МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Неархимедовы аналоги ортогональных и симметрических операторов

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 –Математика и компьютерные науки

код и наименование направления

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

АЛЬ-БЕТАР ХУТХЭЙФА РААД

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
зав.каф., к.ф.-м.н., доцент ______________ А.М. Водолазов
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
зав.каф., к.ф.-м.н., доцент ______________ А.М. Водолазов
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие активно развивается приложение p-адического анализа к математической физике. Построение неархимедовой (особенно p-адической) математической физики требует развития теории некоторых новых математических структур над неархимедовыми полями. В то же время физические приложения стимулируют исследования во многих традиционных областях неархимедова анализа. В частности, квантовая механика с p-адичнозначными волновыми функциями породила большой интерес к теории гильбертовых пространств над неархимедовыми полями (и к общему функциональному анализу над неархимедовыми банаховыми пространствами). Эта теория, однако, развита недостаточно для нужд предполагаемых приложений, несмотря на свою довольно долгую историю (первую модель неархимедова гильбертова пространства предложил Г. Калиш в 1946 г., а следующий шаг в этом направлении был сделан Т. Спрингером в 1955 г.). Одна из основных проблем - это существование неизоморфных моделей с весьма различными свойствами.

В нашей магистерской работе мы рассматриваем общую теорию неархимедовых гильбертовых пространств.Затем изучаются свойства аналогов ортогональных и симметрических операторов в неархимедовых гильбертовых пространствах. Мы рассматриваем некоторые основные вопросы о таких операторах, в частности

1) будет ли всякий оператор в неархимедовом гильбертовом пространстве, сохраняющий скалярное произведение, непрерывным? 2) будет ли он изометричен? Ответ в обоих случаях отрицателен. С другой стороны, если, как обычно, определить ортогональный оператор как (алгебраический) изоморфизм гильбертовых пространств, сохраняющий скалярное произведение, то всякий такой оператор непрерывен. Затем мы изучаем спектральные свойства некоторых симметрических операторов в неархимедовых гильбертовых пространствах.

Работа состоит из разделов с определениями, введением, основной частью, заключением и списком литературы.

В первом разделе работы рассматриваются неархимедовы аналоги ортогональных и симметрических операторов, а также основные понятия. Во втором разделе рассматриваются скалярные произведения, мажорантные нормы и мажорантные топологии. В третьем разделе описываются неархимедовы гильбертовы пространства и то, как задаются некоторые из них. Четвёртый раздел посвящён ортогональным операторам в конечномерных гильбертовых пространствах. В пятом разделе рассматриваются бесконечномерный случай гильбертовых пространств, ортогональные операторы и операторы, сохраняющие скалярное произведение. В данной работе описываются p-адичнозначное гауссово интегрирование и пространства функций, интегрируемых с квадратом. Шестой раздел посвящён изучению спектра p-адического оператора. Седьмой раздел освещает практическую часть работы, который включает в себя алгоритм построения полиномов Эрмита и результаты выполнения программы.

Раздел 1. Неархимедовы аналоги ортогональных и симметрических операторов

Определение 1. *Пусть X – множество и $\mathfrak{U}$–совокупность его подмножеств, удовлетворяющая условиям*

1) $\oslash \in \mathfrak{U}, X \in \mathfrak{U}$;

2)пересечение двух множеств из $\mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$;

объединение любой совокупности множеств из $\mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

Такая совокупность $\mathfrak{U}$ подмножеств называется топологией на X. Множество X вместе с $\mathfrak{U}$ называется топологическим пространством и обозначается $(X;\mathfrak{U})$, или просто X.

Определение 2. *Линейный оператор $A : X \to X$, действующий в n-мерном евклидовом пространстве X называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение $(x, y) = (Ax, Ay) \forall x, y \in X$.*

Определение 3. *Неархимедово гильбертово пространство – это тройка, $(E, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$, где E – неархимедово банахово пространство с нормой $\|\cdot\|, (\cdot,\cdot)$ скалярное произведение на E, причем норма и скалярное произведение связаны неравенством Коши-Буняковского-Шварца.*

Рассмотрим непустое множество X. Функция d, определенная на множестве всех упорядоченных пар (x, y) элементов X и принимающая неотрицательные вещественные значения $d(x, y)$, называется расстоянием (метрикой) в X, если она обладает следующими свойствами:

1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ для всех $z \in X$.

Множество X вместе с заданной в нем метрикой d называется метрическим пространством.

Раздел 2. Скалярные произведения и мажорантные нормы

Обозначим через K полное неархимедово поле с нетривиальным нормированием $|\cdot|_K$ (т.е. выполняется сильное неравенство треугольника $|x+y|_K \leq max(|x|_K, |y|_K)$). Положим $U_r(a) = \{x \in K : |x - a|_k \leq r\}, U_{\overline{r}}(a) = \{x \in K : , |x-a|_k = r\}, r \in \mathbb{R}_+$. Это шары в K. Положим $S_r(a) = \{x \in K : |x-a|_k = r\}$. Это сферы в K.

Поле p-адических чисел обозначается через Q_p, а поле комплексных p-адических чисел (пополнение алгебраического замыкания Q_p^a поля Q_p) через C_p. Группа значений поля K определяется как $|K| = \{|x|_K : x \in K, x \neq 0\}$. Пусть $X - K$ – линейное пространство. Топология на X называется *частично мажорантной* для скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$, если форма $(\cdot, \cdot)$ непрерывна по каждой переменной; τ называется *мажорантной*, если $(\cdot, \cdot)$ непрерывна.

Обозначим пространство линейных функционалов на X через X (алгебраически двойственное пространство), а пространство непрерывных линейных функционалов – через X' (топологически двойственное). На X' рассмотрим норму

$$\|f\| = sup\left\{\frac{|f(x)_k|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\}.$$

Всякое скалярное произведение порождает канонический линейный оператор $h : X \to X^*, h(y)(x) = (y, x)$. Очевидно, топология τ на X частично мажорантна тогда и только тогда, когда $h(X) \subset X'$. Топология τ называется допустимой, если $h(X) = X'$, т.е. если всякий непрерывный линейный функционал реализуется с помощью скалярного произведения. В этом случае пространство X называется *автодуальным.*

Раздел 3. Неархимедовы гильбертовы пространства

Определение 4. Гильбертовым пространством называется бесконечномерное евклидово пространство, полное относительно нормы, задаваемой скалярным произведением: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Его мы обычно будем обозначать буквой H.

Определение 5. Пусть A – ограниченный оператор в H. Если оператор B таков, что $(Ax, y) = (x, By)$ для всех $x, y \in H$, то B называется сопряжённым к A и обозначается $A*$. Если $A = A*$, то A называется самосопряжённым.

Определение 6. Неархимедово гильбертово пространство – это тройка $(E, \|\cdot\|, (\cdot, \cdot))$, где E - неархимедово банахово пространство с нормой $\|\cdot\|, (\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение на E, причем норма и скалярное произведение связаны α неравенством Коши-Буняковского-Шварца.

Таким образом, топология, определенная на E нормой $\|\cdot\|$, является мажорантной для скалярного произведения. Всякая мажорантная банахова топология на E совпадает с топологией, порожденной $\|\cdot\|$.

Определение 7. Слабая топология на неархимедовом гильбертовом пространстве $(E, \|\cdot\|, (\cdot, \cdot))$ – это локально выпуклая топология, заданная системой неархимедовых полунорм $\{p_y : y \in E\}$, где $p_y(x) = |(x, y)|_K, x, y \in E$.

Обозначим эту топологию через $\sigma_0(E)$. Если E – автодуальное пространство, то слабая топология $\sigma_0(E)$ совпадает с обычной слабой топологией $\sigma_0(E, E')$. Напомним, что слабая топология $\sigma_0(E, E')$ определяется системой полунорм $\{p_y : y \in E'\}$, где $p_y(x) = |y(x)|_K$. Однако в общем случае свойства этих топологий различны.

Рассмотрим пространство последовательностей, сходящихся к нулю:

$$c_0 \equiv c_0(K) = \{x = (x_j) \in K^\propto : \underset{j\to\propto}{lim} x_j = 0\},$$

с нормой $\|x\| = max_j|x_j|$ и скалярным произведением $(x, y) = \sum_{j=1}^{\propto} x_j y_j$. Тройка $(C_0(K), \|\cdot\|, (\cdot, \cdot))$ является неархимедовым гильбертовым пространством.(Норма этого пространства автополярна).

Это пространство называется *каноническим координатным гильбертовым пространством.*

Оно неавтодуально, и $c_0' = l_\propto$, где $l_\propto$ – пространство ограниченных последовательностей в K. Положим $e_n = (\delta_{kn})_{k=1}^{\propto} = 0$ (канонический базис пространства c_0). Эта последовательность $\sigma_0(c_0)$ - сходится к нулю, но не сходится. Таким образом, в этом случае $\sigma_0 < \sigma$.

Сепарабельное гильбертово пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ изоморфно каноническому координатному гильбертову пространству

$l_2\mathbb{R} = \{f = (f_j) \in \mathbb{R}^\infty$: ряд $\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} f_3^2$ сходится в $\mathbb{R}\}$.

Очевидно, что каноническое координатное гильбертово пространство над K можно определить тем же способом:

$c_0(K) \equiv l_2(K) = \{f = (f_j) \in K^\infty$: ряд $s_2(f) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j^2$ сходится в $K\}$ $= \{f = (f_j) \in K^\infty : \underset{j\to\propto}{lim} f_j = 0\}$.

Другое понятие ортогональности, а именно ортогональность относительно нормы, играет существенную роль в теории неархимедовых нормированных пространств. Пусть X – нормированное пространство. Система векторов $\{a_i\}_{i\in I}$ называется ортогональной, если

$$\|\sum_{i\in a}\lambda_i a_i\| = \underset{i\in a}{max}|\lambda_i|_K\|a_i\|$$

для каждого конечного множества $A \subset I$ и каждого набора $\{\lambda_i\}_{i\in A} \in K$. Если к тому же $\|a_n\| = 1$ для всех n, то система называется *ортонормальной.*

Пусть $(E_j, \|\cdot\|_j, (\cdot,\cdot)_j), j = 1, 2,$ – два неархимедовых гильбертовых пространства, и пусть L – плотное подпространство в E_1. Линейный оператор $V : L \to E_2$ называется *сохраняющим скалярное произведение*, если $(V_x, V_y) = (x, y)$ для всех $x, y \in L$. Как обычно, область определения L линейного оператора A обозначается через $DomA$, а его образ через ImA.

Следующий результат очевиден.

Предложение 1. Всякий IP -оператор инъективен.

Является ли всякий IP - оператор V изометричным на $DomV$, т.е. верно ли, что $\|V_x\| = \|x\|$ для всех $xEDomV$? Покажем, что ответ отрицателен. Следующий естественный вопрос: обязательно ли V непрерывный оператор?

Ответ также отрицателен. Пространство непрерывных линейных операторов $A : E_1 \to E_2$ обозначается через $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Как и во бычной теории вещественных гильбертовых пространств, IP-оператор называется ортогональным, если $DomV = E_1$ и $ImV = E_2$. Обозначим множество ортогональных операторов через $O(E_1, E_2)$, а множество изометрических операторов – через $I(E_1, E_2)$. Используем обозначения $\mathcal{L}(E)O(E), I(E)$ для соответствующих пространств операторов, действующих на гильбертовом пространстве E. Покажем, что $O(E_1, E_2) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$, но, вообще говоря, $O(E), I(E) \not\subset I(E_1, E_2)$. Если гильбертово пространство E конечномерно, то, разумеется, всякий IP-оператор ортогонален.

Два гильбертовых пространства $(E_j, (\cdot, \cdot)_j, \| \cdot \|_j), j = 1, 2$, называются *изоморфными*, если существует $V \in O(E_1, E_2) \cap I(E_1, E_2)$.

Примеры неархимедовых гильбертовых пространств.

1.*Пространства Калиша.* Г.К.Калиш ввел гильбертовы пространства над полным сепарабельным неархимедовым полем , нормирование которого удовлетворяет следующим условиям:

(K1) $|2|_K = 1$;

(K2) всякий элемент $x \in K$ с $|x|_K = 1$ (единица поля K) имеет квадратный корень в K.

Последнее условие очень ограничительно. В частности, Q_p и его квадратичные расширения неудовлетворяют этому условию. Интересный пример неархимедова поля, удовлетворяющего этому условию, это C_p. Неархимедово гильбертово пространство Калиша удовлетворяет некоторым специальным условиям:

(K3) E сепарабельно;

(K4)выполняется неравенство Коши-Буняковского-Шварца(2);

(K5) $\|E\| \subset |K|$;

(K6) для всякого $x \in E$ существует $x' \in E, x' \neq 0$ такой, что $(x, x')_K = \|x\|\|x'\|$.

Гильбертово пространство Калиша изометрично каноническому координатному гильбертову пространству.

2. *Пространства Спрингера.* Т.Спрингер ввел класс гильбертовых пространств над полями K характеристики, отличной от 2, в которых скалярное произведение удовлетворяет условию

$$(S_p)(x,x) = 0 \to x = 0.$$

В частности, это условие влечет, что неравенство Коши-Буняковского-Шварца выполняется с $\alpha a = 1/|2|_K$. Норма на гильбертовом пространстве Спрингера определяется как $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

3. *Пространства ван дер Пута.* Пусть E -неархимедово банахово пространство, и пусть существует линейный гомеоморфизм $h : E \to E'$ такой, что $h' \circ j = h$. Здесь $h' : E'' \to E'$ –оператор, сопряженный к h, положим $(x,y) = h(x)(y)$ для $x, y \in E$. Это–билинейная форма, причем симметричная: $x, y = j(y)(h(x)) = h' \circ j(y)(x) = h(y)(x) = (y,x)$. Она невырождена и удовлетворяет неравенству Коши-Буняковского-Шварца с константой $\alpha = \|h\|$.

4. *Пространства Трайбера и Владимирова-Воловича.* Трайбер предполагает, что должен существовать базис v_n, ортонормальный относительно нормы и скалярного произведения. Следовательно, его гильбертовы пространства изоморфны $l_2(K)$. Определение Трайбера - самое полезное для приложений к p-адической квантовой физике. На самом деле эта модель неархимедова гильбертова пространства была независимо предложена Владимировым и Воловичем как основа для p-адично значного квантования.

5. *Пространства Хренникова.* Для последовательности $\lambda = (\lambda_n) \in K^\infty, \lambda_n \neq 0$, положим

$$l_{2,\lambda}(K) = \{f = (f_n) \in K^\infty \text{ряд} \sum f_n^2 \lambda_n \text{сходится в} K).$$

Имеем

$$l_{2,\lambda}(K) = \{f = (f_n) \in K^\infty \text{ряд} \lim_{n\to\infty} |f_n|_p sqrt|\lambda_n|_p = 0\}.$$

В пространстве $l_{2,\lambda}(K)$ введем норму $\|f\|_\lambda = max_n |f_n|_p sqrt|\lambda_n|_p$ и скалярное произведение $(f,g)_\lambda = \sum f_n g_n \lambda_n$. Имеет место неравенство Коши-Буняковского–Шварца. Тройка $l_{2,\lambda}(K), \|\cdot\|_\lambda, (\cdot,\cdot)_\lambda)$ есть неархимедово гильбертово пространство (координатное гильбертово пространство). Тройка

$(E\|\cdot\|,(\cdot,\cdot))$ называется KH–гильбертовым пространством, если оно изоморфно координатному гильбертову пространству для некоторого λ . Отношение изоморфности разбивает семейство всех КН-гильбертовых пространств на классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности описывается некоторым координатным представителем $l_{2,\lambda}$. Классификация всех KH–гильбертовых пространств – нерешенная математическая задача.

Раздел 4. Ортогональные операторы в конечномерных гильбертовых пространствах

Рассмотрим конечномерное гильбертово пространство $E_m = K_m$, где $(x,y) = \Sigma_{j=1}^{m} x_j y_j$ и $\|x\| = max_{1\leq j\leq m}|x|_K$. Положим $e_j = (0...10...0)$, где 1 стоит на $j-m$ месте. Это канонический ортонормированный базис E_m. Обозначим через $L(E_m)$ пространство линейных операторов $A : E_m \to E_m$. Рассмотрим матрицу (a_{ij}) оператора $A \in L(E_m)$ в базисе e_j. Хорошо известно, что всякий оператор A непрерывен и $\|A\| = max_{i,j}|a_{ij}|_K$.

Теорема 1. Если $p = 2$ или $p = 3mod4$, то $O(E_2) \subset I(E_2)$. Если $p = 1mod4$, то $O(E_2) \not\subset I(E_2)$ и кроме того существуют ортогональные операторы со сколь угодно большой нормой.

Предложение 2. Если $p = 1mod4$, то существует $A \in O_Q(E_2)$ сколь угодно большой нормой.

Раздел 5. Операторы, сохраняющие скалярное произведение, и ортогональные операторы

Теперь рассмотрим бесконечномерный случай.

Теорема 2. В p-адическом гильбертовом пространстве $c_0(\mathbf{Q}_p)$ существуют разрывные IP-операторы.

Предложение 3. Если сужение скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_2$ на замыкание образа $\overline{ImA}$ невырождено (например, если $\overline{ImA}$ замкнут или $(ImA)^{\perp} = \{0\}$, то отображение A непрерывно.

Следствие 1. Всякий ортогональный оператор непрерывен.

Можно показать, что гауссово распределение является непрерывным линейным функционалом на пространстве аналитических функций $\mathcal{A}(\mathcal{U}_r)(\tau >$

θ_b), т.е. аналитической обобщенной функцией (распределением). Будем использовать знаки нтеграла для обозначения формы двойственности между пространством пробных функций $\mathcal{A}(\mathcal{U}_r)(\tau > \theta_b)$ и пространством обобщенных функций $\mathcal{A}'(\mathcal{U}_r) : (\mu, f) \equiv \int f(x)\mu(dx)$ для $f \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_r)$ и $\mu \in \mathcal{A}'(\mathcal{U}_r)$. Как обычно, определим производную от обобщенной функции μ равенством

$$\int f(x)\mu'(dx) = -\int f'(x)\mu(dx).$$

Следует отметить, что распределение ν_b не является ограниченной мерой ни на каком шаре из $\mathbf{Q}_p$. Таким образом, не можем интегрировать произвольные непрерывные функции относительно p-адического гауссова распределения.

Введем теперь аналог полиномов Эрмита на:

$$H_{n,b} = \frac{n!}{b^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k x^{n-2k} b^k}{k!(n-2k)!2^k} \tag{1}$$

Из(5.6) можно получить стандартную рекуррентную формулу

$$H_{n+1,b(x)} = \frac{xH_{n,b}(x) - nH_{n-1}, b(x)}{b}. \tag{2}$$

Это показывает, что умножение гауссова распределения на полином Эрмита эквивалентно взятию соответствующей производной (в смысле теории распределений).

Всякий полином $f \in \mathcal{P}(K)$ однозначно записывается в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n H_{n,b}(x), N = N(f), f_n \in K.$$

Введем норму $\|f\|^2 = max_n |f_n|_K^2 \frac{|n!|_p}{|b|_p}$ и определим $L_2(K, \nu_b)$ как пополнение $\mathcal{P}(K)$ относительно $\|\cdot\|$. Ясно, что пространство $L_2(K, \nu_b)$ изоморфно следующему пространству формальных рядов от полиномов Эрмита:

$$\{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_{n,b}(x), f_n \in K : \text{ряд} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2 n!}{b^n} \text{сходится}.$$

Раздел 6. Спектр p-адического оператора координаты

Будем использовать такие обозначения: если $x, y \in \mathbf{Q}_p$ и $|x|_p = |y|_p$, то будем писать $x \sim y$ в $\mathbf{Q}_p$. Если x, y – натуральные числа, то $x \sim y$ означает, что x и y делятся в точности на одну и ту же степень p.

Определим резольвентное множество $\mathbf{Q}_p$ -линейного ограниченного оператора $A \in \mathcal{L}(L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b))$:

$$Res(A) = \{\lambda \in \mathbf{Q}_p : \text{существует ограниченный оператор}(A - \lambda I)^{-1}\},$$

а также спектр A : $Spec(A) = \mathbf{Q}_p\ Res(A)$. Очевидно, $\mathbf{Q}_p\ \mathcal{U}_{\alpha_b} \subset Res(\widehat{\mathbf{Q}})$. Значит, $Spec(\widehat{\mathbf{Q}}) \subset \mathcal{U}_{\alpha_b}$.

Теорема 3. Пусть $p \neq 2$. Тогда $\mathcal{U}_{\alpha_b} \subset \widehat{\mathbf{Q}}$.

Теорема 4. Если $p \neq 2$, то точечный спектр оператора координаты $\widehat{\mathbf{Q}}$ в $L_2(\mathbf{Q}, \nu_b)$ пуст.

Предложение 4. Точка $\lambda = 0$ не принадлежит точечному спектру оператора координаты $\widehat{\mathbf{Q}}$.

Лемма 1. Функция $g_{\lambda(x)} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m H_{2m,b}(x)$ не принадлежит пространству $L_2(\mathbf{Q}, \nu_b)$ для всех λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda|_p \geq \theta_b$.