МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Компьютерной алгебры и теории чисел

# Аппроксимации Паде

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 – математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Ойкина Дмитрия Олеговича

Научный руководитель
зав.каф., к.ф. - м.н., доцент ____________ А.М. Водолазов

Зав. кафедрой
зав.каф., к.ф. - м.н., доцент ____________ А.М. Водолазов

Саратов 2020

**Введение.** Объектом исследования в данной магистерской работе являются аппроксимации Паде. Теория аппроксимаций Паде – локально наилучших рациональных аппроксимаций степенного ряда – создает независимое направление в комплексном анализе и теории приближений [1]. Они конструируются непосредственно по его коэффициентам и предоставляют осуществление эффективного аналитического продолжения этого ряда за пределы его круга сходимости, а их полюсы в явном смысле локализуют особые точки (в том числе полюсы и их кратности) продолженной функции в соответствующей области сходимости и на ее границе. В XVIII–XIX вв. данное направление формировалось в основном в рамках классической теории непрерывных дробей. Внимание к аппроксимациям Паде и более общим конструкциям рациональных аппроксимаций аналитических функций резко возросло во второй половине XIX века. Название аппроксимация Паде получила по имени французского математика А. Паде, применявшего её (1892) в рамках классической теории непрерывных дробей. Частные случаи аппроксимации Паде изучались начиная с 1820 О. Коши, К. Якоби, Ф. Г. Фробениусом. Фундаментальные результаты о диагональных П. а. получены П. Л. Чебышевым, А. А. Марковым и Т. Стилтьесом.

Научная значимость работы заключается в рассмотрении и расширении представлений о теории аппроксимаций Паде, а так же значимость состоит в возможности, в дальнейшем использовать программу для вычислений некоторых аппроксимаций Паде.

Целью данной работы являлось изучение основных вопросов связанных с теорией аппроксимаций Паде. Исследована связь непрерывных дробей с аппроксимациями Паде; рассмотрены теоремы Пуанкаре и Перрона, их приложения у теории сходимости непрерывных дробей, и приложения уточненной теоремы Пуанкаре; рассмотрена гипотеза Лейтона и сходимость непрерывной дроби Роджерса-Рамануджана. А так же, исследован алгоритм вычисления аппроксимаций Паде и самостоятельно разработана программа для вычисления аппроксимаций на языке C++.

В первом разделе рассмотрены основные понятия теории аппроксимаций.

Во втором разделе исследована связь аппроксимации Паде и непрерывных дробей.

В третьем разделе будет рассмотрен алгоритм вычисления аппроксимаций Паде и примеры вычислений.

Приложение содержит самостоятельно разработанную программу.

**Основное содержание работы.** Основная часть состоит из 3 разделов.

Первый раздел содержит определения и теоремы связанные непосредственно с теорией аппроксимаций и аппроксимаций Паде.

**Определение.** Пусть

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{1}$$

- степенной ряд, $n, m$ - произвольные целые неотрицательные числа. Аппроксимацией Паде [2] типа $(n, m)$ ряда $f$ называется рациональная функция $P_{n,m}/Q_{n,m}$, где полиномы $P_{n,m}, \deg P_{n,m} \leq n$, и $Q_{n,m}, \deg Q_{n,m} \leq m, Q_{n,m} \neq 0$, определяются (не единственным образом) из соотношения

$$(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = O(z^{n+m+1}), z \to 0 \tag{2}$$

(в правой части (2) стоит ряд по степеням $z$, начинающийся с $z^{n+m+1}$). Из соотношения (2) рациональная функция $[n/m]_f = P_{n,m}/Q_{n,m}$ определяется единственным образом. В соответствии с (2) нахождение полинома $Q_{n,m} = = q_0 + \ldots + q_m z^m, q_j = q_j(n, m)$, сводится к решению системы $m$ линейных однородных уравнений

$$c_{n-m+1}q_m + \ldots + c_{n+1}q_0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_n q_m + \ldots + c_{n+m}q_0 = 0$$

с $(m + 1)$ неизвестными. После вычисления знаменателя $Q_{n,m}$ числитель $P_{n,m}$ определяется равенством $P_{n,m} = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k(Q_{n,m}f)z^k$ где $c_k(\cdot)$ – $k$-й коэффициент ряда Тейлора, стоящего в скобках.

Если отличен от нуля определитель Адамара

$$
H_{n,m} = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{vmatrix}
$$

(полагаем $c_k = 0$ при $k < 0$), то для знаменателя $Q_{n,m}$ имеет место явная формула

$$
Q_{n,m}(z) = \tfrac{1}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \\ z^m & z^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

с нормировкой $Q_{n,m}(0) = 1$; аналогичная формула имеет место и для $P_{n,m}$. В этом случае из (2) вытекает, что

$$
[n/m]_f\,(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n+m} z^{n+m} + O(z^{n+m+1}) \tag{3}
$$

Данное соотношение иногда принимают за определение аппроксимаций Паде; при этом подходе аппроксимации Паде для некоторых $n, m$ могут не существовать.

Таблица $\Big\{[n/m]_f\,, n, m = 0, 1, \ldots\Big\}$ называется таблицей Паде ряда $f$. Последовательность $\Big\{[n/m]_f\,, n = 0, 1, \ldots\Big\}$ ($m$ – фиксировано) называется $m$-й строкой таблицы Паде; нулевая строка состоит из частичных сумм ряда (1). Последовательности вида $\Big\{[n+j/n]_f\,, n = 0, 1, ...\Big\}$ и $\Big\{[n/n+j]_f\,, n = 0, 1, \ldots\Big\}$, где $j > 0$ – фиксированное целое число, называются диагональными последовательностями таблицы Паде; последовательность $\Big\{[n/n]_f\,, n = 0, 1, \ldots\Big\}$, называется главной диагональной последовательностью или главной диагональю таблицы Паде.

Пусть $\Re_{n,m}$ – класс всех рациональных функций вида $p/q$, где $\deg p \leq$ $\leq n, \deg q \leq m, q \neq 0$. Если $[n/m]_f = P^*_{n,m}/Q^*_{n,m}$ , где НОД [3]$(P^*_{n,m}/Q^*_{n,m}) = 1$ то из (2) вытекает, что

$$
(f - [n/m]_f)(z) = O(z^{n+m+1-\lambda_{n,m}}),
$$

где $\lambda_{n,m} = \min(n - \deg P^*_{n,m}, m - \deg Q^*_{n,m})$ – дефект рациональной функции в классе $\Re_{n,m}$. Тем самым, аппроксимация Паде типа $(n, m)$ ряда $f$ доставляет максимально возможный порядок касания к этому ряду (в точке $z = 0$) в классе $\Re_{n,m}$, другими словами, является локально наилучшей рациональной аппроксимацией заданного степенного ряда в классе $\Re_{n,m}$.

Индекс $(n, m)$ называется нормальным в таблице Паде, если $\deg P^*_{n,m} = n, \deg Q^*_{n,m} = m$. Критерий нормальности индекса выражается условием: $H_{n,m} \cdot H_n + 1, m \cdot H_{n,m+1} \neq 0$. Для такого индекса при условии, что $f \notin \Re_{n,m}$, выполняется соотношение

$$(f - [n/m]_f)(z) = A_{n,m} z^{n+m+1+l_{n,m}} + \dots,$$

где $A_{n,m} \neq 0, l_{n,m} \geq 0$. Нормальными индексами таблица Паде произвольного ряда $f$ разбивается на квадратные блоки размера $l_{n,m} \times l_{n,m} : [n_0/m_0]_f = [n/m]_f$ для всех $n \leq n' \leq n + l_{n,m}, m \leq m' \leq m + l_{n,m}$ (при $f \in \Re_{n,m}$ полагают $l_{n,m} = \infty$).

**Определение.** (Бейкер). Если существуют многочлены $A^{[N,M]}(z), B^{[N,M]}(z)$ степени $N$ и $M$ соответственно такие, что

$$\frac{A^{[N,M]}(z)}{B^{[N,M]}(z)} = (z) + O(z^{N+M+1}) \tag{4}$$

и

$$B^{[N,M]}(0) = 1, \tag{5}$$

то тогда, по определению полагаем

$$[N/M] = \tfrac{A^{[N,M]}(z)}{B^{[N,M]}(z)}$$

Форма записи подчеркивает, что и числитель и знаменатель зависят от каждого из чисел $N$ и $M$. Замена (4) на соотношение

$$A^{[N,M]}(z) - f(z)B^{[N,M]}(z) = O(z^{N+M+1})$$

дает полностью эквивалентный вариант определения при условии, что условие (5) сохраняется.

**Определение.**

$$C(N/M) = Q^{[N/M]}(0) = \begin{vmatrix} C_{N-M+1} & C_{N-M+2} & \dots & C_N \\ C_{N-M+2} & C_{N-M+3} & \dots & C_N+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_N & C_{N+1} & \dots & C_N+M-1 \end{vmatrix} = -z \qquad (6)$$

Если $C(N/M) \neq 0$, то классическое определение Фробениуса—Паде и определение Бейкера соответствуют друг другу. Если $C(N/M) = 0$, то аппроксимации Паде $[N/M]$, может не существовать. Однако многочлены, удовлетворяющие $q_M(z)f(z) - p_N(z) = O(z^{N+M+1})$, существуют и определяют рациональную функцию, которая исторически называлась аппроксимацией Паде.

Во втором разделе исследована связь аппроксимации Паде и непрерывных дробей, рассмотрена гипотеза Лейтона и сходимость непрерывной дроби Роджерса-Рамануджана, а так же некоторые уточнения теоремы Пуанкаре.

К рекуррентным соотношениям

$$f_n + \alpha_{1,n}f_{n-1} + \ldots + \alpha_{k,n}f_{n-k} = 0, n = k, k+1, \ldots, \qquad (7)$$

связывающим между собой элементы последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, приводят многие задачи анализа и теории чисел. В частности, индукцией по числу $n$ легко проверяется, что последовательности числителей $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и знаменателей $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ числовой непрерывной дроби [4]

$$a + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}} \qquad (8)$$

связаны между собой соотношения

$$P_n = b_nP_{n-1} + a_nP_{n-2}, Q_n = b_nQ_{n-1} + a_nQ_{n-2}, n = 1, 2, \ldots.$$

Иными словами, последовательности $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются решениями одного и того же разностного уравнения

$$X_n = b_n X_{n-1} + a_n X_{n-2} n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

со следующими начальными условиями: $P_{-1} = 1, P_0 = a_0$ и $Q_{-1} = 0, Q_0 = = 1$.

**Теорема 1.** (Теорема Пуанкаре.) Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ является решением разностного уравнения (7) с предельно постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена

$$h(z) = \lim_{n\to\infty} (z^k + \alpha_{1,n} z^{k-1} + \ldots + \alpha_{k,n}) \tag{10}$$

которого различны по модулю. Тогда либо $f_n = 0$ при всех $n \geq n_0$ , либо существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n$ и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена.

**Теорема 2.** (Теорема Перрона.) Пусть корни характеристического многочлена невырожденного разностного уравнения (7) с предельно постоянными коэффициентами различны по модулю. Тогда для всякого корня $\lambda$ характеристического многочлена найдется решение $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения (7) такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = \lambda$.

**Теорема 3.** (Теорема Пуанкаре–Перрона в векторном виде.) Пусть данная последовательность $\{\varpi_n\}_n^{\infty} = 0 = \{(\omega_{n,1}, \ldots, \omega_{n,k})\}_{n=0}^{\infty}$ $k$-мерных векторов будет являться решением векторного разностного уравнения

$$\varpi_n = A_n \varpi_{n-1}, n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $(k \times k)$-матрицы $A_n$ имеют предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, и пусть собственные значения предельной матрицы $A$ различны по модулю. Тогда либо $\varpi_n = \overline{0}$ при всех $n \geq n_0$ , либо при некотором $j \in \{1, \ldots, k\}$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{n+1,j}}{\omega_{n,j}} = \lambda, \lim_{n\to\infty} \frac{\varpi_n}{\omega_{n,j}} = \overline{e}, \tag{12}$$

где $\lambda$ – собственное значение матрицы $A$, $\bar{e}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda$.

Если разностное уравнение (11) невырождено (т.е. $detA_n \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \dots$ ), $\lambda$ – наперед заданное собственное значение матрицы $A$, то найдется решение $\{\varpi_n\}_{n=0}^{\infty}$ векторного разностного уравнения (11), для которого выполняются равенства (12) при некотором $j \in \{1, \dots, k\}$.

**Теорема 4.** Пусть имеется невырожденная линейная система разностных уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} \omega_n^1 = \alpha_n \omega_{n-1}^1 + \beta_n \omega_{n-1}^2, \\ \omega_n^2 = \gamma_n \omega_{n-1}^1 + \delta_n \omega_{n-1}^2, \end{cases} \tag{13}$$

и пусть при всех $n = 1, 2, \dots$

$$|\alpha_n| + |\beta_n| \leq q(|\delta_n| - |\gamma_n|),$$

где $q < 1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существует единственное (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное решение $\{\overline{v}_n\}_{n=0}^{\infty} = \big\{(v_n^1, v_n^2)\big\}_{n=0}^{\infty}$ системы (13) такое, что $|v_n^1| \geq |v_n^2|$ при всех $n = 0, 1, \dots$.

При этом если $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n/\delta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} v_n^2/v_n^1 = 0$.

2. Для любого решения $\{\overline{u}_n\}_{n=0}^{\infty} = \big\{(u_n^1, u_n^2)\big\}_{n=0}^{\infty}$ , отличного от исключительного решения $\{\overline{v}_n\}_{n=0}^{\infty}$ , найдется индекс $n_0$ такой, что при всех $n \geq n_0$ могут быть выполнены неравенства

$$|u_n^2| > |u_n^1|, |\tfrac{v_n^1}{u_n^2}| \leq q^{n-n_0} |\tfrac{v_{n_0}^1}{u_{n_0}^2}|$$

и, в частности, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} v_n^1/u_n^2 = 0$.

При этом если $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n/(|\delta_n| - |\gamma_n|) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^1/u_n^2 = 0$.

**Теорема 5.** (Теорема Ван Флека.) Пусть коэффициенты правильной C-дроби имеют предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. Тогда C-дробь сходится к мероморфной функции равномерно на компактах, лежащих в $\mathbb{C} \backslash \Gamma$, где $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = -t/(4a), t \geq 1\}$, и не содержащих полюсов предельной функции.

Имея в наличии формулы для ганкелевых определителей и используя для доказательства сходимости С-дроби не теорему Пуанкаре–Перрона, а критерий Ворпицкого сходимости непрерывных дробей, по данной схеме можно получить некоторые новые утверждения, связанные с гипотезой Лейтона.

**Критерий Ворпицкого.** Непрерывная дробь $\frac{a_1}{1+\frac{a_2}{1+\ddots}}$ сходится, если $|a_n| \leq 1/4$ при всех достаточно больших $n \geq n_0$.

Так как $|z|^n \leq 1/4$ при всех $|z| < 1$ и достаточно больших $n \geq n(z)$, то из критерия Ворпицкого следует, что непрерывная дробь Рамануджана

$$R(z) = 1 + \frac{z}{1+\frac{z^2}{1+\frac{z^3}{1+\ddots}}}$$

сходится в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$. При этом легко показать,что предельная функция $R$ мероморфна в $D$. Из результатов Рамануджана вытекает, что единичный круг $D$ является естественной областью существования функции $R$.

В 1940 г. Лейтон (W. Leighton) высказал гипотезу, что тем же свойством (непродолжимости за пределы круга $D$) обладает любаяая функция $f$, которая моет быть представлена С-дробью такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \infty$ и на коэффициенты $a_k$ наложены определенные естественные условия.

**Гипотеза Лейтона.** Пусть С-дробь такова, что $\alpha_n \in \mathbb{N}, a_n \in$
$\in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty, \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/\alpha_n} = 1. \tag{14}$$

Тогда С-дробь сходится в круге $D = \{|z| < 1\}$ к функции $f$ , мероморфной в $D$, и окружность $|z| = 1$ является естественной границей мероморфности функции $f$.

А. А. Гончар значительно усилил вышеприведенные результаты и показал, что гипотеза Лейтона верна для неубывающих показателей $\alpha_n$. То есть, он доказал следующую теорему [5].

**Теорема 6.** (Теорема Гончара.) Пусть С-дробь такова, что выполнены предположения (14) гипотезы Лейтона, а также при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется условие

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_1 \geq 0. \tag{15}$$

Тогда имеет место утверждение Лейтона.

Очевидно, что для неубывающей последовательности натуральных показателей ${\alpha_n}^{\infty} n = 1$ условие (15) выполняется.

Выполняя условия (15), в теореме Гончара условия (14) можно заменить немного более слабыми условиями

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n} = \infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} |4a_n|^{1/\alpha_n} = 1.$$

Отметим, что условие (15) в теореме Гончара фактически означает отсутствие степенного ряда $f^{\infty}$, соответствующего С-дроби в окрестности точки $z = \infty$. Если отказаться от условия (15), то такой ряд возникает, но его существование не гарантирует сходимости к нему С-дроби в окрестности точки $z = \infty$.

Непрерывной дробью Роджерса–Рамануджана называется следующая правильная С-дробь:

$$1 + \cfrac{qz}{1 + \frac{q^2 z}{1+\ddots}} \tag{16}$$

где $q \neq 0$ – любой комплексный параметр. Случай $|q| > 1$ интереса не представляет, так как при таких $q$ непрерывная дробь Роджерса–Рамануджана сходится лишь при $z = 0$.

Из критерия Ворпицкого следует, что непрерывная дробь (16) сходится при всех $z \in \mathbb{C}$, если $|q| < 1$, и сходится при всех $|z| \leq 1/4$, если $|q| = 1$. Функция, к которой сходится непрерывная дробь (16), найдена Роджерсом и Рамануджаном при помощи следующего рассуждения. Для функции Роджерса–Рамануджана

$$G_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k q^{k^2} \frac{1}{(q)_k} \tag{17}$$

где $(q)_0 = 1, (q)_n = (1-q)\cdots(1-q^n)$, непосредственным образом проверяется функциональное равенство

$$G_q(z) = G_q(qz) + qzG_q(q^2z), \tag{18}$$

из которого для функции $H_q(z) = \frac{G_q(z)}{G_q(qz)}$ следует равенство

$$H_q(z) = 1 + \tfrac{qz}{H_q(qz)}.$$

Из этого же равенства для $H_q(qz), H_q(q^2z)$ и т. д. следует бесконечная цепочка равенств

$$H_q(z) = 1 + \tfrac{qz}{H_q(qz)} = 1 + \tfrac{qz}{1+\frac{q^2z}{H_q(q^2z)}} = 1 + \tfrac{qz}{1+\frac{q^2z}{1+\frac{q^3z}{H_q(q^3z)}}} = \ldots,$$

которая влечет за собой (после некоторых стандартных рассуждений) равенство

$$H_q(z) = 1 + \cfrac{qz}{1 + \frac{q^2z}{1+\frac{q^3z}{1+\ddots}}} \tag{19}$$

Другое доказательство равенства (19) дал М. Д. Хиршхорн, основываясь на полученных им явных формулах для числителя $P_{q,n}(z)$ и знаменателя $Q_{q,n}(z)$ $n$-й подходящей дроби (16). А именно, Хиршхорн показал, что

$$P_{q,n}(z) = \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} z^k q^{k^2} \tfrac{(q)_{n+1-k}}{(q)_k(q)_{n+1-2k}}$$

$$Q_{q,n}(z) = P_{q,n-1}(qz).$$

Так как при $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(q)_{n+1-k}}{(q)_k(q)_{n+1-2k}} = \lim_{n\to\infty}(1-q^{n+2-2k})\ldots(1-q^{n+1-k}) = 1 \tag{20}$$

то из формул Хиршхорна следует, что при $|q| < 1, z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n\to\infty} P_{q,n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k q^{k^2} \tfrac{1}{(q)_k} = G_q(z),$$

$$\lim_{n\to\infty} Q_{q,n}(z) = G_q(qz),$$

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{P_{q,n}}{Q_{q,n}}(z) = \tfrac{G_q(z)}{G_q(qz)} = H_q(z).$$

Формулы Хиршхорна оказались наиболее полезными и при изучении самого интересного случая $|q| = 1$. Случай $q = exp(2\Pi i\tau)$, где $\tau$ – рациональное число, легко исследуется, так как в этом случае непрерывная дробь (16) является периодической непрерывной дробью. Поэтому далее будем полагать, что $q = exp(2\Pi i\tau)$, где $\tau$ – иррациональное число. Обозначим через $\Lambda^\beta$ последовательность натуральных чисел такую, что $\lim\limits_{n\in\Lambda^\beta} q^n = \beta, |\beta| = 1$. Тогда аналогично с равенством (20) имеем равенство

$$\lim_{n\in\Lambda^\beta} \tfrac{(q)_{n+1-k}}{(q)_{n+1-2k}} = \lim_{n\in\Lambda^\beta}(1-q^{n+2-2k})\dots(1-q^{n+1-k}) = (1-\beta q^{2-2k})\dots(1-\beta q^{1-k}).$$

Первое из этих уточнений теоремы Пуанкаре состоит в том, что определенное нетривиальное содержание теоремы Пуанкаре удается сохранить и в случае отказа от условия различности по модулю корней характеристического многочлена.

**Уточнение 1.** Пусть имеют место все предположения теоремы Пуанкаре, за исключением предположения о различности по модулю корней характеристического многочлена. То либо $f_n = 0$ при всех $n > n_0$, либо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_n|^{1/n}$ равен модулю одного из корней характеристического многочлена и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n + \beta_1 f_{n-1} + \ldots + \beta_l f_{n-l}}{|f_{n-1}| + \ldots + |f_{n-l}|} \tag{21}$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_l$ – коэффициенты многочлена $z^l + \beta_1 z^{l-1} + \ldots + \beta_l = \prod\limits_{j=1}^{l}(z -$ $- \lambda_j)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ – корни характеристического многочлена, равные по модулю $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_n|^{1/n}$.

Если все корни характеристического многочлена не равны по модулю, тогда в данном случае число $l$ не может быть строго больше 1 и, следовательно, $l = 1$ и равенство (21) значит, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n/f_{n-1} = -\beta_1$, где $-\beta_1$ совпадает с одним из корней характеристического многочлена.

Следующее уточнение распространяет теорему Пуанкаре на случай рекуррентных соотношений неограниченного порядка.

**Уточнение 2.** Пусть элементы последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$f_n + \alpha_{1,n} f_{n-1} + \ldots + \alpha_{n,n} f_0 = 0, n = n_0, n_0+1, \ldots,$$

с коэффициентами $\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{n,n}$ такими, что многочлены $1+\alpha_{1,n}z+\ldots+$ $+\alpha_{n,n}z^n$ равномерно на компактах, лежащих в круге $|z| < R$, сходятся при $n \to \infty$ к функции $\alpha(z) \neq 0$. Тогда либо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_n|^{1/n} \leq R^{-1}$ , либо $(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_n|^{1/n})^{-1}$ равен модулю одного из корней функции $\alpha(z)$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[f(z)\prod\limits_{j=1}^{l}(1-z/\lambda_j)\right]_n}{|f_{n-1}|+\ldots+|f_{n-l}|} = 0, \tag{22}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ – корни функции $\alpha(z)$, равные по модулю $(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_n|^{1/n})^{-1}$, а символом $[\cdot]_n$ обозначается коэффициент при $z^n$ степенного ряда, стоящего в квадратных скобках.

В третьем разделе рассмотрен алгоритм вычисления аппроксимаций Паде в MathLab.

Приведем алгоритм [6] для нахождения аппроксимации Паде типа $(n, m)$ функции $f(x)$ в точке $x = a$:

**1.** Найдем коэффициенты $c_0, \ldots, c_{n+m}$ разложения в ряд Тейлора аппроксимируемой функции $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ в точке $x = a$.

**2.** Составим теплицевы матрицы (здесь $c_k = 0$, если $k < 0$)

$$T_k = \begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} & \ldots & c_M \\ c_{k+1} & c_k & \ldots & c_{M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_N & c_{N-1} & \ldots & c_{N+M-k} \end{pmatrix}, M \leq k \leq N$$

где $M = n - m + 1, N = n + m$.

**3.** Находим ранги $r_k$ матриц $T_k, M \leq k \leq N$.

Функция $rank(A)$ в Matlab возвращает ранг матрицы $A$, который определяется как количество ее сингулярных чисел, превышающих порог $tol$. Это пороговое значение зависит от размеров матрицы, ее спектральной нормы и относительной точности вычислений $eps = 2^{-52}$. Пользователь также имеет возможность указать свое значение $tol$ при использовании функции $r = rank(A, tol)$ для вычисления ранга матрицы.

**4.** Находим размерности $d_k = k - M + 1 - r_k, M \leq k \leq N$ правых ядер матриц $T_k$. Положим также $d_M - 1 = 0, d_N + 1 = N - M + 2$.

**5.** Составляем разности $\Delta_k = d_k - d_k - 1, M \leq k \leq N + 1$ и находим существенные индексы $\mu_1, \mu_2$.

Для чисел $\Delta_k$, справедливы равенства:

$\Delta_M = \ldots = \Delta_{\mu_1} = 0, \Delta_{\mu_1+1} = \ldots = \Delta_{\mu_2} = 1, \Delta_{\mu_2+1} = \ldots = \Delta_{N+1} = 2.$

**6.** Находим вектор $(g_0, g_1, \ldots, g_{\mu_1+1-M})^T$ из одномерного ядра матрицы $T_{\mu_1+1}$.

Он содержит коэффициенты знаменателя аппроксимации Паде, имеющего минимальную степень (первый существенный многочлен).

**7.** Находим знаменатель аппроксимации Паде $Q_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\mu_1+1-M} g_k(z-a)^k$.

Заметим, что степень многочлена $Q_1(z)$ может быть формальной. Если $\deg Q_1(z) = s < \mu_1 + 1 - M$, то обычно считают, что $z = \infty$ является корнем $Q_1(z)$ кратности $k = \mu_1 + 1 - M - s$.Из-за приближенных вычислений [7] коэффициенты $g_k, k = s+1, \ldots, \mu_1 + 1 - M$ могут оказаться лишь близкими к нулю. Это приведет к тому, что многочлен $Q_1(z)$ будет иметь $k$ корней с большой абсолютной величиной.

**8.** Составляем матрицу $M = \|c_{i-j}\|_{i=1,\ldots,n+1, j=1,\ldots,s+1}$ $(c_k = 0, k < 0)$, необходимую для нахождения числителя аппроксимации Паде. Здесь $s$ – степень многочлена $Q_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{s} q_k(z-a)^k$. После исключения почти нулевых коэффициентов в многочлене $Q_1(z)$ его степень $s$ может оказаться меньше формальной степени $\mu_1 + 1 - M$.

**9.** Находим вектор $(p_0, \ldots, p_n)^T = M(q_0, \ldots, q_s)^T$ и числитель аппроксимации Паде $P_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k(z-a)^k$. На этом этапе также целесообразно убрать нулевые элементы $p_k$ перед образованием числителя.

**Заключение.** В заключении стоит сказать, что именно свойство аппроксимаций Паде - эффективно решать задачу аналитического продолжения степенного ряда - и лежит в начале их многих результативных применений в анализе и при изучении прикладных задач. В действительности метод аппроксимации Паде значится одним из наиболее перспективных нелинейных методов суммирования степенного ряда и локализации его особых точек. А так же по данной причине теория аппроксимаций Паде превратилась во вполне самостоятельный раздел теории приближений, а сами эти аппроксимации нашли разнообразные применения как непосредственно в теории рациональных приближений, так и в теории чисел, теории несамосопряженных операторов, исследовании дифференциальных уравнений.