - | 1 | - |
| 10 доп. дуг | - | - | - | - | - | 1 |

Таблица 5 – Информация о количестве ориентаций с заданным числом дополнительных дуг у МР-1Р

| | 3 вер. | 4 вер. | 5 вер. | 6 вер. | 7 вер. | 8 вер. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 доп. дуги | - | 1 | - | - | - | - |
| 3 доп. дуги | 2 | - | 1 | 3 | - | - |
| 4 доп. дуги | - | 3 | 2 | 4 | 2 | 15 |
| 5 доп. дуг | - | - | 1 | 1 | 7 | 3 |
| 6 доп. дуг | - | - | - | 1 | - | 3 |
| 7 доп. дуг | - | - | - | - | 1 | - |
| 8 доп. дуг | - | - | - | - | - | 1 |

Начиная с ориентаций циклов с 5 вершинами, наибольшее количество дополнительных дуг необходимо при построении минимального вершинного или рёберного 1-расширения гамильтоновой ориентации цикла и эта же ориентация является единственной, чьи минимальные 1-расширения имеют такое число дополнительных дуг.

## 7 Минимальные 1-расширения гамильтоновых ориентаций цикла

В 1976 году Хейз сформулировал теорему: «Минимальное вершинное 1-расширение $n$-вершинного цикла $C_n$ содержит в точности $\left\lfloor\frac{n+4}{2}\right\rfloor$ дополнительных рёбер» [1]. На основе этой теоремы были сформулированы 2 другие теоремы. Первая теорема касается верхней и нижней оценок числа дополнительных дуг $ec(C_n)$ МВ-1Р ориентаций циклов $C_n$: «Число дополнительных дуг МВ-1Р ориентации цикла $C_n$: $\left\lfloor\frac{n+4}{2}\right\rfloor \le ec(C_n) \le n+2$» [13]. Вторая теорема касается количества дополнительных дуг МВ-1Р гамильтоновой ориентации цикла. Опуская схему построения данной ориентация, в теореме говорится, что МВ-1Р гамильтоновой ориентации цикла $C_n$ имеет $n+2$ дополнительные дуги [13]. Результаты, собранные при работе программы «CycleMin1Extension» и описанные в приложении В, подтверждают эту теорему. Например, среди ориентаций цикла с 7 вершинами МВ-1Р только одной ориентации имели 9 дополнительных дуг, и эта ориентация – гамильтонова. На основе полученных данных, полученных при работе программы можно предположить, что количество дополнительных дуг МР-1Р гамильтоновой ориентации цикла $C_n$ может быть точно определено как $n$. Полный каталог гамильтоновых ориентаций и их минимальных 1-расширений для циклов с числом вершин до 8 включительно находится в приложении В.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена задача генерации и вычисления количества неизоморфных минимальных вершинных и рёберных 1-расширений ориентаций циклов. В теоретической части был рассмотрен алгоритм решения данной задачи и некоторые его оптимизации. Практические вычисления показывают, что даже с применением оптимизаций время необходимое на поиск результатов растёт крайне быстро с увеличением числа вершин графа.

В результате проделанной работы была разработана и реализована программа «CycleMin1Extension», написанная на языке программирования Java, для подсчёта количества минимальных вершинных и рёберных 1-расширений ориентаций циклов с числом вершин до 8. Таким образом, поставленные в работе задачи были решены. Программа «CycleMin1Extension» может применяться при необходимости найти все неизоморфные минимальные вершинные и рёберные 1-расширения заданных ориентаций циклов.

За время работы были обработаны все ориентированные циклы с числом вершин до 8 включительно, были найдены количества их минимальных вершинных и рёберных 1-расширений, количества дополнительных дуг для генерации минимальных 1-расширений. Собранные данные приведены в работе.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1 Hayes, J. P. A graph model for fault-tolerant computing system / J. P. Hayes. IEEE Trans. Comput. 1976. – Vol. 25, № 9. – C. 875–884. – Яз. англ.

2 Harary, F. Edge fault tolerance in graphs / F. Harary, J. P. Hayes. Networks. 1993. – Vol. 23. – C. 135–142. – Яз. англ.

3 Harary, F. Node fault tolerance in graphs / F. Harary, J. P. Hayes. Networks. 1996. – Vol. 27. – C. 19–23. – Яз. англ.

4 Абросимов, М. Б. Практические задания по графам : учеб. пособие / М. Б. Абросимов, А. А. Долгов. – 2-е изд. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2009.

5 Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. – Москва: «Физико-математическая литература» РАН, 1997.

6 Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – Пер. на рус. яз. – М.: Мир, 1973.

7 Емеличев, В. А. Лекции по теории графов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич – Москва «Наука», 1990 – 385 с. – URL: http://www.padaread.com/?book=49381 (дата обращения: 10.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. Рус.

8 yEd – Graph Editor [Электронный ресурс] : yworks the diagramming experts. – URL: https://www.yworks.com/products/yed (дата обращения 10.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

9 Абросимов, М. Б. Графовые модели отказоустойчивости / М. Б. Абросимов. – Саратов: издательство Саратовского университета, 2012.

10 nauty and Traces [Электронный ресурс] : graph canonical labeling and automorphism group computation. – URL: http://pallini.di.uniroma1.it (дата обращения 10.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

11 McKay, B. D. Practical Graph Isomorphism / B. D. McKay, A. Piperno. – 2-nd ed. – Journal of Symbolic Computation № 60. 2014. – C. 94–112. – Яз. англ.

12 Brendan McKay [Электронный ресурс] : description of graph6, sparse6 and digraph6 encodings. – URL: http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/formats.txt (дата обращения 10.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

13 Абросимов, М. Б. К вопросу об оценке числа дополнительных дуг минимальных вершинных 1-расширений ориентаций циклов / М. Б. Абросимов, О. В. Моденова – Дискретная математика, теория графов и их приложения: Тезисный доклад. Международная научная конференция Минск, 11–14 ноября 2013 г. — Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2013. – С. 3–4.

14 Граф Online [Электронный ресурс] : инструмент для работы с графами онлайн. – URL: http://graphonline.ru (дата обращения 10.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. Рус.