МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

« САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО »

Кафедра математической физики
и вычислительной математики

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ГРАФАХ

АВТОРЕФЕРАТ НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
аспиранта 4 года обучения направление 01.06.01 - Математика и механика направленность «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» Васильева Сергея Владимировича

Научный руководитель
профессор, д.ф-м.н, профессор ______________________ В.А. Юрко
Зав. кафедрой
д.ф-м.н, профессор _________________________________ В.А. Юрко

Саратов - 2020 год

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена обратным спектральным задачам для оператора Штурма - Лиувилля с сингулярным потенциалом на графах. Обратные задачи спектрального анализа заключаются в определении операторов по некоторым их спектральным характеристикам. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и техники. Интерес к этой тематике постоянно увеличивается благодаря появлению все новых приложений, и в настоящее время теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире.

Наиболее полные результаты в спектральной теории дифференциальных операторов, и в частности в теории обратных задач, получены для дифференциального оператора Штурма - Лиувилля

$$\ell y := -y'' + q(x)y. \tag{1}$$

Первые исследования по спектральной теории операторов Штурма - Лиувилля были выполнены Д. Бернулли, Ж. Даламбером, Л. Эйлером, Ж. Лиувиллем и Ж. Штурмом в связи с решением уравнения, описывающего колебания струны. Интенсивное развитие спектральная теория для различных классов операторов получила в XX веке. Глубокие идеи здесь принадлежат Д. Бирхгофу, Г. Вейлю, Д. Гильберту, Д. Нейману, В.А. Стеклову, М. Стоуну и другим математикам. Что касается обратных спектральных задач, то основные результаты и методы здесь получены во второй половине XX века. Отметим работы Р. Билса, Г. Борга, М.Г. Гасымова, М.Г. Крейна, Б.М. Левитана, Н. Левинсона, З. Л. Лейбензона, В.А. Марченко, Л.А. Сахновича, Л.Д. Фаддеева, И.Г. Хачатряна, В.А. Юрко и других. Подробный обзор полученных результатов и библиографию см. в монографии В.А. Юрко[1]. Созданные методы позво-

[1]Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач, М.: Физматлит, 2007.

лили решить целый ряд важных прикладных задач в различных областях естествознания и техники. Отметим замечательный метод интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики, связанный с использованием обратных спектральных задач[2]. Много приложений связано также с обратными задачами для дифференциальных уравнений высших порядков, для систем дифференциальных уравнений, для дифференциальных уравнений с особенностями и точками поворота, для нелокальных операторов, для дифференциальных уравнений с нелинейной зависимостью от спектрального параметра, для дифференциальных уравнений на графах и для других классов обратных задач.

Наиболее полные результаты в теории обратных задач известны для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля (1). Первый результат в этом направлении принадлежит В.А. Амбарцумяну[3]. Он показал, что если собственные значения краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

суть $\lambda_k = k^2,\ k \geq 0,$ то $q = 0.$ Однако результат Амбарцумяна является исключением, и одного спектра, вообще говоря, недостаточно для однозначного определения потенциала $q(x)$. Впоследствии Г. Борг[4] доказал, что два спектра дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля с одним общим краевым условием однозначно определяют функцию $q.$ Важную роль в спектральной теории операторов Штурма-Лиувилля сыграл оператор преобразования. К решению обратных задач оператор преобразования первым применил В.А. Марченко[5]. Он доказал, что дифференциальный оператор (1), заданный на полуоси или конечном интервале, однозначно определяется заданием спектральной функции. Метод

[2]Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи, М.: Наука, 1980, 320 с.

[3]Ambarzumian V.A. Ueber eine Frage der Eigenwerttheorie, Zs.f.Phys. - 1929. - Vol. 53. - P. 690-695.

[4]Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Acta Math. - 1946. - Vol. 78. - P. 1-96.

[5]Марченко В.А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, I, Труды Моск. матем. общества, Т.1, 1952, С. 327-420.

оператора преобразования использовался и в фундаментальной работе И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана[6], в которой были получены необходимые и достаточные условия и метод восстановления дифференциального оператора Штурма-Лиувилля по его спектральной функции.

Большинство приложений обратных задач связано с восстановлением потенциала по функции Вейля или ее аналогам. Первым кто изучал обратные задачи по функциям Вейля был А.Н. Тихонов [7]. Задание функции Вейля равносильно заданию спектральной функции, однако обратная задача по функции Вейля и ее аналогам является более естественной как для оператора Штурма-Лиувилля, так и для других более сложных классов операторов. Метод оператора преобразования, сыгравший важную роль для классических операторов Штурма-Лиувилля, оказался неэффективным для других более сложных классов операторов. Более эффективным и универсальным является предложенный В.А. Юрко метод спектральных отображений[8], связанный с развитием идей метода контурного интегрирования и использованием аппарата теории аналитических функций. Этим методом, в частности, была построена теория решения обратных задач для дифференциальных операторов высших порядков

$$\ell_1 y := y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} q_k(x) y^{(k)}, \tag{2}$$

дифференциальных систем с произвольным расположением характеристических чисел, дифференциальных уравнений с особенностями и точками поворота, дифференциальных операторов на пространственных сетях и других классов операторов. При этом в качестве основных спектральных характеристик вводились и изучались объекты, являющиеся

[6]Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Известия АН СССР. Сер. матем. - 1951. - Т. 15. - С. 309-360.

[7]Тихонов А.Н. О единственности решения задачи электроразведки, ДАН СССР. 1949. V. 69, N6. С. 797-800.

[8]Yurko V. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series, Utrecht: VSP, 2002.

аналогами функции Вейля для оператора (1).

Важную роль в теории обратных спектральных задач играют операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами, а именно операторы (1) с $q \in W_2^{-1}$. Обратные задачи для таких операторов на интервале изучались в работах А.М. Савчука, А.А. Шкаликова, Р.О. Гринева, Я.В. Микитюка и других.

Дифференциальные операторы на графах (пространственных сетях) часто возникают в естествознании и технике. Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля на графах с *суммируемым потенциалом* достаточно подробно изучены. В частности, в работах М.И. Белишева[9] и В.А. Юрко[10] получено решение обратной задачи на деревьях. Наличие циклов существенно усложняет решение обратной задачи по сравнению с деревьями. Полное решение обратных задач для дифференциальных операторов на произвольных компактных графах получено В.А. Юрко[11]. Для решения таких обратных задач применялся метод спектральных отображений.

Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля на графах с *сингулярным потенциалом* являются существенно более трудными и в настоящее время мало изучены. Отметим работу Г. Фрейлинга, М.Ю. Игнатьева и В.А. Юрко [12], где рассматривается граф-звезда, а также работы Н.П. Бондаренко и Ц.Ф. Янга[13], где изучаются неполные обратные задачи.

---

[9]Belishev M. I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method, Inverse Problems 20, 2004. 647-672 pp.

[10]Yurko V.A., Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs, Inverse Problems 21 (2005), 1075-1086.

[11]В.А. Юрко. Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на пространственных сетях, УМН, Т. 71, №3(429), 2016, 149-196.

[12]Freiling, G., Ignatiev, M. and Yurko, V. An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graph, Proc. Symp. Pure Math. 77 (2008), 397-408.

[13]Bondarenko N.P. A 2-edge partial inverse problem for the Sturm-Liouville operators with singular potentials on a star-shaped graph, Tamkang Journal of Mathematics, Vol. 49, No. 1., 2018, 49-66 pp.

Bondarenko N.P. and Yang C.-F. A partial inverse problem for the Sturm-Liouville operator on the lasso-graph, Inverse Problems and Imaging, Vol. 13, No. 1., 2019, 69 p.

В данной работе исследуются обратные спектральные задачи для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами на графах. При этом основное внимание уделяется циклам. В Главе 1 рассмотрено восстановление оператора с сингулярным потенциалом по спектрам и некоторым специальным знакам на графе с одним циклом. Основным результатом этой главы является получение конструктивной процедуры восстановления, а также доказательство единственности решения обратной задачи. При этом важную роль играют асимптотические представления спектра и формулы восстановления характеристической функции. В Главе 2 исследовано восстановление оператора с сингулярным потенциалом на произвольном компактном графе. При этом рассмотрена другая постановка обратной задачи и в качестве основных спектральных характеристик вводятся объекты, являющиеся аналогами функции Вейля для классических операторов Штурма-Лиувилля. Получена конструктивная процедура решения обратной задачи, а также доказана теорема единственности. В Главе 3 исследована обратная задача для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля с замороженным аргументом $\ell_2 y := -y''(x) + q(x)y(a)$. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости, конструктивный алгоритм решения обратной задачи, а также доказана единственность решения. Дифференциальные операторы такого вида рассматривались в некоторых работах Л.П. Нижника[14], однако, общая теория решения такого класса обратных задач еще не построена, и имеются лишь отдельные фрагменты, не составляющие общей картины. Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с замороженным аргументом тесно связаны с обратными задачами на графах.

Цель работы. Целью диссертационной работы является получение новых результатов в спектральной теории и теории обратных задач для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами, заданных на графах, а также для операторов Штурма-Лиувилля с замороженным аргументом.

[14]Nizhnik L.P., Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem, Inverse Probl. 26 (2010) 125006.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Получена конструктивная процедура восстановления операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами на графе с циклом по спектрам и некоторым специальным знакам, а также доказана теорема единственности.

2. Получена конструктивная процедура восстановления операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами на произвольном компактном графе по функциям Вейля, а также доказана теорема единственности.

3. Получена конструктивная процедура восстановления оператора Штурма-Лиувилля с замороженным аргументом по спектрам, получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи, а также доказана теорема единственности.

Методы исследования. В работе используются методы вещественного, комплексного и функционального анализов, методы теории дифференциальных уравнений, методы теории аналитических функций и интегральных уравнений. Для решения обратной задачи для операторов Штурма - Лиувилля применяется развитие метода спектральных отображений, в основе которого лежит метод контурного интегрирования Коши - Пуанкаре.

Достоверность результатов. Все результаты диссертации получены с помощью строгих математических доказательств.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории операторов и ее приложениях. На основе разработанных конструктивных процедур могут быть построены численные методы решения обратных спектральных задач для операторов Штурма - Лиувилля с замороженным аргументом на интервале и для операторов Штурма - Лиувилля с сингулярными потенциалами на графах с циклом и произвольных компактных графах. Разработанный метод решения обратных задач, а также используемые идеи могут быть применены для решения обратных задач для других классов операторов, в том числе заданных на графах.

Апробация работы. Результаты работы прошли апробацию на 18-й Саратовской зимней школе "Современные проблемы теорий функций и их приложения"(Саратов, 2016), на 19-й Саратовской зимней школе "Современные проблемы теорий функций и их приложения"(Саратов, 2018), на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения - XXVI"(Воронеж, 2015), на Воронежской весенней математической школе "Современные методы теории краевых задач - Понтрягинские чтения-XXVII"(Воронеж, 2016) на Крымской осенней математической школе-симпозиуме (Крым, 2016), на Воронежской весенней математической школе "Современные методы теории краевых задач - Понтрягинские чтения-XXVIII"(Воронеж, 2017) на Международной научной конференции "Современные проблемы теорий функций и их приложения" посвященной 80-летию академика В.А.Садовничего (Москва, 2019), на научных семинарах кафедры математической физики и вычислительной математики (под руководством профессора В.А. Юрко).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 8 работах. Статьи [3, 5, 7, 8] опубликованы в журналах, включенных в список ВАК РФ. Из них 2 работы выполнены без соавторов. Основные результаты совместных работ, включенных в диссертацию, получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 11 параграфов и списка литературы, содержащего 82 наименования. Общий объем - 104 страницы.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы, кратко описывается приведенная литература и перечисляются основные результаты диссертации.

Введем в рассмотрение несколько определений. Множество ребер некоторого графа G будем обозначать как $E(G)$, а множество вершин будем обозначать как $V(G)$. Также рассмотрим отображение μ, которое в соответствие каждому ребру e будет ставить упорядоченную пару вершин $e^{\pm} \in V(G)$: $\mu(e) := [e^-, e^+]$, где вершина e^- соответствует началу ребра, а e^+ - концу. Множество инцидентных вершине $v \in V(G)$ ребер обозначим как $I(v, G)$. Вершину v будем называть *граничной*, если $|I(v,G)| = 1$. Множество граничных вершин обозначим как $V^B(G)$. Множество внутренних вершин обозначим как $V^I(G)$. Ребро e будем называть *граничным*, если либо $e^+ \in V^B(G)$, либо $e^- \in V^B(G)$. Множество граничных ребер обозначим как $E^B(G)$. Множество внутренних ребер обозначим как $E^I(G)$. Цепь ребер $\{e_1, ..., e_n\}$ называется *циклом*, если образует замкнутую кривую. Множество ребер, принадлежащих хотя бы одному циклу, обозначим как $E^C(G)$. Длину ребра e будем обозначать как l_e. На ребрах $e \in E(G)$, зададим уравнения Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами:

$$-\left(y_e^{[1]}\right)' - \sigma_e(x_e)y_e^{[1]} - \sigma_e^2(x_e)y_e = \lambda y_e(x_e),\ x_e \in (0, l_e), \tag{3}$$

где $y_e^{[1]} := y_e' - \sigma_e(x)y_e$ - это квазипроизводная и $q_e(x_e) = \sigma_e'(x_e)$ (производная рассматривается в смысле обобщенных функций), а $\sigma_e \in L_2[0, l_e]$. Таким образом, в (3) фигурирует оператор ℓ с $q \in W_2^{-1}$, представленный в другом виде. Введем обозначения

$$y_e|_v := \begin{cases} y_e(0), & v = e^+ \\ y_e(l_e), & v = e^- \end{cases}, \quad \partial_e y_e|_v := \begin{cases} y_e^{[1]}(0), & v = e^+ \\ -y_e^{[1]}(l_e), & v = e^- \end{cases} \tag{4}$$

Во внутренней вершине v зададим следующие условия склейки, которые будем называть $MC(v, G)$:

$$y_e|_v = y_r|_v, \quad e, r \in I(v, G), \qquad \sum_{e \in I(v,G)} \partial_e y_e|_v = 0. \tag{5}$$

Под $MC(G)$ будем понимать условия склейки $MC(v, G)$, $v \in V^I(G)$.

Зафиксируем некоторое ребро $k \in E^C(G)$ и в вершине $u = k^+$ рассмотрим условия склейки $MC_k(u)$ для случая $k^+ \neq k^-$:

$$y_e|_u = y_r|_u, \quad e, r \in I(u, G)\backslash\{k\}, \sum_{e \in I(u,G)\backslash\{k\}} \partial_e y_e|_u = 0,$$

и для случая $k^+ = k^-$:

$$y_k|_{k^-} = y_e|_u = y_r|_u, \quad e, r \in I(u)\backslash\{k\},$$
$$\sum_{e \in I(u,G)\backslash\{k\}} \partial_e y_e|_u + \partial_k y_k|_{k^-} = 0.$$

Под $MC_k(G)$ будем понимать условия склейки $MC(v)$ в $v \in V^I(G)\backslash\{u\}$, и условия $MC_k(u)$ в вершине u .

Для каждого ребра $e \in E^B(G)$ определим

$$\mu_B(e, G) := \begin{cases} e^+, & \text{если } e^+ \in V^B(G) \\ e^-, & \text{если } e^- \in V^B(G) \end{cases} \tag{6}$$

Пусть φ_{er} , $e \in E(G)$, $r \in E^B(G)$, будут решениями уравнения (3), удовлетворяющими условиям склейки $MC(G)$, а также краевым условиям:

$$\partial_e \varphi_{er}|_{\mu_B(e,G)} = \delta_{er}, \quad e \in E^B(G), \tag{7}$$

Функцию $M_e(\lambda, G_{arb}) := \varphi_{ee}|_{\mu_B(e)}$, $e \in E^B(G_{arb})$ мы назовем *функцией Вейля* для (3) относительно ребра e .. Пусть φ_{er} , $e \in E(G)$, $r \in E^C(G)$, будут решениями уравнения (3), удовлетворяющими условиям склейки $MC_r(G)$, а также краевым условиям:

$$\partial_e \varphi_{er}|_{\mu_B(e)} = 0, \quad e \in E^B(G_{arb}), \quad \partial_r \varphi_{rr}|_{r^+} = 1,$$

Функцию $M_r(\lambda, G_{arb}) := \varphi_{rr}|_{r^+}$, $r \in E^C(G_{arb})$ мы назовем *функцией Вейля* для (3) относительно ребра r .

Также будем рассматривать различные краевые задачи для уравнения (3) с различными условиями склейки. Введем в рассмотрение решения $C_e(x, \lambda)$ и $S_e(x, \lambda)$, $e \in E(G_c)$, уравнения (3) с начальными условиями

$$C_e(0,\lambda) = S_e^{[1]}(0,\lambda) = 1, \quad C_e^{[1]}(0,\lambda) = S_e(0,\lambda) = 0.$$

Понятно, что решение φ_{er} представимо как

$$\varphi_{er}(x_e,\lambda) = A_{er}(\lambda)S_e(x_e,\lambda) + B_{er}(\lambda)C_e(x_e,\lambda).$$

Если L - это некоторая краевая задача, то, подставив это представление в ее краевые условия, получим систему алгебраических уравнений, определителем которой будем считать *характеристическую функцию* $\Delta(\lambda, L)$. Под $\Delta_0(\lambda, L)$ будем понимать характеристическую функцию некоторой краевой задачи L для операторов Штурма-Лиувилля с нулевым потенциалом.

Первая глава посвящена исследованию операторов Штурма - Лиувилля с сингулярными потенциалами, заданных на графе с циклом. Под графом с циклом будем понимать некоторый граф G_c , такой что

$$V^B(G_c) = \{v_j\}_{j=1}^p,\ V^I(G_c) = \{v_0\},$$

$$E(G_c) = \{e_j\}_{j=0}^p,\ \mu(e_j) := [v_0, v_j],\ j = \overline{0,p}$$

Таким образом, граф G_c образуется присоединением одного цикла, состоящего из ребра e_0 , к графу-звезде. Также будем считать, что длины ребер графа соизмеримы. Рассмотрим краевую задачу $L^1(G_c)$ для уравнения (3) с условиями склейки $MC(G_c)$ и граничным условиями

$$y_e^{[1]}(0) = 0, \quad e \in E^B(G_c). \tag{8}$$

Последовательность собственных значений задачи $L^1(G_c)$ обозначим Λ . Наряду с $L^1(G_c)$ рассматриваются краевые задачи $L_r^1(G_c)$, $r \in E^B(G_c)$, для уравнения (3) с условиями $MC(G_c)$ и граничными условиями

$$y_e^{[1]}(0) = 0, \quad e \in E^B(G_c)\backslash\{r\}, \quad y_r(0) = 0. \tag{9}$$

Посредством Λ_r обозначим последовательность собственных значений задачи $L_r^1(G_c)$.

Также под $\ell^1(e)$ будем понимать краевую задачу для уравнения (3) на ребре e с условием Дирихле на обеих концах ребра e, а под $\ell^1_e(e)$ будем понимать краевую задачу для уравнения (3) на e с граничными условиями Неймана в e^- и с граничными условиями Дирихле в e^+.

Нули функции $\Delta(\lambda, \ell^1(e_0))$ обозначим как $\{z_n\}_{n\geq 1}$. Также обозначим

$$\omega_n := signQ(z_n), \quad \Omega = \{\omega_n\}_{n\geq 1}, \quad Q(\lambda) := C_{e_0}(l_{e_0}, \lambda) - S^{[1]}_{e_0}(l_{e_0}, \lambda).$$

В параграфе 1.1 введем в рассмотрение следующую обратную задачу

Обратная Задача 1.1. Даны Λ, Λ_r, $r \in E^B(G_c)$, Ω, построить потенциал q на G_c.

В параграфе 1.2 рассматриваются спектры краевых задач и восстановление характеристической функции. Вид собственных значений краевой задачи $L^1(G_c)$ формулируется в следующей лемме

Лемма 1.2.1 *Собственные значения краевой задачи* $L^1(G_c)$ *:*

$$\sqrt{\lambda_{nk}} =: \rho_{nk} = \begin{cases} \tau n + \varepsilon_{nk}, \quad k = \overline{0, \mu_0 - 1}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ |\tau n + \alpha_k| + \varepsilon_{nk}, \quad k = \overline{\mu_0, m}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{10}$$

где $\varepsilon_{nk} \in l_{2\mu_k}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\mu_k \in \mathbb{N}$ *, а* μ_0 *- это кратность нулевого собственного значения краевой задачи* $L^1(G_c)$ *с нулевым потенциалом.* Саму характеристическую функцию можно восстановить из спектра, используя теорему Адамара:

Теорема 1.2.1. *Задание спектров* Λ *и* Λ_r *единственным образом определяет характеристические функции по формулам*

$$\begin{gathered} \Delta(\lambda, L^1(G_c)) = (-1)^{\mu_0} \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial \lambda^{\mu_0}} \Delta_0(\lambda, L^1(G_c))\Big|_{\lambda=0} \cdot \\ \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{\mu_0 - 1} \frac{\lambda_{nk} - \lambda}{\lambda^{01}_{nk}} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \prod_{k=\mu_0}^{m} \frac{\lambda_{nk} - \lambda}{\lambda^{01}_{nk}}. \\ \Delta(\lambda, L^1_r(G_c)) = (-1)^{\mu^r_0} \frac{\partial^{\mu^r_0}}{\partial \lambda^{\mu^r_0}} \Delta_0(\lambda, L^1_r(G_c))\Big|_{\lambda=0} \cdot \\ \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{\mu^r_0 - 1} \frac{\lambda_{rnk} - \lambda}{\lambda^{01}_{rnk}} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \prod_{k=\mu^r_0}^{m} \frac{\lambda_{rnk} - \lambda}{\lambda^{01}_{rnk}}. \end{gathered} \tag{11}$$

Наряду с потенциалом σ рассмотрим потенциал $\widetilde{\sigma}$. В дальнейшем будем считать, что если символ α обозначает объект, зависящий от σ , то тогда $\widetilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, зависящий от $\widetilde{\sigma}$, и $\hat{\alpha} := \alpha - \widetilde{\alpha}$.

В ρ -плоскости рассмотрим контур $\gamma = \gamma(\tau) := (-\infty + i\tau, +\infty + i\tau)$, где $\tau > 0$ такое, что $\inf\{\Lambda_k \cup \widetilde{\Lambda}_k\} > -\tau^2$. Пусть Γ будет контуром в λ -плоскости, который есть образ γ при отображении $\lambda = \rho^2$. Пусть $C_N := \{|\lambda| = (N+1/4)^2\}$ - контура с обходом по часовой стрелке. Обозначим $\Gamma_N = \Gamma \cap intC_N$. Введем в рассмотрение так называемую вспомогательную обратную задачу:

Вспомогательная обратная задача $IP(e,G)$: по данным $M_e(\lambda)$, построим потенциал q на e .

Эта вспомогательная задача рассматривается в параграфе 1.3. Ее решение может быть получено посредством следующего алгоритма.

Алгоритм 1.3.1. Дана функция $M_e(\lambda)$.

1) Возьмем $\widetilde{\sigma} = 0$ и подсчитаем $\widetilde{C}_e(x_e,\lambda)$, $\widetilde{M}_e(\lambda)$, а также

$$\widetilde{D}_k(x_e,\lambda,\mu) := \frac{\left\langle \widetilde{C}_e(x_e,\lambda), \widetilde{C}_e(x_e,\mu) \right\rangle}{\lambda-\mu} = \int\limits_0^{x_e} \widetilde{C}_e(t,\lambda)\widetilde{C}_e(t,\mu)dt,$$

$$\widetilde{r}_e(x_e,\rho,\theta) := \widetilde{D}_e(x_e,\lambda,\mu)\theta\hat{M}_e(\mu);$$

2) Построим $\widetilde{F}_k(x,\rho)$ используя формулу

$$\widetilde{F}_e(x_e,\rho) := \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_e(x_e,\lambda,\mu)\hat{M}_e(\mu)\widetilde{C}_e(x_e,\mu)d\mu,\ \ \lambda=\rho^2$$

3) Найдем $\Psi_e(x_e,\rho)$, решив для каждого фиксированного $x_e \in [0,l_e]$ основное уравнение вида

$$\Psi_e(x_e,\rho) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \widetilde{r}_e(x_e,\rho,\theta)\Psi_e(x_e,\theta)d\theta + \widetilde{F}_e(x_e,\rho),$$

4) Построим $\sigma_e(x)$, используя

$$\sigma_e(x_e) = -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \widetilde{C}_e(x_e,\mu)\hat{C}_e(x_e,\mu)\hat{M}_e(\mu)d\mu +$$
$$+\frac{1}{\pi i} l.i.m._{N\to\infty}\int_{\gamma_N} \rho\cos 2\rho x_e \hat{M}_e(\rho^2)d\rho$$

где $\hat{C}_e(x_e,\lambda) = \Psi_e(x_e,\rho)$.

В параграфе 1.4 находим решение самой обратной задачи 1.1 посредством следующего алгоритма.

Алгоритм 1.4.1 Даны Λ , Λ_r , $r \in E^B(G_c)$.

1) Построим $\Delta(\lambda, G_c)$, $\Delta_r(\lambda, G_c)$, $r \in E^B(G_c)$ используя (11). Найдем $M_r(\lambda)$ посредством

$$M_r(\lambda) = -\frac{\Delta(\lambda, L^1_r(G_c))}{\Delta(\lambda, L^1(G_c))}.$$

Для ребер $e \in E^B(G_c)$, найдем σ_e решая вспомогательную обратную задачу по алгоритму 1.3.1. Будем считать, что G^* - это граф-звезда, образуемый из G_c удалением ребра e_0 , а T - это граф, образуемый циклом из ребра e_0 . Посредством этого шага можно найти потенциал на ребрах графа G^* .

2) Найдем $\Delta(\lambda, \ell(e_0))$ и $\Delta(\lambda, L^1(T))$ решая систему

$$\Delta(\lambda, L^1(G_c)) = \Delta(\lambda, \ell(e_0))\Delta(\lambda, L^1(G^*)) + (\Delta(\lambda, L^1(T)) + 1)\prod_{k=1}^{p}\Delta(\lambda, \ell_k(e_k))$$
$$\Delta_j(\lambda, L^1(G_c)) = \Delta(\lambda, \ell(e_0))\Delta_j(\lambda, L^1(G^*)) + (\Delta(\lambda, L^1(T)) + 1)\cdot$$
$$\cdot\prod_{k=\overline{1,p}\setminus\{j\}}^{p}\Delta(\lambda, \ell_k(e_k)),$$

3) Найдем нули $\{z_n\}_{n\ge1}$ функции $\Delta(\lambda, \ell(e_0))$.

4) Будем считать, что $D(\lambda) = \Delta(\lambda, L(T)) + 2$. Подсчитаем

$$Q(z_n) = \omega_n\sqrt{D^2(z_n) - 4}$$

5) Вычислим $\Delta(z_n, \ell_0(e_0)) = \frac{1}{2}(D(z_n) + Q(z_n))$.

6) Найдем M_0 по формуле

$$M_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{\lambda - z_n}, \quad M_n = -\frac{\Delta(z_n, \ell_0^1(e_0))}{\dot{\Delta}(z_n, \ell^1(e_0))}, \tag{12}$$

7) Вычислим $M_0(\lambda)$ посредством (12) и найдем σ_0 решая вспомогательную обратную задачу на ребре e_0 по алгоритму 1.3.1.

Во **второй главе** исследуется оператор Штурма - Лиувилля с сингулярным потенциалом (2), заданный на произвольном компактном графе G_{arb}. Для определенности будем считать, что в графе G_{arb} присутствует больше одной граничной вершины, т.е $|V^B(G_{arb})| > 1$ (случаями $|V^B(G_{arb})| = 0$ и $|V^B(G_{arb})| = 1$ можно пренебречь). Определим некоторую вершину $v_0 \in V^B(G_{arb})$ как корень и $I(v_0, G_{arb}) = \{r_0\}$. В дальнейшем будем считать, что если $e \in E^S(G_{arb})$, то начало ребра будет ближе к корню, чем его конец. В отличие от первой главы, в качестве спектральных данных берутся функции Вейля $M_e(G_{arb})$, $e \in E^B(G_{arb})\backslash\{r_0\} \cup E^C(G_{arb})$. Рассмотрим краевую задачу $L^2_\Omega(G_{arb})$, $\Omega \subset E^B(G_{arb})$, для уравнения (3) с условиями склейки $MC(G_{arb})$ и граничным условиями

$$\partial_e y_e|_{\mu_B(e,G_{arb})} = 0, \quad e \in E^B(G_{arb})\backslash\Omega, \quad y_r|_{\mu_B(r,G_{arb})} = 0, \quad r \in \Omega. \tag{13}$$

Также рассмотрим краевую задачу $L^{2,v}_r(G_{arb})$, $v = 0, 1$, $r \in E^C(G_{arb})$, для уравнения (3) с условиями склейки $MC_r(G_{arb})$ и граничным условиями

$$\partial_e y_e|_{\mu_B(e,G_{arb})} = 0, \quad e \in E^B(G_{arb}), \quad \partial^v_r y_r|_{r^+} = 0.$$

Будем считать, что $L^2(G_{arb}) := L^2_\varnothing(G_{arb})$ и $L^2_r(G_{arb}) := L^2_{\varnothing r}(G_{arb})$, $r \in E^C(G_{arb})$. Рассмотрим краевую задачу $L_\Omega(Q, v)$ для уравнения (3) с условиями склейки $MC(u, Q)$, $u \in V^I(Q)\backslash\{v\}$ и с граничными условиями

$$\partial_e y_e|_{\mu_B(e,G_{arb})} = 0, \quad e \in E^B(Q)\backslash\{\Omega\}, \quad y_r|_{\mu_B(r,G_{arb})} = 0, \quad r \in \Omega,$$

$$\partial_k y_k|_v = 0, \quad k \in I(v, Q).$$

Мы определим $L(Q,v) := L_{\varnothing}(Q,v)$.В параграфе 2.1 вводится в рассмотрение следующая обратная задача.

Обратная Задача 2.1. Даны $M_e(\lambda, G_{arb})$, $e \in E^B(G_{arb})\backslash\{r_0\} \cup E^C(G_{arb})$, построить σ .

В параграфе 2.2 формулируются и доказываются некоторые вспомогательные утверждения, а также находятся оценки для самих функций $\varphi_{er}(x_e, \lambda)$.

Лемма 2.2.3. *Для каждого фиксированного* $x_e \in [0, l_e]$ *и для* $Im\rho \geq \tau_0$, τ_0 *- это некоторое фиксированное число,* $\rho \to \infty$ *, справедливо следующее представление*

$$\varphi_{er}(x_e,\lambda) = O\Big(\frac{1}{\rho}e^{-x_e Im\rho}\Big), \quad \varphi_{er}^{[1]}(x_e,\lambda) = O\Big(e^{-x_e Im\rho}\Big),$$
$$\hat{\varphi}_{er}(x_e,\lambda) = \frac{1}{\rho}e^{i\rho x_e}\hat{\kappa}(\rho), \quad \kappa(\rho),\ \widetilde{\kappa}(\rho) \in K.$$

Этот результат позволяет вновь применить метод решения вспомогательной обратной задачи по восстановлению потенциала q из функции Вейля на некотором фиксированном ребре. В параграфе 2.3 формулируется так называемое *псевдообрезание графа.* Будем считать, что $E^S(G_{arb})$ - это множество ребер, не принадлежащих ни одному циклу. Сведем все циклы в точки, тогда получим некоторый граф G^*_{arb} с множеством ребер $E(G^*_{arb}) = E^S(G)$. Минимальное число ребер на G^*_{arb} между корневой вершиной и ребром e , включая e называется порядком ребра e . Обозначим множество $E^{(\nu)},\ \nu = \overline{0,\chi}$, множеством простых ребер порядка ν .

Псевдообрезание графа. Зафиксируем ребро

$$r \in E^S(G_{arb}) \cap E^I(G_{arb}) \cup \{r_0\}$$

и предположим, что $r \in E^{(\nu)}$. Обозначим $v = r^-$. Вершина v делит граф G_{arb} на две части:

$$G_{arb} = Q \cup \hat{G}, \quad V(Q) \cap V(\hat{G}) = v, \quad E(\hat{G}) \cap I(v, G_{arb}) = r.$$

$$r \in E^B(\hat{G}), \quad r \notin E(Q) \cap I(v, G_{arb})$$

Более того, корневое ребро $r_0 \in E(\hat{G})$. Мы будем считать σ на графе Q известным. Фиксируем ребро $e \in E^B(G_{arb}) \cap E(Q)$. Будем считать $M_e(\lambda, G_{arb})$ известным и некоторое $k \in E^B(Q) \cap E^B(G_{arb})$.

1. Найдем функции Вейля $M_r(\lambda, \hat{G})$ используя в случае, если $v \in V^B(Q)$, $e^- = v$, $e \in E(Q)$, формулу

$$M_r(\lambda, \hat{G}) = \frac{M_k(\lambda, G_{arb})\Delta(\lambda, L_e^2(Q)) + \Delta(\lambda, L_{ek}^2(Q))}{\Delta(\lambda, L_k^2(Q)) + \Delta(\lambda, L^2(Q))M_k(\lambda, G_{arb})}.$$

и в ином случае, если $v \in V^I(Q)$ и $s \in I(v)$, $s \in E^I(Q)$, используя формулу

$$M_r(\lambda, \hat{G}) = \frac{\Delta(\lambda, L_k^2(Q)) + \Delta(\lambda, L^2(Q))M_k(G_{arb})}{\Delta(\lambda, L^2(Q))M_k(G_{arb}) + \Delta(\lambda, L_k^2(Q, v))}.$$

2. Решая вспомогательную обратную задачу по алгоритму 1.3.1, найдем σ_r на r .

Решение обратной задачи 2.1 можно получить, используя следующий алгоритм

Алгоритм 2.1.1

1. Для каждого фиксированного ребра $k \in E^B(G)$ найдем σ_k на k , используя алгоритм 1.3.1.

2. Для каждого фиксированного ребра $k \in E^C(G)$ найдем σ_k на k , используя алгоритм 1.3.1.

3. Для каждого фиксированного ребра $r \in E^{(\nu)}$ используя процедуру псевдообрезания графа, найдем $M_r(\lambda)$. Используя алгоритм 1.3.1 найдем σ_r . Повторяя этот шаг для всех $r \in E^{(\nu)}$ и для всех $\nu = \chi - 1, ..., 0$, найдем σ on G_{arb} .

Таким образом, мы доказываем справедливость следующей теоремы:

Теорема 2.1.1. Если $M(\lambda, G_{arb}) = \widetilde{M}(\lambda, G_{arb})$, то $\sigma = \widetilde{\sigma}$. Таким образом, задание вектора Вейля единственным образом определяет потенциал на графе G_{arb} .

В **третьей главе** исследуется оператор Штурма - Лиувилля с замороженным аргументом на интервале. Рассмотрим краевую задачу $L^3 = L^3(q(x), a, \alpha, \beta)$ вида

$$\ell^3 y := -y''(x) + q(x)y(a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi,$$

$$y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(\pi) = 0,$$

где λ - спектральный параметр, $q(x)$ - комплекснозначная функция из $L_2(0,\pi)$ и $\alpha, \beta \in \{0,1\}$. Пусть также $k := \pi/a \in \mathbb{N}$. Будем называть *вырожденным* случай, при котором выполняется одна из следующий групп условий:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{(i)} & \alpha = \beta = 0; \\[2mm] \text{(ii)} & \alpha = 1,\ \beta = 0 \text{ и } k \text{ нечетное}; \\[2mm] \text{(iii)} & \alpha = \beta = 1 \text{ и } k \text{ четное}; \end{array}\right\} \tag{14}$$

Также будем называть *невырожденным* случай, когда выполняется одна из следующий групп условий:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{(iv)} & \alpha = 0,\ \beta = 1; \\[2mm] \text{(v)} & \alpha = 1,\ \beta = 0 \text{ и } k \text{ четное}; \\[2mm] \text{(vi)} & \alpha = \beta = 1 \text{ и } k \text{ нечетное}. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Введем в рассмотрение характеристическую функцию краевой задачи L^3

$$\Delta_{\alpha,\beta}(\lambda) = \begin{vmatrix} C^{(\alpha)}(0,\lambda) & S^{(\alpha)}(0,\lambda) \\ C^{(\beta)}(\pi,\lambda) & S^{(\beta)}(\pi,\lambda) \end{vmatrix}.$$

Собственные значения задачи L^3 обозначим как $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$. В параграфе 3.1 в рассмотрение вводится следующая обратная задача.

Обратная задача 3.1. По данным $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, a, α и β найти $q(x)$.

В параграфе 3.2 рассматриваются некоторые вспомогательные утверждения и находятся асимптотические представления спектра краевой задачи L^3 .

Теорема 3.2.1. *Краевая задача* L^3 *имеет счетное множество собственных значений* $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *вида*

$$\lambda_n = \Big(n - \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\kappa_n}{n}\Big)^2, \quad \{\kappa_n\} \in l_2. \tag{16}$$

Более того, в вырожденном случае часть собственных значений вырождается следующим образом:

(1) Для $\alpha = \beta = 0$:

$$\lambda_{kn} = (kn)^2, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{17}$$

(2) Для $\alpha = 1, \ \ \beta = 0$ *и нечетных* k :

$$\lambda_{k(n-1/2)+1/2} = k^2\Big(n - \frac{1}{2}\Big)^2, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{18}$$

(3) Для $\alpha = \beta = 1$ *и четных* k :

$$\lambda_{k(n-1/2)+1} = k^2\Big(n - \frac{1}{2}\Big)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Саму характеристическую функцию из спектра можно восстановить, использую теорему Адамара:

$$\Delta_{\alpha,\beta}(\lambda) = \pi^{\delta_{\alpha,\beta}}(\lambda_1 - \lambda)^{\alpha\beta} \prod_{n=1+\alpha\beta}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{\Big(n - \frac{\alpha+\beta}{2}\Big)^2}, \tag{20}$$

В параграфе 3.3 доказывается теорема единственности, ставящая в соответствие каждым спектральным данным единственный потенциал.

Теорема 3.3.1 *В невырожденном случае: если* $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n\geq 1}$, *тогда* $q(x) = \tilde{q}(x)$ *почти всюду на* $(0, \pi)$, *т.е. задание спектра единственным образом определяет потенциал.*

В вырожденном случае: пусть $k > 1$ *и существует оператор* K : $L_2(0, a) \to L_2(0, a)$, $I + K$ *- обратимый, такой что*

$$q(a - t) = K(q(a + t)), \quad 0 < t < a, \tag{21}$$

справедливо для q *и* $\tilde{q}$. *Тогда из того факта, что* $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n\geq 1}$ *следует, что* $q(x) = \tilde{q}(x)$ *почти всюду на* $(0, \pi)$.

А также доказывается теорема, определяющая необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи

Теорема 3.3.2. *(I) Невырожденный случай. Тогда для произвольной последовательности комплексных чисел* $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *вида (16) существует функция* $q(x) \in L_2(0,\pi)$ *, такая что* $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *является спектром краевой задачи* L^3.

(II) Вырожденный случай. Тогда для произвольной последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *вида (16), удовлетворяющая условиям вырождения (17) - (19) существует потенциал* $q(x) \in L_2(0,\pi)$ *(не единственный), такой что* $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *является спектром краевой задачи* L^3.

Следующий алгоритм позволяет построить решение обратной задачи в невырожденном случае.

Алгоритм 3.3.1. Пусть дан спектр $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ краевой задачи L^3 в невырожденном случае.

1. Построим $\Delta_{\alpha,\beta}(\lambda)$ по формуле (20).

2. Найдем $W_{\alpha,\beta}(t)$ обращая преобразование Фурье в одном из следующих представлений:

$$\Delta_{\alpha,\alpha}(\lambda) = \rho^{2\alpha}\Big(\frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \int\limits_0^\pi W_{\alpha,\alpha}(t)\frac{\cos\rho t}{\rho^2}\,dt\Big), \quad \alpha=\beta \tag{21}$$

$$\Delta_{\alpha,\beta}(\lambda) = (-1)^\alpha\cos\rho\pi + \int\limits_0^\pi W_{\alpha,\beta}(t)\frac{\sin\rho t}{\rho}dt, \quad \alpha\neq\beta. \tag{21}$$

3. Строим потенциал $q(x)$, используя нижележащие алгоритмы: алгоритм 3.3.2 для невырожденного случая и алгоритм 3.3.3 для вырожденного.

Алгоритм 3.3.2. Пусть дана функция $W_{\alpha,\beta}(x)$ в невырожденном случае

1. Подсчитаем $q(x)$ на $(0,a)$ по соответствующей формуле:

Для $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ при нечетных k и $x \in (0, a)$:

$$q(x) = W_{0,1}(x) + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \Big(W_{0,1}(2ja + x) - W_{0,1}(2ja - x) \Big),$$

и при четных k и $x \in (0, a)$:

$$q(x) = \sum_{j=1}^{k/2} \Big(W_{0,1}((2j-1)a + x) - W_{0,1}((2j-1)a - x) \Big);$$

Для $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и четных k при $x \in (0, a)$:

$$q(x) = \sum_{j=1}^{k/2} (-1)^j \Big(W_{1,0}((k+1-2j)a - x) + W_{1,0}((k+1-2j)a + x) \Big);$$

Для $\alpha = \beta = 1$ и нечетных k при $x \in (0, a)$:

$$q(x) = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \Big(W_{1,1}(x) + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} (-1)^j \Big(W_{1,1}(2ja + x) + W_{1,1}(2ja - x) \Big) \Big).$$

2. Подсчитаем $q(x)$ на $(a, 2a)$ по формуле

$$q(x) = 2(-1)^\alpha W_{\alpha,\beta}(\pi + a - x) - q(2a - x), \quad x \in (a, 2a).$$

3. Для $j = \overline{2, k-1}$ повторим следующий шаг. Пусть функция $q(x)$ будет подсчитана на интервале $(0, ja)$. Тогда найдем $q(x)$ на $(ja, (j+1)a)$ по формуле

$$q(x) = (-1)^\alpha \Big(2W_{\alpha,\beta}(\pi + a - x) + q(x - 2a) \Big), \quad x \in (ja, (j+1)a).$$

Для определенности предположим, что $k > 1$ и потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию (21) с известным оператором K. Алгоритм для решения обратной задачи в вырожденном случае имеет следующий вид.

Алгоритм 3.3.3. Пусть дана функция $W_{\alpha,\beta}(x)$ в вырожденном случае

1. Подсчитаем $q(x)$ на интервале $(a, 2a)$ по формуле

$$q(a+x) = (I+K)^{-1}(-2W_{\alpha,\beta}(\pi - x)), \quad x \in (0,a).$$

2. Подсчитаем $q(x)$ на интервале $(0,a)$ по формуле

$$q(a-x) = -2W_{\alpha,\beta}(\pi - x) - q(a+x), \quad x \in (0,a).$$

3. Для $j = \overline{2, k-1}$ повторим следующий шаг. Пусть функция $q(x)$ будет подсчитана на интервале $(0, ja)$. Тогда найдем $q(x)$ на $(ja, (j+1)a)$ по формуле

$$q(x) = -2W_{\alpha,\beta}(\pi + a - x) + (-1)^{\alpha} q(x-2a), \quad x \in (ja, (j+1)a).$$

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю В.А. Юрко, а также доцентам С.А. Бутерину и М.Ю. Игнатьеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список опубликованных работ автора по теме диссертации

1. Бутерин С.А. , Васильев С.В., *An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with frozen argument*, Актуальные проблемы прикладной математики и механики, Воронеж, 2015, стр. 4-6.

2. Бутерин С.А. , Васильев С.В., *On recovering Sturm-Liouville operators with frozen argument*, Современные проблемы теории функций и их приложения, Научная книга, Саратов, 2016, стр. 7-9.

3. Bondarenko N.P., Buterin S.A., Vasiliev S.V. *An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with frozen argument*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 2019. Vol. 472. Issue 1. P. 1028-1041.

4. Бутерин С.А. , Васильев С.В. *An inverse spectral problem for Sturm - Liouville operators with a frozen argument and Neumann boundary conditions*, Актуальные проблемы прикладной математики и механики, Воронеж, 2016, стр. 4-6.

5. Buterin S.A, Vasiliev S.V. *On recovering a Sturm-Liouville-type operator with the frozen argument rationally proportioned to the interval length*, Journal

of Inverse and Ill-posed Problems, 0(0), pp. -. Retrieved 25 Apr. 2019, from doi:10.1515/jiip-2018-0047

6. Бутерин С.А. , Васильев С.В. *An inverse spectral problem for Sturm - Liouville operators with a frozen argument and Neumann boundary conditions*, Актуальные проблемы прикладной математики и механики, Воронеж, 2016, стр. 4-6.

7. Васильев С.В. *An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on graphs with a cycle*, Известия Саратовского университета. Новая серия . Серия: Математика, Механика, Информатика, 19(4) (2019).

8. Vasilev S.V. *An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on arbitrary compact graphs*, Tamkang Journal of Mathematics, 50(3), 293-305.