МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Однолистные отображения зубчатых областей

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки

механико-математичекого факультета

ЕЛИСТРАТОВОЙ МАРИИ АЛЕКСЕЕВНЫ

Научный руководитель
Доцент, к.ф.-м.н, доцент ____________________ Е.В. Разумовская
подпись, дата

Зав. кафедрой
Д.ф.-м.н, профессор ____________________ Д.В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2020

Введение

Актуальность работы. В данной работе изучаются конформные отображения однозубчатой плоской области на единичный круг и прямоугольник с точки зрения производной Шварца. Зубчатые области входят в более общую категорию областей, которую мы называем предзубчатой, которые помогают в изучении конформных отображений для зубов и описываются в деталях в этой работе.

Цель работы:

1) Подробно описать свойства однозубчатых областей.

2) Вывести формулу для рациональной функции производной Шварца.

3) Проанализировать функциональную связь между параметрами t *и* λ *соответствующей зубчатой области.*

4) Дать полное геометрическое описание предзубчатых областей.

5) Изучить конформное отображение единичной окружности и прямоугольника на зубчатую область.

6) Изучить отношение между Шварцианом единичного круга и прямоугольника.

7) Сформулировать алгоритмы для вычисления отображения единичного круга и прямоугольника на зубчатую область.

Описание структуры работы. Магистерская работа состоит из введения, содержания, шести глав, заключения, списка использованных источников, содержащего 29 наименований и приложения, в котором работа содержит 52 страницы и 10 иллюстраций.

Краткая характеристика материалов работы. Работа носит реферативный характер и основана на источниках, указанных в списке литературы. В некоторых теоремах и предложениях вычисления в доказательствах были восстановлены. В работе вычислены параметры зуба при определенных значениях t в программе Wolfram Mathematica и на их основе построена однозубчатая область с применением программы Geogebra.

Научная новизна и значимость работы.

Зубчатые области входят в более общую категорию областей, которую мы называем предзубчатой, которые помогают в изучении конформных отображений для зубов и описываются в деталях в этой работе. Такие области ограничены дугами окружностей. Один дополнительный параметр этих отображений естественно связан с конформным модулем зуба и первая цель работы - доказать несколько качественных результатов, связанных с основными оставшимися параметрами.

Положения, выносимые на защиту.

Описание однозубчатых областей, вывод формулы для $R_{t,\lambda}\ (z)$, анализ функциональной связи между параметрами t и λ, изучение конформного отображения прямоугольника на зубчатую область, изучение отношения между Шварцианом единичного круга и прямоугольника, отображение предзуба в зуб.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Раздел 1: Производная Шварца и дополнительные параметры.

В данном разделе изучение строится на рассмотрении ограниченной зубчатой области G с простым зубом, внутренними углами $\pi\alpha_i$ для i=1, 2, 3, 4, где $\alpha_1=\alpha_4=1/2$ и $\alpha_2=\alpha_3=3/2$. А соответствующие прообразы конформного отображения будут иметь вид: $z_1=e^{it1}$, $z_2=e^{it2}$, $z_3=e^{-it2}$, $z_4=e^{-it1}$, где $0<t_1<t_2<\pi$.

<u>Предложение 1.1</u> Чтобы $f(z)$ было однолистным отображением единичного круга на зубчатую область, удовлетворяющее условиям $f(0) = 0$ и

$f''(0) = 2f'(0)(\cos t_2 - \cos t_1)$, где прообразы $e^{\pm it_1}$ отображаются на вершины зуба с внутренним углом π/2, а прообразы $e^{\pm it_2}$на вершины зуба с внутренним углом 3π/2, необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{z^2 - 2z\,cos\,t_1 + 1}{z^2 - 2z\cos t_2 + 1}\right)^{1/2} f(z)$$

Кроме того, параметры β и γ определяются по следующим двум интегральным формулам:

$$\log\beta = \int_{t^1}^{t^2} \sqrt{\frac{\cos\theta - \cos t_2}{\cos t_1 - \cos\theta}}\,d\theta,\ \ \gamma = \int_{t^1}^{t^2} \sqrt{\frac{\cos\theta - \cos t_2}{\cos\theta - \cos t_1}}\,d\theta.$$

Исследование зубчатых областей будем основывать на производной Шварца S_f=((f''/f')'- $\frac{1}{2}$ (f''/f')^2), чтобы воспользоваться преимуществами богатой теории.

Пусть $D^* = \{|z| < 1\}$ - единичный круг. Для общего кругового многоугольника D с внутренними углами $\pi\alpha_i$ в вершинах w_k запишем

a_k=(1- α_i ^{2})^2/2. Пусть $f: D^* \rightarrow\ D$ - конформное отображение. Тогда производная Шварца S_f является рациональной функцией вида

$S_{f(z)} = z^{-2}\sum_{k=1}^{n}(\frac{a_k z_k z}{z - z_k)^\wedge 2} + ir_k\,\frac{z+z\_k}{z-z_k})$, где $z_k = f^{-1}(w_k) \in \partial D^*, (1 <\ k <\ n)$

вычеты D относительно отображения $f, r_k \in R^*$ - дополнительные параметры, которые удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = 0,\ \ \sum_{k=1}^{n} z_k(a_k + 2ir_k) = 0.$$

Для однозубчатых областей это формулируется следующим образом:

<u>Теорема 1.1</u> Пусть G - однозубчатая область и пусть $f: D^* \rightarrow\ D$ - конформное отображение. Предположим, что отображение единичного круга $f(z)$ симметрично относительно действительной оси. Тогда существуют единственные значения $t_1,\ t_2,\ \lambda\ \ (0 < t_1 < t_2 < \pi,\ \lambda \in R^*)$ такие, что производная Шварца S_f может быть представлена в виде

$S_f = R_{t_1,t_2,\lambda}$, где $\frac{1}{2} R_{t_1,t_2,\lambda}(z) = \psi_{0,(t_1,t_2)}(z) - \lambda \psi_{1,(t_1,t_2)}(z)$ с

$\psi_{1,(t_1,t_2)}(z) = \frac{4(\cos t_2 - \cos t_1)}{(z^2-(2\cos t_1)z+1)(z^2-(2\cos t_2)z+1)}$ и $\psi_{0,(t_1,t_2)}(z) = \frac{c_{40}z^4+c_{30}z^3+c_{20}z^2+c_{10}z+c_{00}}{(z^2-(2\cos t_1)z+1)(z^2-(2\cos t_2)z+1)^2}$

$$c_{00} = c_{40} = \frac{3\cos 2t_1 - 5\cos 2t_2 + 2}{8},$$

$$c_{10} = c_{30} = 3\sin^2 t_1 \cos t_2 - 5\cos t_1\, sin^2\, 2t_2$$

$$c_{20} = \frac{(\cos 2t_1)(11 - 2\cos 2t_2) - 13\cos 2t_2 + 4}{4}$$

Раздел 2: Конформный модуль звездообразной области

В этом разделе обсудим некоторые отношения между t, λ, β, γ. Сначала мы будем считать t фиксированным по следующей причине.
Конформный модуль $M(G_{\beta,\gamma}) > 0$для любых зубов или предзубов с прообразами $e^{\pm it}$ по определению является конформным модулем единственного конформного прямоугольника $(0, 1, 1+\tau, \tau)$ с $\tau\ = iM(t)$.

Так, мы можем записать $M(t) = M(G_{\beta,\gamma})$. Причем важно обратить внимание, что $\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{M(t)} = 0;\ \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \mathrm{M(t)} = \infty$.

Определение 2.1 Рациональная функция $R_{t,\lambda}$ называется зубообразной, если существует решение f уравнения $S_f = R_{t,\lambda}$, которое является однолистным отображением на зуб.

Предложение 2.1 Пусть $\gamma \in (0;\pi)$. Тогда для любого значения $t\epsilon(0;\pi/2)$ существует единственное значение $\beta < 1$ такое, что зуб $G_{\beta,\gamma}$ имеет конформный модуль $M(t)$.

Предложение 2.2 Пусть $\beta < 1$. Тогда существует значение $t_\beta \epsilon (0; \frac{\pi}{2})$, такое, что для любого значения $t \in (0, t_\beta)$ существует точно два значения γ, что $M(G_{\beta,\gamma}) = M(t)$ (для $t = t_\beta$ существует точно одно, а для $t > t_\beta$ нет ни одного)

Теорема 2.1 Для любого $t \epsilon (0; \pi/2)$ существуют постоянные λ^{-t}, λ^{+t} такие, что $R_{t,\lambda}$ - производная Шварца конформного отображения области D^* на зубчатую область тогда и только тогда, когда $\lambda^{-t} < \lambda < \lambda^{+t}$.

Раздел 3: Области зубчатости

Определение 3.1 Будем говорить, что область D предзубчатая, когда она является представлением $D = T(G)$ однозубчатой области G после преобразований Мёбиуса T.

Определение 3.2 Круговой четырехугольник называется вырожденным зубчатым(или предзубчатым), если он не является зубчатым(или предзубчатым), но при этом произвольно близок к нему.

Обычно вырожденный зуб является таким же, как и вырожденный предзуб. Вырожденные предзубья имеют жестко определенную структуру. Каждое ребро предзуба является круговым или ортогональным двум ребрам, находящимся рядом с ним, и ребра зуба лежат на окружностях $C^{\pm}$, которые пересекаются в двух точках. Это следует из того, что в вырожденных предзубах окружности $C^{\pm}$ могут быть касательными.

Определение 3.3 Областью, схожей с зубчатой называется подмножество ${R^*}^2$, которое определяется $G = (t, \lambda \colon R(t, \lambda))$, где $R(t, \lambda)$ производная Шварца зубчатого отображения.

Теорема 3.1 Пусть $0 < t < \pi/2$. Тогда экстремальные значения $\lambda \epsilon R^*$, для которой рациональная функция $R_{t,\lambda}$ зубообразная, даны формулами

$$\lambda_t^- = -\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(\cos t + \frac{1}{\cos t}),$$

$$\lambda_t^+ = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}(\cos t + \frac{1}{\cos t})$$

Более того R_{t,λ_t^+} , R_{t,λ_t^-} равны производной Шварца конформного отображения единичного круга на вырожденную предзубчатую область.

Раздел 4: Однозубчатые области

Здесь мы суммируем определения и факты из предыдущих глав, которые мы будем использовать в дальнейших рассуждениях.

Предложение 4.1 Пусть D - круговой четырехугольник, симметричный относительно R^*, не имеющий вершин на R^* и имеющий два внутренних угла, равных $\frac{\pi}{2}$ и 2 внутренних угла, равных $3\frac{\pi}{2}$. Предположим, что один зуб области D лежит в верхней полуплоскости, а другой в нижней.

(a) Область D будет предзубчатой тогда и только тогда, когда полные окружности C^+, C^-, содержащие зуб, пересекаются в двух точках.

(b) Область D является зубчатой тогда и только тогда, когда ребра зубов являются частью прямых или эквивалентно, если A- и B-арки являются концентрическими, то есть имеют общий центр.
В изучении круговых четырехугольников с двумя симметриями, отображения прямоугольников на четырехугольник были исследованы также хорошо, как и на единичный круг. Для вычислительных работ такое отображение имеет определенные преимущества перед отображениями на единичный круг, среди них тот факт, что определенная производная Шварца действительна на границе.

Пусть E - эллиптический интеграл: $E(z) = E_t(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z-e^{it})(z+e^{-it})(z+e^{it})(z-e^{-it})}}, \quad |z| < 1.$

Определим $\varphi_{\tau,\mu}(\zeta) = -4(\wp(\zeta + \frac{\omega\_1+\omega\_2}{2}) + \wp(\zeta + \frac{\omega\_1-\omega\_2}{2})) + 4\mu$.

<u>Предложение 4.1</u> Пусть $0 < t < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\tau}{i} > 0$ и пусть $f: D^* \to G$ и $g: R_0 \to G$ - конформные отображения с производной Шварца: $S_{f(z)} = R_{t,\lambda}(z)$, $S_g(\zeta) = \varphi_{\tau,\mu}(\zeta)$, соответственно. Предположим, что $g(\zeta) = f(z)$, где $\zeta = \frac{E(z)}{2}$. Тогда τ =iM(t) и $\mu = 16\lambda \cos t + \frac{3+\cos 2t}{6}$.

Раздел 5: Вычислительный алгоритм для единичного круга

Мы опишем здесь некоторые аспекты для отображения единичного круга D^* на зубчатые области. Аналогичные соображения применимы к отображениям, определенным для прямоугольника R_0. Для данного t и некоторого выбранного λ в пределах от λ^{-t} до λ^{+t}, применяем формулы, данные в этом разделе для получения отображения h, которое отображает центр начала координат в центр зуба.

Следовательно, мы готовы рассчитать значения для двух ветвей J_f в определенных граничных точках, которые могут быть получены отношениями:

$$f = \frac{y_2}{y_1}, \qquad f' = \frac{1}{y_1^2}, \qquad f'' = -\frac{2y_1'}{y_1^3},$$

Мы предполагаем, что $y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1$. Для этих целей мы ведем обсуждения вычисления по радиусу круга. Считаем фиксированным значения t_0. Когда мы пишем равенство, параметризуя вдоль радиуса из 0 в $z_0 = e^{it_0}$, это дает $\eta''(r) + e^{2it_0} R_{t,\lambda}\left(re^{it_0}\right)\eta(r) = 0$

с $\eta(r) = y(re^{it_0})$. Мы используем $t_0 = 0, \pi/2, \pi$, так как мы вычисляем значения f вдоль пути от 0 до *1,i,-1*.

Раздел 6: Вычислительная процедура для прямоугольника

Аналогично отображению на окружность, S_g может быть выражена в терминах решений обычного дифференциального уравнения.

$$2y''(\zeta) + \varphi_{\tau,\mu}(\zeta)y(\zeta) = 0$$

Два конкретных решения нормализованы по $J_{y_1}(0) = (1{,}0)$, $J_{y_2}(0) = (0{,}1)$. Частное $g_0 = \frac{y_2}{y_1}$, нормализованное по $J_{g_0}(0) = (0{,}1{,}0)$, как правило не имеет зуба.

Однако, если $\mu_\tau^- < \mu < \mu_\tau^+$, частное будет предзубом. Мы должны найти преобразование Мёбиуса, которое преобразует предзуб в зуб.

В этом разделе покажем численную реализацию для прямоугольника. Численно решаем это сначала вдоль действительного интервала $[0, \frac{\omega_1}{2}]$.

$J_{y_1}(\frac{\omega_1}{2}) = (b_1, b_1')$, $J_{y_2}(\frac{\omega_1}{2}) = (b_2, b_2')$.

Затем решаем начальную задачу

$$2u''(s) - \varphi\left(\frac{\omega_1}{2} + is\right)u(s) = 0, \qquad J_{u_1}(0) = (1{,}0), \qquad J_{u_2}(0) = (0{,}1)$$

для $t \in \left[0, \frac{|\omega_2|}{2}\right]$ $J_{u_1}(\frac{|\omega_2|}{2}) = (c_1, c_1')$, $J_{u_2}(\frac{\omega_2}{2}) = (c_2, c_2')$.

Это следует из того, что $y_1\left(\frac{\omega_1}{2} + is\right) = b_1u_1(s) + ib_1'u_2(s)$, $y_2(\frac{\omega_1}{2} + is) = b_2u_1(s) + ib_2'u_2(s)$, потому что левые и правые стороны определены идентичными начальными условиями. Оцениваем это на $s = \frac{|\omega_2|}{2}$ и получаем

$$J_{y_1}\left(\frac{|\omega_3|}{2}\right) = (b_1c_1 + ib_1'c_2, b_1'c_2', -ib_1c_1'),$$

$$J_{y_2}\left(\frac{|\omega_3|}{2}\right) = (b_2c_1 + ib_2'c_2, b_2'c_2', -ib_2c_1').$$

Приложение

Приведен код для вычисления динамики изменения зубчатых параметров.

t_1	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\pi/7$	$\pi/8$	$\pi/9$	$\pi/10$
t_2	$2\pi/3$	$2\pi/4$	$2\pi/5$	$2\pi/6$	$2\pi/7$	$2\pi/8$	$2\pi/9$	$2\pi/10$
β	5.3965	3.91876	3.08935	2.60014	2.28647	2.07117	1.9154	1.798
γ	2.64905	2.12679	1.75291	1.484	1.284	1.13031	1.00887	0.91065

Заключение

В данной работе были изучены конформные отображения звездообразных областей с одним зубом: звездообразное открытое множество в комплексной плоскости, ограниченной участками окружностей с центром в начале координат и отрезками двух линий, исходящих так же из начала координат. Описана структура зубчатых и предзубчатых областей показано, как основная теория конформного отображения круговых сегментов может быть использована в связи с геометрией этих областей с помощью вспомогательных параметров, описывающих конформное отображение.

В частности, мы выяснили, что конформный модуль является ключевым элементом для понимания вырождения этих областей. Чтобы численно вычислить зубчатую область, которая была описана и представлена, были найдены соответствующие отображения на себя, учитывая несколько параметров. Это равносильно тому, что была найдена точка, которая переводила себя в центр зуба. После решения уравнения производной Шварца были рассмотрены предзубы, это было необходимым для нахождения преобразований Мёбиуса, которые и отображали этот зуб.