МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Дискретное преобразование Виленкина-Крестенсона и его приложения к обработке информации

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 248 группы

направление 09.04.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета

Мыльциной Алины Сергеевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ________________ С. С. Волосивец

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., доцент ________________ С. П. Сидоров

Саратов 2020

Введение. Дискретный гармонический анализ – это математическая дисциплина, ориентированная на при кладные задачи цифровой обработки сигналов (ЦОС) такие как фильтрация, аппроксимация, интерполяция, идентификация, распознавание, имитация, сжатие, кодирование, передача по каналам связи, при решении которых используется спектральная область их представления. Понятие сигнала требует уточнения. В дискретном гармоническом анализе сигнал определяется как комплекснозначная периодическая функция целочисленного аргумента.

Математическую основу спектрального представления сигналов составляет дискретное преобразование Фурье (ДПФ) в различных ортогональных базисах. В 1965 г. в работе Кули и Тьюки предложили быстрое преобразование Фурье (БПФ) – быстрый метод вычисления ДПФ. В качестве относительно новых интересных способов применения преобразования Фурье можно привести примеры: нанесение водяных знаков, то есть незаметное размещение какой-либо информации в изображении, и стегалография — шифрование послания таким образом, чтобы оно было понятно всем, кроме получателя.

Формула обращения для ДПФ порождает разложение сигнала по экспоненциальному базису. Разложение сигнала по различным базисам является основным приемом ЦОС. Свойства коэффициентов таких разложений позволяют выявить структуру сигнала. Выбор рационального базиса является важной теоретической и прикладной проблемой. При ее решении могут оказаться особенно полезными параметрические базисные системы, содержащие в своей структуре один или несколько изменяемых параметров, влияющих на их свойства. Известным и важным примером таких базисов служит класс комплексных экспоненциальных функций Виленкина-Крестенона (ВКФ), управление свойствами которых осуществляется с помощью вариации основания используемой системы счисления и дополнительного применения различных способов предупорядочения базисных функций в системе. ВКФ являются мультипликативными функциями с базовой операцией мультипликативности в виде поразрядного сложения по модулю, равному основанию системы счисления, используемой при представлении номера и аргумента ВКФ, поэтому для них справедливы все важные для ЦОС теоремы спектрального анализа (теоремы о модуляции, сдвиге, свертке, корреляции, энергетическом спектре и умножении сигналов).

Целью данной работы является изучение дискретных систем Виленкина-Крестенсона, у которых образующая последовательность состоит из одинаковых простых чисел.

Работа прошла апробацию на ежегодной студенческой конференции "Актуальные проблемы математики и механики", которую проводил механико-математический факультет СГУ в апреле 2019 года, в секции "Анализ данных".

Пространство сигналов. Пусть N – натуральное, фиксированное число. *Сигналом* называется N-периодическая комплекснозначная функция целочисленного аргумента
$x = x(j), j \in Z$. Множество сигналов обозначается через C_N. В C_N естественным образом вводятся две операции — операция сложения двух сигналов и операция умножения сигнала на комплексное число:

$$y = x_1 + x_2 \iff y(j) = x_1(j) + x_2(j),\ j \in Z;$$
$$y = cx \iff y(j) = cx(j),\ j \in Z.$$

В результате C_N становится линейным комплексным пространством. Нулевым элементом в C_N является сигнал O, такой, что $O(j) = 0$ при всех $j \in Z$.

Единичным N-периодическим импульсом называется сигнал δ_N, у которого $\delta_N(j) = 1$, когда j делится на N, и $\delta_N(j) = 0$ при остальных $j \in Z$. Очевидно, что $\delta_N(-j) = \delta_N(j)$.

Лемма 1.

Для $x \in C_N$ справедливо равенство

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\delta_N(j-k), \quad j \in Z. \tag{1}$$

Формула (16) дает аналитическое представление сигнала x по его значениям на основном периоде $J_n = 0 : N - 1$.

Вводится в рассмотрение система сдвигов единичного имупульса

$$\delta_N(j),\ \delta_N(j-1), \ldots, \delta_N(j-N+1). \tag{2}$$

Эта система линейно независима на Z.

Согласно лемме 1 любой сигнал x разлагается по линейно независимой системе (2). Значит, система (2) является базисом пространства C_N. При этом размерность C_N равна N.

Лемма 2.

Для любого сигнала x при всех $l \in Z$ выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(j+l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j). \tag{3}$$

Следствие.

В условиях леммы 2 справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(l-j) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j). \tag{4}$$

В C_N скалярное произведение и норму можно представить в виде

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}, \quad ||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Два сигнала x, y называются ортогональными, если $\langle x, y\rangle = 0$. Сигнал x называется нормированным, если $||x|| = 1$.

Сдвиг $x(j-k)$ сигнала $x(j)$ как элемент пространства C_N обозначается через $x(\cdot - k)$.

Лемма 3. *При всех $k, l \in Z$ имеет место равенство*

$$\langle \delta_N(\cdot - k), \delta_N(\cdot - l)\rangle = \delta_N(k-l).$$

Следствие.

Система сигналов (2) является ортонормированной, т.е. образует ортонормированный базис в пространстве C_N.

Лемма 4.

Для произвольных сигналов x, y выполняется неравенство Коши–Буняковского

$$| \langle x, y \rangle | \leq ||x|| \cdot ||y||. \tag{5}$$

При $x \neq O$ неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $y = cx$ при некотором $c \in C$.

В линейном комплексном пространстве C_N можно ввести операцию умножения сигналов:

$$y = x_1 x_2 \iff y(j) = x_1(j) x_2(j),\ j \in Z.$$

В этом случае C_N становится коммутативной алгеброй с единицей. Единицей является сигнал I, у которого $I(j) = 1$ при всех $j \in Z$.

Обратный сигнал x^{-1} к сигналу x определяется из условия
$xx^{-1} = x^{-1}x = I$. Он существует тогда и только тогда, когда все значения $x(j)$ отличны от нуля. При этом $x^{-1}(j) = [x(j)]^{-1}, j \in Z$.

Наряду с сигналом x рассматриваются сигналы $\overline{x}, Rex, Imx, |x|$ со значениями $\overline{x}(j) = \overline{x(j)}, [Rex](j) = Rex(j), [Imx](j) = Imx(j), |x|(j) = |x(j)|$. Отмечается, что $x\overline{x} = |x|^2$.

Сигнал x называется четным, если $x(-j) = \overline{x}(j)$, и нечетным, если $x(-j) = -\overline{x}(j)$ при всех $j \in Z$. Сигнал x называется вещественным, если $Imx = O$, и чисто мнимым, если $Rex = O$.

В дальнейшем рассматривается пространство C_N при $N \geq 2$. Однако и при $N = 1$ это пространство имеет смысл: C_1 состоит из сигналов x, у которых $x(j) \equiv c$, где c — комплексное число. При этом $\delta_1 = I$.

Дискретное преобразование Фурье. Пусть корень N-ой степени из единицы $\omega_N = exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\omega_N^{kj}) = \delta_N(j), j \in Z. \tag{6}$$

Дискретное преобразование Фурье – это отображение $F_N : C_N \to C_N$, сопоставляющее сигналу x сигнал $X = F_N(x)$ со значениями

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-kj},\ k \in Z. \tag{7}$$

Сигнал X называется спектром Фурье сигнала x или просто спектром, а величины $X(k)$ – компонентами спектра.

Теорема 1.

Справедлива формула обращения

$$x(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\omega_N^{kj},\ j \in Z. \tag{8}$$

Пусть $u_k(j) = \omega_N^{kj}$. Тогда формула обращения для ДПФ примет вид

$$x(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)u_k(j) \tag{9}$$

Это значит, что сигнал $x(j)$ разлагается по системе сигналов

$$u_0(j), u_1(j), \ldots, u_{N-1}(j). \tag{10}$$

Коэффициентами в этом разложении являются компоненты спектра.

Лемма 6.

Система сигналов (10) ортогональна. При этом $||u_k||^2 = N$ *при всех* $k \in 0 : N-1$.

Система (10) образует ортогональный базис в пространстве C_N . Этот базис называется экспоненциальным.

Умножив обе части равенства (9) скалярно на u_l и используя лемму 6 получим $\langle u_k, u_l \rangle = X(l)$. Таким образом коэффициенты в разложении (9) определяются однозначно.

Тогда формула (6) примет вид

$$\delta_N(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(u_k(j)).$$

Данное разложение единичного импульса по экспоненциальному базису, в котором все коэффициенты равны единице. В силу единственности разложения $F_N(\delta_N) = I$.

Теорема 2.

Необходимым и достаточным условием вещественности сигнала x является четность его спектра X.

Теорема 3.

Необходимым и достаточным условием четности сигнала x является вещественность его спектра X.

Как следствие из теорем 2 и 3 получаем результат: *критерием вещественности и четности сигнала x является вещественность и четность его спектра X.*

В примерах, представленных ниже, рассматривается вычисление ДПФ. Сигналы из C_N достаточно задавать на основном периоде $0 : N-1$.

Пример 1. Пусть m - натуральное число, $2m \le N$, и

$$x(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : m-1 \text{ и } j \in N-m+1 : N-1; \\ 0 & \text{при } j \in m : N-m. \end{cases}$$

(При $m = 1$ сигнал $x(j)$ совпадает с $\delta_N(j)$.)

Нужно показать, что

$$X(k) = \begin{cases} 2m-1 & \text{при } k = 0; \\ \frac{\sin((2m-1)k\pi/N)}{\sin(k\pi/N)} & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Действительно, по определению ДПФ

$$X(k) = \sum_{j=0}^{m-1} \omega_N^{-kj} + \sum_{j=N-m+1}^{N-1} \omega_N^{k(N-j)} = \sum_{j=-(m-1)}^{m-1} \omega_N^{kj}.$$

В частности, $X(0) = 2m - 1$. Далее, при $k \in 1 : N - 1$ по формуле для суммы членов геометрической прогрессии

$$X(k) = \frac{\omega_N^{-k(m-1)} - \omega_N^{km}}{1 - \omega_N^k} \cdot \frac{1 - \omega_N^{-k}}{1 - \omega_N^{-k}} =$$
$$= \frac{\omega_N^{-k(m-1)} - \omega_N^{km} - \omega_N^{-km} + \omega_N^{k(m-1)}}{2 - -\omega_N^k - \omega_N^{-k}} =$$
$$= \frac{\sin(2(m-1)k\pi/N) - \sin(2mk\pi/N)}{1 - \cos(2k\pi/N)} =$$
$$= \frac{\sin(2(m-1)k\pi/N)\sin(k\pi/N)}{\sin^2(k\pi/N)} = \frac{\sin((2m-1)k\pi/N)}{\sin(k\pi/N)}.$$

Пример 2. Пусть $N = 2n$ и

$$x(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : n-1; \\ -1 & \text{при } j \in n : N-1. \end{cases}$$

Нужно показать, что

$$X(k) = \begin{cases} 0 & \text{при четных } k, \\ 2(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}) & \text{при нечетных } k. \end{cases}$$

По определению ДПФ

$$X(k) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_N^{-kj} - \sum_{j=n}^{2n-1} \omega_N^{-k(j-n)-kn} = (1 - \omega_N^{-kn}) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_N^{-kj}.$$

Поскольку $\omega_2 = -1$, то $\omega_N^{-kn} = \omega_{2n}^{-kn} = \omega_2^{-k} = (-1)^{-k}$, так что

$$X(k) = \begin{cases} 0 & \text{при четных } k, \\ \frac{2(1-\omega_N^{-kn})}{1-\omega_N^{-k}} = \frac{4}{1-\omega_N^{-k}} & \text{при нечетных } k. \end{cases}$$

Равенство Парсеваля. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.

Пусть $X = F_N(x), Y = F_N(y)$. *Тогда*

$$\langle x, y \rangle = N^{-1} \langle X, Y \rangle \tag{11}$$

Следствие.

Справедливо равенство

$$\|x\|^2 = N^{-1} \|X\|^2 . \tag{12}$$

Формула (12) называется равенством Парсеваля, а формула (11) — обобщенным равенством Парсеваля.

Равенство Парсеваля можно использовать для вычисления тригонометрических сумм в случае, когда удается вывести явные формулы для компонент спектра сигнала. Используя пример 2, для рассмотренного в нем сигнала имеется

$$\|x\|^2 = N = 2n,$$

$$\|X\|^2 = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left| 1 - i \operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right|^2 = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n}} .$$

На основании (12) получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n}} = n^2 .$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть

$$x(j) = j, j \in 0 : N-1.$$

Действительно

$$X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}N(N-1) & \text{при } k = 0; \\ -\frac{1}{2}N(1 - i\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{N}) & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{13}$$

По определению ДПФ имеется

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} j\omega_N^{-kj}.$$

В частности, $X(0) = \frac{1}{2}N(N-1)$. Пусть $k \in 1 : N-1$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\omega_N^{-kj} = X(k) + N\delta_N(k) = X(k).$$

Вместе с тем,

$$\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\omega_N^{-kj} = \omega_N^k \sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\omega_N^{-k(j+1)} =$$
$$= \omega_N^k \sum_{j'=1}^{N} j'\omega_N^{-kj'} = \omega_N^k(X(k)+N).$$

Приходим к уравнению $X(k) = \omega_N^k(X(k)+N)$, из которого следует, что

$$X(k) = \frac{N\omega_N^k}{1-\omega_N^k} = -\frac{N}{1-\omega_N^{-k}} = -\frac{1}{2}N(1 - i\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{N}),$$
$$k \in 1 : N-1.$$

Формула (13) установлена.

Вычислив квадраты норм сигнала x и его спектра X получаем

$$\|X\|^2 = \frac{1}{4}N^2(N-1)^2 + \frac{1}{4}N^2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}}.$$

На основании (12)

$$\frac{(N-1)(2N-1)}{6} = \frac{1}{4}(N-1)^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}}.$$

После преобразований приходим к формуле

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}} = \frac{N^2-1}{3}.$$

ВКФ и их свойства. Пусть p есть произвольное целое положительное число, принятое в качестве основания системы счисления, а целые положительные числа k и i, задающие номер и аргумент ВКФ $Wal(k, \frac{i}{N})$, определенной на интервале $[0, N = p^n)$ имеют следующую n-разрядную позиционную запись:

$$k = \sum_{m=1}^{n} k^{(m)} p^{m-1}, \ i = \sum_{m=1}^{n} i^{(m)} p^{m-1},$$

где $k(m)$ и $i(m)$ являются m-ми разрядами чисел k и i соответственно и лежат в диапазоне $[0, p-1]$. Тогда ВКФ можно представить следующим выражением:

$$Wal\left(k, \frac{i}{N}\right) = \exp\left(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^{n} k^{(m)} i^{(m)}\right), \ j = \sqrt{-1}. \tag{14}$$

Из него следует, что ВКФ представляет собой не одну базисную функцию заданного номера k, а семейство функций, отличающихся значениями параметров p и n. Так, например, при $p = 2$ и $n \neq 1$ функция

$$Wal\left(k, \frac{i}{N}\right) = \exp\left(j\pi \sum_{m=1}^{n} k^{(m)} i^{(m)}\right) = \pm 1$$

и переходит в функцию Уолша, а при $p = N$ и $n = 1$ ВКФ становится дискретной комплексной экспоненциальной функцией (ДЭФ) Фурье

$$Wal\left(k, \frac{i}{N}\right) = \exp\left(j2\pi k^{(1)} \frac{i^{(1)}}{N}\right), \text{ где } k^{(1)}, i^{(1)} = 0, 1, \ldots, N-1$$

Дискретные ВКФ принимают только p различных значений и обладают следующими свойствами:

1)ортонормированности

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} k^{(m)} i^{(m)} Wal\left(k, \frac{i}{N}\right) Wal\left(\lambda, \frac{i}{N}\right) = \delta_{k,\lambda}$$

здесь $\delta_{k,\lambda}$ – символ Кронекера

2)периодичности с периодом N

$$Wal\left(k, \left(\frac{i \pm N}{N}\right)\right) = Wal\left(k, \frac{i}{N}\right),$$

3)двойственности (симметрии)

$$Wal\left(k, \left(\frac{i}{N}\right)\right) = Wal\left(i, \frac{k}{N}\right),$$

4)двойной мультипликативности с базовой операцией в виде поразрядного сложения по модулю p

$$Wal\left(k, \left(\frac{i}{N}\right)\right) = \frac{1}{Wal(k, \frac{i}{N})},$$

$$Wal\left(k, \left(\frac{i}{N}\right)\right) Wal\left(\lambda, \left(\frac{i}{N}\right)\right) = Wal\left(q, \frac{i}{N}\right),$$

$$Wal\left(i, \left(\frac{k}{N}\right)\right) Wal\left(i, \left(\frac{\lambda}{N}\right)\right) = Wal\left(i, \frac{q}{N}\right),$$

где $q = k \oplus \lambda$

и является результатом поразрядного сложения по модулю p p-ичных кодов чисел i и λ. В приведенных выражениях $Wal(k, \frac{i}{N})$ означает комплексно-сопряженную ВКФ, то есть

$$\overline{Wal}\left(k, \left(\frac{i}{N}\right)\right) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k^{(m)} i^{(m)}\right).$$

Так как на интервале $[0, N)$ можно записать только N дискретных ВКФ, то система из таких ВКФ будет полной, поскольку её нельзя будет дополнить на этом интервале ни одной новой функцией, ортогональной одновременно ко всем остальным функциям системы. Полная дискретная система, образованная из ВКФ (14), получила название системы ВКФ с упорядочением Адамара (ВКФ-Адамара). Кроме нее в теории и практике ЦОС широко используются еще две системы ВКФ с упорядочениями Пэли и Хармута, получаемые путем замены прямого p-ичного кода номера ВКФ k его инвертированным кодом или обобщенным кодом Грея. С учетом этого каждой системе даны свои обозначения в следующем виде:

ВКФ - Адамара

$$Had\left(k, \left(\frac{i}{N}\right)\right) = \exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k^{(m)} i^{(m)}\right),$$

ВКФ – Пэли

$$Pal\left(k, \left(\frac{i}{N}\right)\right) = \exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k^{(n+1-m)} i^{(m)}\right),$$

ВКФ – Хармута

$$Har\left(k, \left(\frac{i}{N}\right)\right) = \exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} < k^{(m)} > i^{(m)}\right),$$

где $< k^{(m)} >$ означает m-й разряд обобщенного кода Грея числа k, вычисляемый по правилу:

$$< k^{(m)} >= (k^{(m)} + k^{(m+1)}) \bmod p, m = 1, 2, \dots n$$

при этом

$$k^{(n+1)} = 0.$$

Следует иметь в виду, что инвертирование кода k и его кодирование Грея не приводят к изменению самих функций Виленкина-Крестенсона, а только меняют прядок их следования в полной системе. Переупорядочение функций позволяет получить дополнительный способ расширения класса базисных систем на основе ВКФ.

Все полные системы ВКФ вне зависимости от способа их упорядочения могут быть использованы для разложения дискретных сигналов $x(i), i = 0, 1, \dots N - 1$

$$x(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Wal\left(k, \left(\frac{i}{N}\right)\right),$$

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \overline{Wal}\left(k, \left(\frac{i}{N}\right)\right), \tag{15}$$

и устанавливает взаимооднозначное математическое соответствие между сигналом $x(i)$ и его спектром $X(k)$. Соотношение (15) является прямым преобразованием Фурье-Виленкина-Крестенсона и составляет математическую основу спектрального анализа в базисе ВКФ. Для его реализации в общем случае необходимо выполнить

$$M_{\Pi} = N^2,\ A_{\Pi} = N(N - 1)$$

комплексных умножений и сложений, число которых при больших значений N может быть существенным.

ДПФ в базисе ВКФ. В линейной теории континуальных сигналов они обычно представляются в виде линейной комбинации (взвешенной суммы) комплексных экспоненциальных функций, составляющих базисную систему. Набор весовых коэффициентов (комплексных амплитуд) в этой комбинации называется *спектром* сигнала и полностью определяет этот сигнал. В случае конечного интервала определения сигналов такая линейная комбинация есть ряд Фурье. При неограниченном увеличении интервала в пределе ряд Фурье заменяется интегралом Фурье, который, в свою очередь, при некоторых дополнительных условиях переходит в преобразование Лапласа.

В обычной линейной теории дискретных сигналов их также представляют в виде линейной комбинации базисных ДЭФ $\{\exp[j(\frac{2\pi}{N})]kx\}$, где k — номер функции в системе. В случае конечного интервала определения такое представление, аналогичное ряду Фурье, называется ДПФ и имеет вид

$$s(x) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{j(2\pi/N)kx}, \ S(K) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s(x) e^{-j(2\pi/N)kx}. \tag{16}$$

Здесь сигнал $s(x)$ и его спектр $S(k)$ являются дискретными функциями, определенными на интервале N. В случае бесконечного интервала определения дискретных сигналов они представляются с помощью *дискретного преобразования Лапласа*

$$s(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta - j\pi}^{\beta + j\pi} S(p) e^{px} dp, \ S(p) = \sum_{x=0}^{\infty} s(x) e^{-px}.$$

Здесь изображение $S(p)$ есть периодическая функция непрерывной комплексной переменной $p = \beta + j\omega$.

Для удобства такое представление используют в несколько модифицированном виде, носящем название z-преобразования и получающемся путем введения новой переменной $z = \exp p$,

$$s(x) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} S(z) z^{x-1} dz, \; S(z) = \sum_{x=0}^{\infty} s(x) z^{-x}. \tag{17}$$

Переход от переменной p к переменной z соответствует такому отображению плоскости p на плоскость z, при котором линии, параллельные оси $j\omega$, отображаются на концентрические окружности с центром в начале координат. Сама ось $j\omega$ при этом преобразуется в окружность единичного радиуса, причем когда ω изменяется от 0 до 2π, изображающая точка на плоскости z совершает ровно один оборот по единичной окружности. В формулах z-преобразования $S(z)$ есть континуальная функция и ее интегрирование ведется по замкнутому контуру вдоль единичной окружности.

Представление дискретных сигналов на бесконечном интервале и связанная с ним теория z-преобразования в настоящее время широко используются при проектировании импульсных систем регулирования и цифровых фильтров. В то же время направление, связанное с представлением сигналов на конечных интервалах, находится в начале своего развития и до настоящего времени не имело единого теоретического фундамента.

Находясь в рамках конечного интервала N, можно ввести новое понятие сдвига сигнала $s(x)$ на некоторую величину τ (целое число), определив его как перестановку отсчетов, вызванную поразрядным сложением по модулю чисел x и τ, представленных в m-ичной системе счисления (сложение без переноса в старший разряд). Такая операция названа m-сдвигом.

Для того чтобы спектральная теория, построенная на основе какой-либо базисной системы функций была хорошей (то есть располагала привычными понятиями и теоремами), необходимо, чтобы эта система была мультипликативной, ортогональной и симметричной относительно номера функции в системе и номера отсчета. Такой системой, адекватной понятию m-сдвига, является система ВКФ, которая при одном из способов нумерации функций в системе обозначена $Pal(p, x)$ (здесь p — номер функции). ДПФ в базисе

ВКФ выражается формулами

$$s(x) = \sum_{p=0}^{N-1} S(p) Pal(p,x),\ \ S(p) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} s(x) \overline{Pal}(p,x). \tag{18}$$

Реализация алгоритма по обработке информации с помощью ВКФ. Для реализации алгоритма по обработке информации написана программа на языке программирования Java. Код этой программы приведен в приложении A.

Для преобразования выбрано БПФ в базисе ВКФ. Этот метод позволяет вычислять преобразование за время $O(n \log n)$. Основная идея БПФ заключается в разделении вектора коэффициентов на два вектора, рекурсивном вычислении ДПФ для них, и объединении результатов в одно БПФ.

Основной класс FFT имеет функцию fft, которая осуществляет прямое и обратное преобразование сигнала степени 2. В качестве исходного сигнала взят массив случайных, целых чисел от 1 до 100. Рассмотрен случай, когда ВКФ становится ДЭФ, т. е. при $p = N$ и $n = 1$, а также когда ВКФ переходит в функцию Уолша, т. е. при $p = 2$ и $n \neq 1$:

Заключение. Изучены необходимые сведения из теории гармонического анализа: основные понятия, теоремы, леммы необходимые для работы с сигналами.

Рассмотрено дискретное преобразование Фурье, а также преобразование Виленкина-Крестенсона.

Выполнена реализация алгоритма по обработке информации с помощью БПФ в базисе ВКФ на языке программирования Java.

Результаты работы представлены в виде вычислений и графиков для различных p, n и коэффициентов обнуления. При большем коэффициенте обнуления восстановленный график не совпадает с начальным. При большем количестве точек восстановленний график получается более точным.