МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Хордовое дифференциальное уравнение Лёвнера

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направления ***02.04.01 – Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Наумова Владислава Владимировича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н, профессор ____________________ Д. В. Прохоров
подпись, дата

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н, профессор ____________________ Д. В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное уравнение Лёвнера было открыто Чарльзом Лёвнером в 1923 году. С тех пор на протяжении многих лет дифференциальное уравнение Левнера служило мощным средством изучения свойств однолистных функций в единичном круге. Обнаруженные связи теории Левнера со многими разделами математики объясняют растущий интерес к ней в современных исследованиях. За это время появилось несколько видов этого уравнения, в частности: хордовое, радиальное и другие.

Данная работа будет посвящена изучению хордового уравнения Лёвнера. В первой главе приведены известные результаты в теории аналитических однолистных функций такие как: теорема площадей, теорема искажения и другие. Также, здесь определены и описаны понятия ёмкости множества и ёмкости полуплоскости, на которые в последствии и опирается изучение главного объекта работы.

Во второй главе речь идёт о хордовом уравнении Лёвнера и цепях Лёвнера. Здесь будет выведено хордовое уравнение Лёвнера, приведены некоторые оценки. Приведён частный вид хордового уравнения Лёвнера. Также здесь определено понятие цепи Лёвнера, приведены некоторые свойства и оценки, а также некоторые примеры цепей Лёвнера.

В третьей главе по пунктам рассмотрены некоторые различные варианты управляющих функций уравнения Лёвнера и описано поведение кривой особенностей (или кривой сингулярности) в зависимости от типа управляющей функции.

В четвёртой главе приведена самостоятельная часть работы, которая заключается в создании программы, которая решит хордовое дифференциальное уравнение Лёвнера с заданными начальными условиями и управлением и визуализирует его решение.

1 Конформные отображения

1.1 Односвязные области

Область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна, если $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ — связное подмножество сферы Римана $\widehat{\mathbb{C}}$. Эквивалентно, D односвязна если и только если область ограничена простой замкнутой кривой $\gamma : [a, b] \to D$, содержащейся в D, то есть «число кручения» при каждом $z \notin D$ γ равно нулю. В частности, если f голоморфная функция в D и γ — замкнутая C^1 кривая в D, тогда

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0. \tag{1.1}$$

Для любой f и любой фиксированной $z_0 \in D$ мы можем определить первообразную

$$F(z) = \int_\gamma f(z)\, dz,$$

где интеграл по любой C^1 кривой в D от z_0 до w; (1.1) показывает, что значение не зависит от выбора γ и легко видно, что $F(w) = f(w)$.

Лемма 1.1. *Если D — односвязная область, и f — голоморфная функция от D до $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, тогда существует голоморфная функция g на D такая, что $f = e^g$.*

Лемма 1.2 (Гурвица)**.** *Предположим, что последовательность взаимно однозначных аналитических функций в области D сходится к аналитической функции f. Тогда f либо константа, либо взаимно однозначна.*

Теорема 1.1 (Римана об отображении)**.** *Пусть D — односвязная область, отличная от $\mathbb{C}$, $w \in D$. Тогда существует единственное отображение $f : D \to \mathbb{D}$ с $f(w) = 0$, $f'(w) > 0$.*

Мы будем часто рассматривать инверсию функции, описанной выше, то есть если D — односвязная область и w — указанная точка в D, то существует единственное конформное отображение $f : \mathbb{D} \to D$ с $f(0) = w$, $f'(0) > 0$.

Определение 1.1. *Замкнутая кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ называется кривой Жордана, если она взаимно однозначна в $[a, b)$, то есть если γ — гомеоморфизм (круга) $[a, b]$ с определёнными a и b.*

Определение 1.2. *Ограниченная область D называется областью Жордана, если ∂D — кривая Жордана.*

Предложение 1.1. *Пусть D — замкнутая область с локально связной $\mathbb{C} \setminus D$. Пусть конформное отображение $f : \mathbb{D} \to D$ продолжается до непрерывного отображения из $\bar{\mathbb{D}}$ в $\bar{D}$. Тогда D — область Жордана если и только если f взаимно однозначна на ∂D.*

Предложение 1.2. *Если D, D' — области Жордана и z_1, z_2, z_3 и z_1', z_2', z_3' — точки на $\partial D, \partial D'$, соответственно, ориентированные против часовой стрелки, то существует единственное конформное отображение $f : D \to D'$, которое может быть продолжено до гомеоморфизма из $\bar{D}$ в $\bar{D}'$ такое, что $f(z_1) = z_1', f(z_2) = z_2', f(z_3) = z_3'$.*

1.2 Однолистные функции

Определение 1.3. *Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется однолистной, если она аналитична и взаимно однозначна в D.*

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество односвязных областей D, отличных от $\mathbb{C}$, содержащих начало координат. Если $A \in \mathcal{A}$, пусть $inrad(A)$ — инрадиус (с началом координат,) то есть $inrad(A) = dist(0, \partial A)$. Обозначим S^* множество однолистных функций f в $\mathbb{D}$ с $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$. Теорема Римана об отображении говорит, что взаимно однозначное соответствие между S^* и $\mathcal{A}$ даёт $f \leftrightarrow f(\mathbb{D})$. Другими словами, исследование односвязных областей сводится к исследованию однолистных функций в $\mathbb{D}$.

Обозначим S множество функций $f \in S^*$ с $f'(0) = 1$ и обозначим $\mathcal{A}_1$ соответствующее подмножество $\mathcal{A}$. Любая $f \in S$ имеет разложение в 0.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Компактный халл K является компактным связным подмножеством $\mathbb{C}$ большим одной точки такой, что $\mathbb{C} \setminus K$ связно. Для любого компактного халла существует единственное конформное отображение $F_K = \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \setminus K$ такое, что $\lim_{z\to\infty} \dfrac{F_K(z)}{z} > 0$. На самом деле, если $0 \in K$, $F_K(z) = \dfrac{1}{f_K\left(\dfrac{1}{z}\right)}$, где f_K —

конформное отображение $\mathbb{D}$ (см. рисунок **??**) с (логарифмической) ёмкостью $cap(K) = 0$, $cap(K) = -\log f_K'(0) = \log \left[\lim_{z\to\infty} \frac{F_K(z)}{z}\right]$.

Пусть $\mathcal{H}^*$ — множество компактных халлов и пусть $\mathcal{H}$ — множество компактных халлов, содержащих начало координат. Пусть $\mathcal{H}_0^*$, $\mathcal{H}_0$ — множества халлов K в $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{H}$, соответственно, с $cap(K) = 0$. Если $K \in \mathcal{H}_0^*$, тогда F_K имеет разложение Лорана

$$F_K(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Также, $f_K \in S$ если и только если $K \in \mathcal{H}_0$.

Лемма 1.3. *Если $f \in S$, тогда существует нечётная функция $h \in S$ такая, что для каждого $z \in \mathbb{D}$, $h^2(z) = f(z^2)$.*

Предложение 1.3. *Для каждого $0 < r < 1$, существует $C_r < \infty$ такая, что если $f \in S$ и $|z| < r$, то $|f(z) - z| \leqslant C_r|z|^2$. (Фактически оптимальная C_r — $\frac{2-r}{(1-r)^2}$).*

1.3 Ёмкость

В предыдущем разделе мы определили ёмкость компактного халла K через $F_K(z) \sim e^{cap(K)}z$, $z \to \infty$, где F_K — конформное отображение $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ на $\mathbb{D} \setminus K$ такое, что $\lim_{z\to\infty} \frac{F_K(z)}{z} > 0$. Если $w \in \mathbb{C}$, $a > 0$, то

$$F_{K+w}(z) = F_K(z) + w, \quad F_{aK}(z) = aF_K(z),$$

и, следовательно, $cap(K + w) = cap(K)$, $cap(aK) = cap(A) + \log a$. Также $cap(\overline{\mathbb{D}}) = 0$. Здесь мы обсудим некоторые свойства и эквивалентные определения ёмкости. Пусть $g_K = F_K^{-1}$ и, как прежде, пусть $f_K(z) = \frac{1}{F_K\left(\frac{1}{z}\right)}$, чтобы $f_K'(0) = e^{-cap(K)}$. В особенности, $f_K \in S$ если только если $K \in \mathcal{H}_0$. Для любого халла K, пусть $rad(K) = \sup\{|z| : z \in K\}$, то есть $rad(K)$ — радиус наименьшего круга с центром в начале координат, содержащего K.

Предложение 1.4. *Если $K_1, K_2 \in \mathcal{H}$ с $K_1 \subset K_2$, тогда $cap(K_1) \leqslant cap(K_2)$. Неравенство строгое, если $K_1 = K_2$.*

Предложение 1.5. *Если* $K \in \mathcal{H}_0$, *то* $1 \leqslant rad(K) \leqslant 4$. *Аналогично,* $[-4, 0] \in \mathcal{H}_0$.

Если
$$f_K(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$
и мы положим, что $w = \dfrac{1}{z}$, тогда
$$F_K(w) = \frac{1}{f_K\left(\dfrac{1}{w}\right)} = w + b_0 + b_1 w^{-1} + \ldots = w - a_2 + (a_2^2 - a_3)w^{-1} + \ldots$$

Особенно, если $K \in \mathcal{H}_0$, то $|b_0| \leqslant 2$. Оценка в следующем предложении является аналогичной оценкой.

Предложение 1.6. *Существует* $c < \infty$ *такое, что для всех* $K \in \mathcal{H}_0$ *и всех* $|z| > 1$,
$$|F_K(z) - z| \leqslant c.$$

Предложение 1.7. *Существует* $c < \infty$ *такая, что если* $K \in \mathcal{H}$ *и* $|z| > 4e^{cap(K)}$, *то*
$$|\Phi_K(z) - \log|z| + cap(K)| \leqslant ce^{cap(K)}|z|^{-1}.$$

1.4 Ёмкость полуплоскости

Определение 1.4. *Пусть* $\mathbb{H} = \{x + iy : y > 0\}$ *— верхняя полуплоскость. Мы будем называть ограниченное подмножество* $A \subset \mathbb{H}$ *компактным* $\mathbb{H}$*—халлом если* $A = \mathbb{H} \cap \overline{A}$ *и* $\mathbb{H} \setminus A$ *односвязно.*

Обозначим через $\mathcal{Q}$ множество компактных $\mathbb{H}$—халлов. Для каждого $A \in \mathcal{Q}$ обозначим A^* замыкание $\{z : z \in A$ или $\overline{z} \in A\}$. Если A связно, то $A^* \in \mathcal{H}^*$.

Предложение 1.8. *Для каждого* $A \in \mathcal{Q}$ *существует единственное конформное отображение* $g_A : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{H}$ *такое, что*
$$\lim_{z\to\infty}[g_A(z) - z] = 0.[?]$$

Определение 1.5. *Если* $A \in \mathcal{Q}$, *то ёмкость полуплоскости (из бесконечности),* $hcap(A)$ *определяется следующим образом:*
$$hcap(A) = \lim_{z\to\infty} z[g_A(z) - z].$$

Другими словами,

$$g_A(z) = z + \frac{hcap(A)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \qquad z \to \infty.$$

Если $r > 0,\ x \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathcal{Q}$, то легко проверить, что

$$g_{rA(z)} = r g_A\left(\frac{z}{r}\right), \qquad g_{A+x}(z) = g_A(z-x) + x;$$

Следовательно,

$$hcap(rA) = r^2 hcap(A), \qquad hcap(A+x) = hcap(A).$$

2 Хордовое дифференциальное уравнение Лёвнера

2.1 Хордовое дифференциальное уравнение Лёвнера

В этом разделе мы покажем, что для каждой простой кривой γ, начинающейся из начала координат и остающейся в верхней полуплосткости, возникает непрерывная функция U_t на действительной оси.

Предположим, что $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ — простая кривая с $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ и $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$. Пусть для каждого $t \geqslant 0$ $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$, которая является односвязной подобластью в $\mathbb{H}$. Пусть $g_t = g_{\gamma(0,t]}$ — единственное конформное отображение из H_t в $\mathbb{H}$ такое, что $g_t(z) - z \to 0$ при $z \to \infty$ (См. рисунок 1)Тогда g_t имеет следующее разложение:

$$g_t(z) = z + \frac{b(t)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \to \infty,$$

где $b(t) = hcap\left(\gamma(0, t]\right)$. Пусть $f_t = g_t^{-1}$. Для каждого $s > 0$ пусть $\gamma^s(t) = g_s\left(\gamma(s + t)\right)$. Обратим внимание, что $hcap\left(\gamma^s(0, t]\right) = b(t+s) - b(s)$ (см. (3.8) [?].) Пусть $g_{s,t} = g_{\gamma^s(0,t-s]}$ такое, чтобы $g_t = g_{s,t} \circ g_s$.

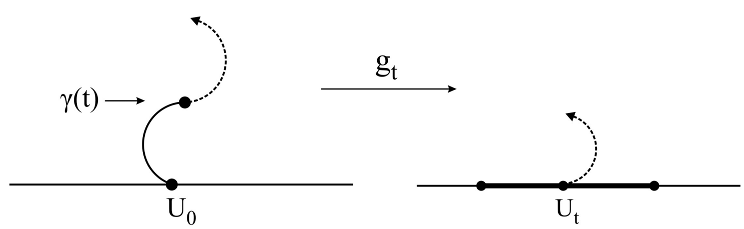

Рисунок 1 — Отображение g_t

Лемма 2.1. *Существует константа $c < \infty$ такая, что если γ — кривая, как сказано выше, и $0 \leqslant s < t \leqslant t_0$, тогда*

$$diam\left[g_s(\gamma(s, t])\right] \leqslant c\sqrt{diam\left(\gamma[0, t_0]\right) osc(\gamma, t - s, t_0)},$$

$$||g_s - g_t||_\infty \leqslant c\sqrt{diam\left(\gamma[0, t_0]\right) osc(\gamma, t - s, t_0)},$$

где

$$osc(\gamma, \delta, t_0) = \sup\left\{|\gamma(s) - \gamma(t)| : 0 \leqslant s, t \leqslant t_0; |t - s| \leqslant \delta\right\}$$

и $g_s - g_t$ рассматривается как функция в H_t.

Лемма 2.2. *Если δ — кривая, как сказано выше, то для каждого t существует единственная функция $U_t \in \mathbb{R}$ с $g_t(\gamma(t)) = U_t$, в смысле:*

$$\lim_{z \to \gamma(t)} g_t(z) = U_t, \tag{2.1}$$

где предел берётся по $z \in \mathbb{H} \setminus \gamma[0,t]$. Более того,

$$U_t = \lim_{s \to t-} g_s(\gamma(t)), \tag{2.2}$$

и $t \mapsto U_t$ непрерывна.

Лемма 2.3. *Предположим, что $u : [0, t_0) \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция такая, что правая производная*

$$u'_+(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{u(t+\varepsilon) - u(t)}{\varepsilon}$$

существует везде и $u'_+(t)$ — непрерывная функция по t. Тогда $u'(t) = u'_+(t)$ для всех $t \in (0, t_0)$.

Предложение 2.1. *Пусть γ — простая кривая, как описано выше, такая, что $b(t)$ C^1 и $b(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Тогда для $z \in \mathbb{H}$, $g_t(z)$ является решением задачи Коши*

$$\dot{g}_t(z) = \frac{\dot{b}(t)}{g_t(z) - U_t}, \qquad g_0(z) = z, \tag{2.3}$$

где $U_t = g_t(\gamma(t))$. Если $z = \gamma(t_0)$, то это справедливо для $t < t_0$ и

$$U_{t_0} = \lim_{t \to t_0-} g_t(z).$$

Если $z \notin \gamma(0, \infty)$, то равенство справедливо для всех $t \geqslant 0$.

Мы начали с кривой γ и нашли функцию $t \mapsto U_t$ на действительной оси. Теперь мы пойдём в обратном направлении и немного обобщим.

Теорема 2.1. *Пусть μ_t, $t \geqslant 0$ — однопараметрическое семейство неотрицательных мер Бореля на $\mathbb{R}$ такое, что $t \mapsto \mu_t$ непрерывна в слабой топологии, и для каждого t существует $M_t < \infty$ такая, что $\sup\{\mu_s(\mathbb{R}) : 0 \leqslant s \leqslant t\} < M_t$ и $supp \mu_s \subset [-M_t, M_t]$, $s \leqslant t$. Для каждого $z \in \mathbb{H}$, пусть $g_t(z)$ — решение задачи Коши*

$$\dot{g}_t(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_t(du)}{g_t(z) - u}, \qquad g_0(z) = z. \tag{2.4}$$

Пусть T_z — супремум по всем t таким, что решение существует до времени t с $g_t(z) \in \mathbb{H}$. Пусть $H_t = \{z : T_z > t\}$. Тогда g_t — единственное конформное отображение H_t в $\mathbb{H}$ такое, что $g_t(z) - z \to 0$ при $z \to \infty$. Более того, g_t имеет следующее разложение:

$$g_t(z) = z + \frac{b(t)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \qquad z \to \infty,$$

где

$$b(t) = \int\limits_0^t \mu_s(\mathbb{R})\, ds.$$

Определение 2.1. *Уравнение (2.4) называется хордовым (или полуплоскостным) дифференциальным уравнением Лёвнера.*

2.2 Цепи, генерируемые кривыми

Пусть $\gamma : [0, \infty) \to \overline{\mathbb{H}}$ — кривая с $\gamma(0) \in \mathbb{R}$. В каждый момент времени t пусть H_t — неограниченный компонент $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ и пусть $K_t = \mathbb{H} \setminus H_t$. Заметим, что H_t — односвязная область и что K_t (не обязательно строго) возрастающее семейство халлов в $\mathcal{Q}$. Если γ — простая кривая с $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$, то $K_t = \gamma(0, t]$ и халлы строго расширяются. Если γ — не простая кривая или $\gamma(0, \infty) \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$, то K_t может быть больше, чем $\overline{\bigcup\limits_{s<t} K_s}$, например, если $\gamma(t) = e^{i\pi t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то K_s — круговая дуга для $s < 1$, пока K_1 — верхняя половина круга. Более того, если мы положим $\partial_t = \partial H \cap \mathbb{H}$, то мы можем видеть, что ∂_t содержится в замыкании $\bigcup\limits_{s<t} K_s$. Чтобы увидеть это, обратим внимание, что если $B(z, \varepsilon) \bigcap \bigcup\limits_{s<t} \overline{K_s} = \varnothing$ и $\lim\limits_{s \to t-} [g_t(z)] = 0$, то неравенство Ханрака подразумевает, что $\lim\limits_{s \to t-} Im[g_s(w)] = 0$ для всех $w \in B(z, \varepsilon)$, который, в свою очередь, подразумевает, что $B(z, \varepsilon) \cap H_t = \varnothing$ и $B(z, \varepsilon) \cap \partial H_t = \varnothing$.

Лемма 2.4. *Если $t > 0$ и z — t-достижимая точка, то существует возрастающая последовательность $s_j \uparrow t$ и последовательность s_j-достижимых точек z_j с $z_t \to z$.*

Предложение 2.2. *Если $t > 0$ и z — t-достижимые точки, то существует больше одной t-достижимой точки. Также ∂_t заключена в замыкании множества s-достижимых точек для $s \leqslant t$.*

Предложение 2.3. *Пусть* g_t *— цепь Лёвнера с управляющей функцией* U_t *и пусть* $f_t(z) = g_t^{-1}(z)$, $\widehat{f}_t(z) = g_t^{-1}(z + U_t)$ *и* $V(y,t) = \widehat{f}_t(iy)$. *Предположим, что для каждого* t *предел*

$$\gamma(t) = \lim_{y \to 0+} \widehat{f}_t(iy) \tag{2.5}$$

существует, и функция $t \mapsto \gamma(t)$ *непрерывна, то есть пусть* V *непрерывна на* $[0,\infty) \times [0,\infty)$. *Тогда* g_t *— цепь Лёвнера, сгенерированная кривой* γ.

Предложение 2.4. *Пусть* g_t *— цепь Лёвнера такая, что для каждого* t $\overline{K}_t$ *локально связно. Тогда* g_t *генерируется кривой.*

Для оставшейся части раздела предположим g_t — цепь Лёвнера с управляющей функцией U_t, что генерируется по пути γ. Как прежде, для $s < t$ пусть $g_{s,t}$ определена с помощью $g_t = g_{s,t} \circ g_s$. Тогда для фиксированного $s \geqslant 0$ цепь Лёвнера $g_t^{(s)} = g_{s,s+t}$ имеет управляющую функцию $U_t^{(s)} = U_{s+t}$ и генерируется по пути $\gamma^{(s)}$, где $\gamma^{(s)}(t) = g_s(\gamma(s+t))$.

Лемма 2.5. *Пусть* g_t *генерируется кривой* γ. *Тогда* γ *— простая кривая с* $\gamma(0,\infty) \subset \mathbb{H}$ *если, и только если для всех* $s \geqslant 0$, $\gamma^{(s)}(0,\infty) \cap \mathbb{R} = \varnothing$.

3 Некоторые примеры частных решений дифференциального уравнения Лёвнера

3.1 Управляющая функция с квадратным корнем с неограниченным временем

Теперь рассмотрим случай, когда управляющая функция зависит от времени как функция квадратного корня. Рассмотрим функции вида:

$$U_t = C(1-t)^{\beta},\ U_t = Ct^{\beta},\ \beta = \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

Этот случай подразделяется на два варианта. В первом варианте управляющая функция имеет сингулярность при конечном значении времени и имеет место

$$U_t = 2[k(1-t)]^{\frac{1}{2}},\ t \leqslant 1,\ k \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Как будет показано далее, результат зависит от значения k. Например, далее мы покажем, что в случае критического значения $k = 4$ линия сингулярности пересекает действительную ось. В другой ситуации, управляющая функция в случае бесконечного времени подчиняется правилу

$$U_t = 2[kt]^{\frac{1}{2}},\ k \geqslant 0. \tag{3.3}$$

В этом случае $z_c(t)$ является просто прямой линией, что следует из условий масштабирования.

Сначала найдём решение для случая (3.3), так как этот случай более тривиален. Введём новую переменную $G = \dfrac{g}{t^{\frac{1}{2}}}$ и зададим $\tau = \ln t$. Тогда G удовлетворяет:

$$\frac{dG}{d\tau} = -\frac{G}{2} + \frac{2}{G2k^{\frac{1}{2}}} = \frac{(G-y_+)(G-y_-)}{2(2k^{\frac{1}{2}}-G)}, \tag{3.4}$$

где $y_{\pm} = k^{\frac{1}{2}} \pm (k+4)^{\frac{1}{2}}$. Отсюда следует, что

$$\frac{dG}{d\tau}\left[\frac{y_-}{G-y_+} - \frac{y_+}{G-y_-}\right] = \frac{1}{2}(y_+ - y_-). \tag{3.5}$$

Если мы положим

$$H(G) := \frac{2y_+\ln(G-y_-) - 2y_-\ln(G-y_+)}{y_+ - y_-}, \tag{3.6}$$

то $\dfrac{dH(G)}{d\tau} = -1$, которая интегрируется:

$$-H(G) = \tau + (z) = \ln t + c(z). \tag{3.7}$$

Константа $c(z)$ может быть определена исходя из наблюдения, что предел при $t \to 0$, тогда

$$H(G) + \ln t = \frac{2y_+ \ln\left(g - y_- t^{\frac{1}{2}}\right) - 2y_- \ln\left(g - y_+ t^{\frac{1}{2}}\right)}{y_+ - y_-}. \tag{3.8}$$

Следовательно наше решение для (3.7) относительно t становится простым

$$H\left(\frac{g}{t^{\frac{1}{2}}}\right) = 2\ln\left(\frac{z}{t^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{3.9}$$

Так как линия сингулярности определяется условием, что g эквивалентно управляющей функции, мы получаем

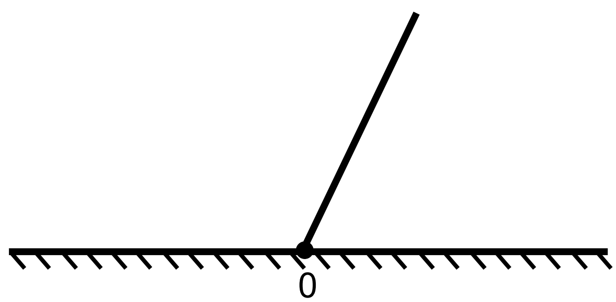

Рисунок 2 — Случай $U_t = 2\sqrt{t}$.

$$z_c(t) = Bt^{\frac{1}{2}}, \text{ где } B = \exp\left[\frac{1}{2}H\left(2k^{\frac{1}{2}}\right)\right]. \tag{3.10}$$

Более явно выражение для коэффициента B выглядит так

$$B = 2\left(\frac{(k+4)^{\frac{1}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}{(k+4)^{\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}\frac{k^{\frac{1}{2}}}{(k+4)^{\frac{1}{2}}}} \exp\left(\frac{1}{2}\pi i\left(1 - \frac{k^{\frac{1}{2}}}{(k+4)^{\frac{1}{2}}}\right)\right), \tag{3.11}$$

откуда следует, что линия сингулярности находится под углом к действительной оси со значением

$$\theta = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{k^{\frac{1}{2}}}{(k+4)^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{3.12}$$

Для $k = 0$ эта линия перпендикулярна вещественной оси, однако при $k \to \infty$ этот угол становится всё меньше и меньше.

4 Научно-практическое исследование

Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение Лёвнера:

$$\frac{dg_t}{dt} = \frac{2}{g_t - U_t}, \quad g_0 = z, \quad z \in \mathbb{H},$$

где $\mathbb{H}$ — верхняя полуплоскость. Известно, что если управляющая функция $U_t = 2\sqrt{t}$, то g_t отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ с разрезом по прямолинейному отрезку, исходящего из точки 0 под углом θ на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ (см. рисунок 3).

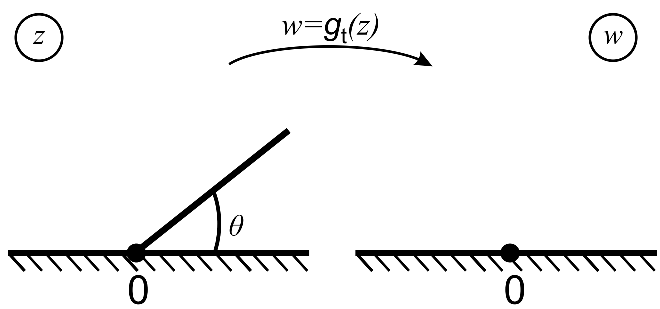

Рисунок 3 — Отображение верхней полуплоскости с прямолинейным разрезом под углом θ на верхнюю полуплоскость.

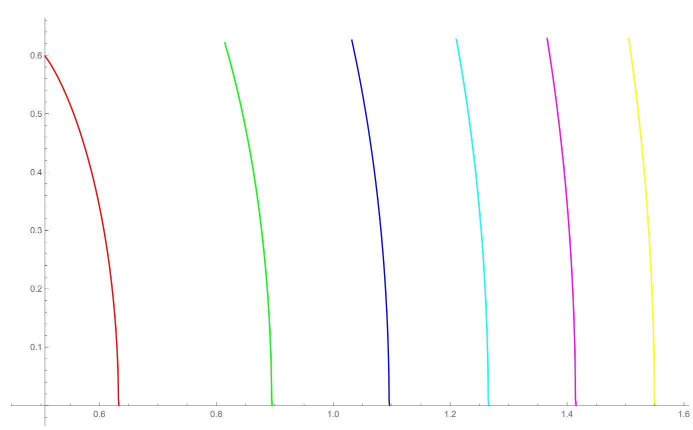

Рисунок 4 — Набор интегральных кривых при каждом $j = 1, 2, ..., n, \ n = 6$, полученный в результате работы программы.

Нужно построить набор интегральных кривых дифференциального уравнения Лёвнера.

Для решения данной задачи была написана программа в пакете Wolfram Mathematica 11, позволяющая визуализировать решения хордового дифференциального уравнения Лёвнера.

Итак, для каждого $j, ..., n,\ n = 6$ мы получили интегральную кривую $(u(t), v(t))$, $0 < t \leqslant T_j$, с начальным условием $(u(0), v(0)) = r\cos\theta, r\sin\theta$, которая соединяет точку $u(0), v(0)$ и точку на вещественной оси (см. рисунок 4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы изучили хордовое уравнение Лёвнера. Мы привели известные результаты в теории аналитических однолистных функций, определили и описали понятия ёмкости множества и ёмкости полуплоскости, вывели хордовое уравнение Лёвнера, привели некоторые оценки, также привели частный вид хордового уравнения Лёвнера. Определили понятие цепи Лёвнера, привели некоторые свойства и оценки, а также некоторые примеры цепей Лёвнера. А также, были перечислены наиболее часто встречающиеся, а также наиболее интересные примеры управляющих функций.

К самостоятельной части относится создание программы, позволяющей визуализировать решения уравнения Лёвнера с заданными начальными условиями и управляющей функцией. Таким образом мы численно нашли решения уравнения Лёвнера с заданными начальными условиями и управляющей функцией.