МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Обобщенные в смысле С.Л. Соболева производные и некоторые теоремы вложения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Чехович Анастасии Владимировны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________ Л.В. Сахно

подпись, дата

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор ____________ Д.В. Прохоров

подпись, дата

Саратов 2020

Введение. Теория вложения пространств дифференцируемых функций многих действительных переменных сложилась как новое направление математики в 30-х годах 20-го века в результате работ советского математика Сергея Львовича Соболева и затем интенсивно развивалась многими математиками в различных направлениях. В данной теории изучаются важные связи и соотношения дифференциальных свойств функций в различных метриках, неравенства между различными производными, возможность продолжения функций за пределы областей их определения с сохранением свойств. Основным аппаратом являются интегральные представления функций и оценки различных интегральных операторов. Данная теория имеет множество существенных применений в теории дифференциальных уравнений с частными производными, результаты и методы имеют применение в математической физике.

Целями данной работы являются рассмотрение основных понятий об обобщенной в смысле С.Л. Соболева производной и рассмотрение вывода некоторых теорем вложения.

Дипломная работа разделена на несколько разделов. Первый раздел содержит в себе основную информацию об пространствах L_p, а также основные интегральные неравенства, которые используются в дальнейшем. В следующих разделах рассмотрим усреднение функций, обобщенные производные в смысле С.Л. Соболева и их свойства, интегральные представления дифференцируемых функций через их производные, а также введём область определения функций с условиями l-рога. Далее, основываясь на введённых ранее понятиях и утверждениях, изучим анизотропные пространства W_p^l, $l = (l_1, \dots l_n)$, и их свойства. В последнем разделе получим теорему вложения анизотропных пространств $W_p^l(G)$ в $L_q(G)$, обобщающую соответствующую классическую теорему вложения С.Л. Соболева. Затем рассмотрим вложение пространства $W_p^l(G)$ при несоответствии l типу области G, сформулированное в виде теоремы, и покажем необходимость неравенства в условии данной теоремы.

Основное содержание работы. Перед тем, как приступить к рассмотрению понятия обобщенной производной в смысле С.Л. Соболева и теорем вложения, необходимо ввести важные определения, а также свойства и утверждения, сформулированные в виде лемм и теорем. Для начала сформулируем основные свойства пространств $L_p(G)$, элементами которых являются вещественные функции $f(x)$, определенные на измеримом множестве $G \subset E^n$, где E^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Измеримость множеств будем понимать в смысле Лебега.

Определение 1. Пусть p – вещественное число, $1 \le p \le \infty$. Пространством $L_p(G)$ называется пространство вещественных, измеримых на G функций $f(x)$, для которых функция $|f(x)|^p$ интегрируема в смысле Лебега на G.

Число

$$\|f\|_{L_p(G)} = \|f\|_{p,G} = \left(\int\limits_G |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

называется нормой элемента $f \in L_p(G)$.

Укажем свойства пространств $L_p(G)$:

1) $\|f\|_{p,G} = 0$ эквивалентно $f(x) = 0$ почти для всех $x \in G$.
2) $\|cf\|_{p,G} = |c| \, \|f\|_{p,G}$.
3) $\|f_1 + f_2\|_{p,G} \le \|f_1\|_{p,G} + \|f_2\|_{p,G}$.
4) Пространство $L_p(G)$ – полное, т.е. если $f_k \in L_p(G)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\|f_k - f_l\|_{p,G} \to 0$ $(k, l \to \infty)$, то существует функция $f \in L_p(G)$ такая, что $\|f_k - f\|_{p,G} \to 0$ $(k \to \infty)$.

Определение 2. Функция $f \in L_p(G)$ называется непрерывной в целом в $L_p(G)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \|f(\cdot + y) - f\|_{p,E^n} < \varepsilon,$$

как только $|y| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2} < \delta$.

Теорема 1. *Всякая функция* $f \in L_p(G)$, $1 \le p < \infty$, *непрерывна (в целом) в* $L_p(G)$.

Определение 3. Множество S пространства $L_p(G)$ называется плотным в этом пространстве, если

$$\forall f \in L_p(G) \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \varphi_\varepsilon \in S \;\; \|\varphi_\varepsilon - f\|_{p,G} < \varepsilon.$$

Пусть G - открытое множество в E^n. Будем говорить, что $f(x) \in L_p^{loc}(G)$ при $x \in G$, если $f \in L_p(F)$ на любом компакте $F \subset G$. При $p = (1, \ldots, 1)$ будем обозначать такой класс $L^{loc}(G)$.

Далее рассмотрим основные интегральные неравенства для векторных $p = (p_1, \ldots, p_n)$, необходимые для дальнейших оценок.

Неравенство Гёльдера

При $1 \le p \le \infty\,,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

$$\int\limits_{E^n} |f_1(x)\, f_2(x)|\, dx \le \|f_1\|_p \, \|f_2\|_{p'}\,.$$

Неравенство Минковского

Если $1 \le p \le \infty\,,\ f_i \in L_p(E^n)$ $(i = 1, \ldots, m)$, то

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} f_i \right\|_p \le \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_p\,.$$

Обобщенное неравенство Минковского

Пусть $\varphi(x, y)$ - заданная на $E_x \times E_y$ измеримая функция, $1 \le p \le \infty$, тогда

$$\left\| \int\limits_{E_y} \varphi(\,\cdot\,,\, y)\, dy \right\|_{p,\, E_x} \le \int\limits_{E_y} \|\varphi(\,\cdot\,,\, y)\|_{p,\, E_x}\, dy. \tag{1}$$

Неравенство Юнга

Пусть $p = (p_1, \ldots, p_n)\,,\ q = (q_1, \ldots, q_n)$ и $r = (r_1, \ldots, r_n)$ такие, что

$$1 \le p \le q \le \infty \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

И пусть $f\,(x)$ и $K\,(x)$ - функции, заданные на E^n, причем $f \in L_p\,(E^n)$, $K \in L_r\,(E^n)$,

$$\mathscr{T}\,(x) = \int\limits_{E^n} f\,(y)\,K\,(y-x)\,dy.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|\mathscr{T}\|_q \le \|K\|_r \|f\|_p. \tag{2}$$

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую, финитную в E^n, функцию $K\,(x) \in C_0^\infty\,(E^n)$, которая удовлетворяет условию

$$\int\limits_{E^n} K\,(x)\,dx = 1.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,\ \lambda_i > 0\ \ (i = 1, \ldots, n)\,,\ \upsilon > 0$. Введем среднюю функцию

$$K_{\upsilon^\lambda}\,(x) = \upsilon^{-|\lambda|} K\left(x : \upsilon^\lambda\right).$$

Данная функция является бесконечно дифференцируемой на E^n, ее носителем является множество

$$S_{\upsilon^\lambda}\,(K) = \left\{x :\ \left(x : \upsilon^\lambda\right) \in S\,(K)\right\} \subset I_{\upsilon^\lambda}. \tag{3}$$

Пусть f – функция, определенная на измеримом множестве G пространства E^n. Положим $f = 0$ на $E^n \backslash G$ и пусть $f \in L^{loc}\,(E^n)$ на E^n.

Определим среднюю функцию для функции f с ядром усреднения K и параметром усреднения υ^λ следующим образом

$$f_{\upsilon^\lambda}\,(x) = \upsilon^{-|\lambda|} \int\limits_{E^n} f\,(x+y)\,K\left(y : \upsilon^\lambda\right) dy = \upsilon^{-|\lambda|} \int\limits_{E^n} f\,(y)\,K\left((y-x) : \upsilon^\lambda\right) dy.$$

Функция $f_{\upsilon^\lambda}(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка на E^n и для любого $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ($\alpha_i\geq 0$ –целые)

$$D_x^\alpha f_{\upsilon^\lambda}(x)=(-1)^{|\alpha|}\upsilon^{-|\lambda|-(\alpha,\lambda)}\int\limits_{E^n} f(y)\,D^\alpha K\left((y-x):\upsilon^\lambda\right)dy.$$

Лемма 1. *Если* $f\in L_p(G)$, $p=(p_1,\ldots,p_n)$, *то*

$$\|f_{\upsilon^\lambda}\|_p\leq\|K\|_1\|f\|_p\quad(1\leq p\leq\infty),$$

$$\lim_{\upsilon\to 0}\|f_{\upsilon^\lambda}-f\|_p=0\quad(1\leq p<\infty).$$

Замечание. Если $f\in L_p^{loc}(G)$, $1\leq p<\infty$, то $f_{\upsilon^\lambda}\to f$ в смысле $L_p^{loc}(G)$.

Лемма 2. *Если* G *– открытое множество пространства* E^n, $f\in L_p^{loc}(G)$, $p\geq 1$, *то*

$$\lim_{\upsilon\to 0}f_{\upsilon^\lambda}(x)=f(x)$$

почти для всех $x\in G$.

Определение 4. Пусть f и χ - локально суммируемые функции на открытом множестве $G\subset E^n$. Если для любой бесконечно дифференцируемой финитной в G функции φ справедливо равенство

$$\int\limits_G\chi(x)\,\varphi(x)\,dx=(-1)^{|k|}\int\limits_G f(x)\,\varphi^{(k)}(x)\,dx,$$

где $k=(k_1,\ldots,k_n)$ ($k_i\geq 0$ – целые), то χ называется обобщенной в смысле С.Л. Соболева производной функции f вида $f^{(k)}=D^kf=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$.

Лемма 3. *Пусть в области* G *заданы функция* $f\in L_p^{loc}(G)$, *последовательность функций* $f_j\in L_p^{loc}(G)$ $(j=1,\ldots)$, *которые имеют обобщенные производные* $f_j^{(k)}\in L_q^{loc}(G)$ $(j=1,\ldots)$, *где* $1\leq p\leq\infty$, $1\leq q\leq\infty$. *Если* $f_j\to f$ $(j\to\infty)$ *в смысле* $L_p^{loc}(G)$ *и* $\left(f_j^{(k)}-f_i^{(k)}\right)\to 0$ $(i,j\to\infty)$ *в смысле* $L_q^{loc}(G)$, *то* $f^{(k)}\in L_q^{loc}(G)$ *- обобщенная производная функции* f *на* G *и* $f_j^{(k)}\to f^{(k)}$ $(j\to\infty)$ *в смысле* $L_q^{loc}(G)$.

Замечание. Если в условиях леммы $f_j^{(k)} \in L_q(G)$ $(j = 1, \ldots)$ и $\left\| f_j^{(k)} - f_i^{(k)} \right\|_{q,\,G} \to 0$ $(i,\, j \to \infty)$, то $f^{(k)} \in L_q(G)$ и $\left\| f_j^{(k)} - f^{(k)} \right\|_{q,\,G} \to 0$ $(j \to \infty)$.

Далее приведем вывод интегральных представлений дифференцируемых функций. Для начала построим для локально суммируемой функции f ее среднюю функцию $f_{\upsilon^\lambda}(x) = f(x, \upsilon)$ с некоторым ядром Ω и параметром усреднения υ^λ, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – фиксированный вектор. Заметим, что усреднение $f(x, \upsilon)$ можно рассматривать как непрерывно дифференцируемую по υ $(\upsilon > 0)$ функцию.

Имеем интегральное представление

$$f(x) = f_{h^\lambda}(x) + \int_0^h \sum_{i=1}^n \upsilon^{-1-|\lambda|+l_i\lambda_i} d\upsilon \int_{E^n} D_i^{l_i} f(x+y) \mathscr{L}_i\left(y : \upsilon^\lambda\right) dy, \qquad (4)$$

которое справедливо почти для каждого $x \in U$, где U - множество, для которого имеет смысл правая часть указанного равенства.

Рассмотрим подробнее, что из себя представляет множество U. Перед этим заметим, что $supp\, \mathscr{L}_i \subset S(K)$, поэтому фактическое интегрирование в правой части равенства (4) проводится по точкам $y \in S(K, \lambda, h)$, где

$$S(K, \lambda, h) = \bigcup_{0<\upsilon\le h} S_{\upsilon^\lambda}(K)$$

– теоретико-множественная сумма множеств $S_{\upsilon^\lambda}(K)$, определенных соотношениями (3). Тогда получаем, что в правой части (4) используются значения функции f и ее производных в точках множества $x + S(K, \lambda, h)$.

Пусть функция f определена на G, тогда множество U можно представить в виде:

$$U = \{x : \, x \in G, \, x + S(K, \lambda, h) \subset G\}.$$

Правая часть равенства (4) будет иметь смысл для всех $x \in U$. Из предположения, что $f \in L^{loc}(G)$, на основании леммы 2 при $p = 1$, можно утверждать, что $f_{\varepsilon^\lambda}(x) \to f(x)$ при $\varepsilon \to 0$ почти везде на G, а следовательно, почти везде на U. Таким образом, равенство (4) справедливо для почти всех $x \in U$.

Положим $b > 0,\ a_i \neq 0\ (i = 1, \ldots, n)$,

$$S(K) \subset \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0,\ 1 < \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{1/\lambda_i} < 1 + b\ \ (i = 1, \ldots, n) \right\}.$$

Тогда $S(K, \lambda, h) \equiv V\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) =$

$$= \bigcup_{0 < v \le h} \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0,\ v < \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{1/\lambda_i} < (1 + b)v\ \ (i = 1, \ldots, n) \right\}.$$

Определение 5. Область $V\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ называется $\frac{1}{\lambda}$-рогом радиуса h и раствора b.

Далее часто будем считать, что $\lambda = \frac{1}{l}\ \left(\lambda_i = \frac{1}{l_i},\ i = 1, \ldots, n\right)$. В этом случае носителем интегрального представления (4) будет сдвинутый l-рог $x + V(l)$. При $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$ l-рог $V(l)$ является конусом.

Если для открытого множества $G \subset E^n$ существует конечное число K открытых множеств G_k и l-рогов $V_k(l) = V_k(l, h)$, так что при этом

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k = \bigcup_{k=1}^{K} \left(G_k + V_k(l, h)\right), \tag{5}$$

то будем говорить, что открытое множество G удовлетворяет слабому условию $l-$рога, и писать $G \in \underline{A}(l, h)$.

Если для открытого множества G выполнено условие (5) и

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k^{(\delta)} \quad \text{при некотором} \quad \delta > 0, \quad G_k^{(\delta)} = \{x : x \in G_k,\ \rho(x, \partial G_k \backslash \partial G) > \delta\},$$

то G удовлетворяет условию $l-$рога $(G \in A(l, h))$.

Если для открытого множества G выполнено условие (5) и

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k^{[\delta]} \quad \text{при некотором} \quad \delta > 0, \quad G_k^{[\delta]} = \{x : x \in G_k,\ \rho(x, G \backslash G_k) > \delta\},$$

то G удовлетворяет сильному условию $l-$рога ($G \in \bar{A}\,(l,h)$).

Очевидно, что $\underline{A}\,(l,h) \supset A\,(l,h) \supset \overline{A}\,(l,h)$.

Определение 6. Пусть G – открытое множество n-мерного евклидова пространства E^n, $l = (l_1, \ldots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами, $1 \le p \le \le \infty$. Через $W_p^l\,(G)$ обозначим пространство локально суммируемых на множестве G функций f, которые имеют на G обобщенные производные $D_i^{l_i} f\,(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^l(G)} = \|f\|_{p,\,G} + \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{p,\,G} = \|f\|_{p,\,G} + \|f\|_{L_p^l(G)}.$$

Рассмотрим основные свойства анизотропных пространств $W_p^l\,(G)$, сформулируем их в виде теорем.

Теорема 2. *Пространство* $W_p^l\,(G)$, $1 \le p \le \infty$, *является пространством Банаха.*

Теорема 3. *Пространство* $W_p^l\,(G)$, $1 \le p < \infty$, *сепарабельно.*

Через $\chi\,(G) = \chi\,(G;\,x)$ будем обозначать характеристическую функцию множества G. Пусть $U \subset E^n$ – открытое множество и функция $f\,(x)$ определена на множестве $U + V\,(l)$ и имеет на этом множестве обобщенные производные $D_i^{l_i} f \;(i = 1, \ldots, n)$.

Будем считать, что $\lambda = \frac{1}{l} = \left(\frac{1}{l_1}, \ldots, \frac{1}{l_n}\right)$. Тогда в силу (4) почти всюду на U

$$f\,(x) = f_{h^\lambda}\,(x) + \int\limits_0^h \sum_{i=1}^{n} \upsilon^{-|\lambda|} d\upsilon \int D_i^{l_i} f\,(x+y)\,\mathscr{L}_i\left(y : \upsilon^\lambda\right) dy,$$

здесь ядро усреднения и $\mathscr{L}_i$ принадлежат $C_0^\infty\,(E^n)$, а носителем данного представления служит рог $x + V\,(l)$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{f}\,(x) = (\chi\,(U+V)\,f)_{h^\lambda}\,(x) +$

$$+ \int\limits_0^h \sum_{i=1}^{n} \upsilon^{-|\lambda|} d\upsilon \int \chi\,(U+V;\,x+y)\, D_i^{l_i} f\,(x+y)\,\mathscr{L}_i\left(y : \upsilon^\lambda\right) dy.$$

Функция $\widetilde{f}(x)$ определена для всех $x \in E^n$. Из обобщенного неравенства Минковского (1) и неравенства Юнга (2) можно получить, что $\widetilde{f} \in L^{loc}(E^n)$ ($\widetilde{f} \in L_p^{loc}(E^n)$ при $p > 1$, $\frac{1}{p} > 1 - |\lambda|^{-1}$). При $x \in U$ правые части двух последних равенств совпадают, поэтому почти всюду на U $\widetilde{f}(x) = f(x)$. Таким образом, функция $\widetilde{f}$ - распространение функции f за пределы U на E^n. Причем $\widetilde{f}(x)$ не обязана совпадать с $f(x)$ вне U, т.е. на $(U+V)\backslash U$.

Лемма 4. *При $|\alpha : l| < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ и при $|\alpha : l| = 1$, $1 < p < \infty$ справедливо неравенство*

$$\left\|D^\alpha \tilde{f}\right\|_{p,\,E^n} \leq Ch^{1-|\alpha:l|} \sum_{i=1}^{n} \left\|D_i^{l_i} f\right\|_{p,\,U+V} + Ch^{-|\alpha:l|}\|f\|_{p,\,U+V},$$

где C не зависит от f и h.

Теорема 4. *Если G - открытое множество, удовлетворяющее слабому условию l-рога, то при $1 \leq p \leq \infty$, $|\alpha : l| < 1$ и при $1 < p < \infty$, $|\alpha : l| = 1$ имеет место вложение $D^\alpha W_p^l(G) \hookrightarrow L_p(G)$ и для $f \in W_p^l(G)$*

$$\|D^\alpha f\|_{p,\,G} \leq Ch^{1-|\alpha:l|} \sum_{i=1}^{n} \left\|D_i^{l_i} f\right\|_{p,\,G} + Ch^{-|\alpha:l|}\|f\|_{p,\,G} \leq C(h)\,\|f\|_{W_p^l(G)},$$

где при некотором $h_0 = h_0(G) > 0$, $0 < h < h_0$, C не зависит от h и f.

Теорема 5. *Если G – открытое множество, удовлетворяющее сильному условию l-рога, $1 < p < \infty$, то пространство $W_p^l(G)$ совпадает с сужением пространства $W_p^l(E^n)$ на G. При этом существует линейный ограниченный оператор распространения функций из $W_p^l(G)$* в *$W_p^l(E^n)$*

$$W_p^l(G) \ni f \to \tilde{f} \in W_p^l(E^n)\,, \quad \tilde{f}\,|_G = f.$$

Данная теорема позволяет изучение ряда свойств функций из пространства $W_p^l(G)$ свести к изучению соответствующих свойств функций из пространства $W_p^l(E^n)$, здесь аппарат исследований разработан полнее.

Далее рассмотрим теорему вложения анизотропных пространств $W_p^l(G)$ ($l = (l_1, \dots l_n)$) в $L_q(G)$, обобщающую соответствующую классическую теорему С.Л. Соболева. Будем считать, что открытое множество $U \subset E^n$,

$V(l) = V(l,h) = V$ – l-рог, функция $f(x)$ определена на множестве $U + V(l)$ и имеет на этом множестве обобщенные производные $D_i^{l_i} f \ (i = 1, \ldots, n)$.

Лемма 5. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$, $\varkappa = \left|\left(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) : l\right| \le 1$ *и при* $\varkappa = 1$ *либо* $1 < p = q < \infty$, *либо* $1 < p_n < q_n < \infty$, *либо* $1 = p_n < q_n = \infty$.

Тогда $D^\alpha W_p^l(U+V) \hookrightarrow L_q(U)$ *и для* $f \in W_p^l(U+V)$

$$\|D^\alpha f\|_{q,U} \le C_1 h^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^{n} \left\|D_i^{l_i} f\right\|_{p,U+V} + C_2 h^{-\varkappa} \|f\|_{p,U+V},$$

причем C_1 *и* C_2 *не зависят от* f *и* h, *а также* C_2 *не зависит от* q. *В левой части неравенства* $D^\alpha f$ *можно заменить на* $D^\alpha f_\varepsilon$ *при любом* $\varepsilon \in (0, h]$.

При $\varkappa < 1$

$$C_1 = C'_1 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{1-\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}} \left(\frac{1}{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}},$$

где C'_1 *не зависит от* q.

Теорема 6. *Пусть открытое множество* G *удовлетворяет слабому условию* l*-рога,* $1 \le p \le q \le \infty$, $\varkappa = \left|\left(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) : l\right| \le 1$ *и при* $\varkappa = 1$ *либо* $1 < p = = q < \infty$, *либо* $1 < p_n < q_n < \infty$, *либо* $1 = p_n < q_n = \infty$.

Тогда $D^\alpha W_p^l(G) \hookrightarrow L_q$; *точнее говоря, для* $f \in W_p^l(G)$ *существует на* G *обобщенная производная* $D^\alpha f \in L_q(G)$ *и существуют числа* $h_0 > 0$, $C > 0$ *такие, что*

$$\|D^\alpha f\|_{q,G} \le C h^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^{n} \left\|D_i^{l_i} f\right\|_{p,G} + C h^{-\varkappa} \|f\|_{p,G},$$

здесь постоянная C *не зависит от* f *и* $h \in (0, h_0)$. *В частности, если* $\alpha = 0$, *то* $W_p^l(G) \hookrightarrow L_q(G)$.

Ранее открытое множество G рассматривалось как множество, удовлетворяющее слабому условию l-рога, т.е. G являлось областью класса $\underline{A}(l, H)$. Теперь предположим, что открытое множество G удовлетворяет слабому условию s-рога, $s \ne l$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$.

Теорема 7. *Пусть* $f \in W_p^l(G)$, $G \in \underline{A}(s, H)$, $1 \le p \le q \le \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – *вектор с целочисленными неотрицательными компонен-*

тами,

$$\delta_i = \tfrac{l_i}{s_i} - \left(\alpha + \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q},\, \tfrac{1}{s}\right)\ (i = 1, \ldots, n)\,, \quad \delta = \min_i \delta_i \geq 0 \tag{6}$$

и при $\delta = 0$ *либо* $1 < p_n < q_n < \infty$, *либо* $1 = p_n < q_n = \infty$, *либо* $1 < p = = q < \infty$.

Тогда $D^\alpha W_p^l(G) \hookrightarrow L_q(G)$, *точнее говоря, для* $f \in W_p^l(G)$ *на* G *существует обобщенная производная* $D^\alpha f \in L_q(G)$ и

$$\|D^\alpha f\|_{q,\,G} \leq C\left(h^{-\delta_0}\|f\|_{p,\,G} + \sum_{i=1}^{n} h^{\delta_i}\left\|D_i^{l_i} f\right\|_{p,\,G}\right),$$

где $\delta_0 = \left(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q},\, \frac{1}{s}\right)$, h – *произвольное число из* $(0, H]$, C – *константа, которая не зависит от* f *и* h.

Замечание. Условия теоремы справедливы и для вектора cs, где c – произвольное положительное число. Так как, если $G \in \underline{A}(s, H)$, то $G \in \underline{A}(cs, H^c)$ $\forall\, c > 0$. А также из того, что неравенство из условия (6) сохраняется при умножении s на положительное число, так как δ_j $(j = 0,\, 1, \ldots, n)$ являются однородными функциями относительно s_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Отсюда следует, что можно рассматривать только такие классы областей, которые характеризуются векторами s, нормированными некоторым способом.

Заключение. В начале данной работы были введены в рассмотрение пространства L_p и основные интегральные неравенства. Далее были рассмотрены усреднение функций и изучены основные понятия и свойства обобщенной в смысле С.Л. Соболева производной. Затем рассмотрели вывод интегрального представления дифференцируемых функций через производные и изучили область определения функций с l-рогом. Наконец, на основании ранее введённых определений и утверждений сформулировали основные определения и свойства анизотропных пространств W_p^l. Доказали теорему вложения анизотропных пространств $W_p^l(G)$ в $L_q(G)$ и теорему вложения пространства $W_p^l(G)$ при несоответствии l типу области G и показали необходимость неравенства в условии данной теоремы.