МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

Смешанная задача для волнового уравнения с нулевым начальным положением и ненулевой начальной скоростью

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Медведкова Андрея Алексеевича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор ______ Хромов А. П.
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______ Хромов А. П.
подпись, дата

Саратов, 2020 год

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Метод Фурье является одним из важнейших математических методов. Академик В.А.Стеклов впервые дал строгое обоснование метода Фурье, которое опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз.

Метод Фурье получил широкое распространение, было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи в это области И.Г. Петровским, В.И. Смирновым, О.А. Ладыженской, В.А. Ильиным, В.А. Чернятиным.

Недостатком такого подхода является то, что он требует завышения гладкости начальных данных. Выход из этого положения намечен А.Н.Крыловым. Суть его приема состоит в том, что изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется и тем самым в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию, а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать.

В.А. Чернятин, воспользовавшись приемом А.Н.Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций, успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными.

Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А.Н. Крылова, В.А. Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать смешанные задачи методом Фурье и ставящий много новых важных вопросов и в теории функций.

В данной работе исследуется смешанная задача для волнового уравнения с непрерывным комплексным потенциалом в случае нулевого начального положения и ненулевой начальной скорости и двух типов двухточечных граничных условий: когда концы закреплены и когда каждое из граничных условий содержит производную по x.

Цель работы. Резольвентным подходом с использованием рекомендаций А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье получить методом Фурье классическое решение в случае $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Также показать, что в случае, когда $\psi(x) \in L[0,1]$, ряд формального решения для задачи с закрепленными концами сходится равномерно в любой ограниченной области, а для второй задачи он сходится лишь всюду, и для обеих задач является обобщенным решением в равномерной метрике. Написать программный код для вычисления резольвенты для двух задач с разными типами граничных условий и в случае нулевого потенциала.

Структура работы. Данная работа состоит из введения, основной части, заключения,списка использованных источников и приложений. Основная часть включает в себя 5 разделов: Постановка задачи, Вспомогательные утверждения, Исследование задачи в случае граничных условий с закрепленными концами, Исследование задачи в случае граничных условий, содержащих производную, практическая часть.

Научная новизна. В магистерской работе исследуется смешанная задача для волнового уравнения с комплекснозначным потенциалом в случае нулевого начального положения и ненулевой начальной скорости, а также для двух типов двухточечных граничных условий. Приведены строгие математические доказательства. Данные результаты имеют высокую научную значимость.

Положения выносимые на защиту. С использованием резольвентного подхода в методе Фурье, получено классическое решение в случае $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$, а также исследована сходимость ряда формального решения в случае, когда $\psi(x) \in L[0,1]$ и для обеих задач показано, что он является обобщенным решением. Написан программный код для подсчета резольвенты.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первом** разделе вводится в рассмотрение следующая смешанная задача для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \quad u_t'(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и граничными условиями двух следующих видов:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0. \tag{4}$$

где $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначна, $\alpha_i, \beta_i \quad (i = 1,2)$ - комплекснозначные числа.

Во **втором** разделе приводятся вспомогательные утверждения, необходимые для исследования поставленной задачи.

Резольвента.

Пусть A — линейный оператор. Его резольвентой называется функция

$$R(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1},$$

где E — тождественный оператор, а λ — комплексный параметр.

Асимптотика собственных значений.

Теорема. Собственные значения дифференциального оператора n-го порядка в интервале [0, 1], порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности λ'_k, λ''_k $(k = N, N+1, N+2, \ldots)$, где N - некоторое целое число.

При нечетном n, $n = 4q - 1$,

$$\lambda'_k = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],$$
$$\lambda''_k = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],$$

а для нечетного n, $n = 4q + 1$,

$$\lambda'_k = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],$$
$$\lambda''_k = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right];$$

где $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$— определенные корни уравнения $\theta_1 \xi + \theta_0 = 0$ (θ_0 и θ_1 - определяются условиями регулярности) отвечающего области S_ν (разбиения комплексной плоскости) с ν, соответственно нечетным и четным.

При четном n, $n = 2\mu$, и $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$ (θ_0, θ_1 и θ_{-1} - определяются условиями регулярности)

$$\lambda_k' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{5}$$

$$\lambda_k'' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{6}$$

где ξ' и ξ'' - корни уравнения

$$\theta_1 \xi^2 + \theta_0 \xi + \theta_{-1} = 0, \tag{7}$$

отвечающего области S_0, причем верхний знак в формулах (5)-(6) соответствует четному, а нижний - нечетному μ.

Наконец, при четном n, $n = 2\mu$, и $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$

$$\lambda_k' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \tag{8}$$

$$\lambda_k'' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \tag{9}$$

где ξ - корень уравнения (7), отвечающего области S_0, а выбор верхнего или нижнего знака в формулах (8)-(9) следует производить также как в (5)-(6).

Также в этом разделе описаны задача Штурма - Лиувилля и метод Фурье, прием Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье и операторы преобразования.

В **третьем** разделе исследуется задача (1)–(3).

Исследование задачи (1)–(3) для $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, с асимптотикой: $\lambda_n = \rho_n^2 \quad (\operatorname{Re}\rho_n \geqslant 0)\,, \quad \rho_n = n\pi + o(1)$.

Пусть $\tilde{\gamma}_n = \{\rho |\ |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geqslant n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geqslant n_0$ внутрь $\tilde{\gamma}_n$ попадает лишь по одному ρ_n. Пусть γ_n - образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ-плоскости $\left(\lambda = \rho^2, \quad \operatorname{Re}\rho \geqslant 0\right)$. Через $R_\lambda = (L -$

$\lambda E)^{-1}$ обозначается резольвента оператора L (λ - спектральный параметр, E — единичный оператор).

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье можно представить в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)(x)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda, \tag{10}$$

где $r>0$ фиксировано, на контуре $|\lambda|=r$ нет собственных значений, все γ_n при $n\geqslant n_0$ находятся вне $|\lambda|=r$.

Через $z_1(x,\rho), z_2(x,\rho)$ обозначается решение уравнения

$$y''(x) - q(x)y(x) + \rho^2 y(x) = 0.$$

с начальными условиями $z_1(0,\rho) = z_2'(0,\rho) = 1,\ \ z_1'(0,\rho) = z_2(0,\rho) = 0.$

Теорема 1. Имеет место формула

$$R_\lambda f = -z_2(x,\rho)(f,z_1) + v(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x),$$

где $v(x,\rho) = \frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}$, $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $(M_\rho f)(x) = \int_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt$, $M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho)\end{vmatrix}$.

Теорема 2. Для формального решения имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{11}$$

где

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)v^0(x,\rho)(\psi,z_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left[v(x,\rho) - v^0(x,\rho)\right](\psi,z_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda$$

$v^0(x,\rho) = \frac{z_2^0(x,\rho)z_1^0(1,\rho)}{z_2^0(1,\rho)}$ - то же, что и $v(x,\rho)$, но взятое теперь для оператора $L_0 : L_0 y = -y''(x), y(0) = y(1) = 0$. Таким образом, $z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x$, $z_2^0(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho}$.

Лемма 1. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\left(\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi\right)\sin n\pi x \sin n\pi t.$$

где $\psi_1(\xi) = \psi(\xi) + \int_{\xi}^{1} K(\tau,\xi)\psi(\tau)$, $K(\tau,\xi)$ - ядро оператора преобразования.

Лемма 2. Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула $u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\tilde{\psi}(\tau)d\tau$, где $\tilde{\psi}(x) = -\tilde{\psi}(-x), \tilde{\psi}(x+2) = \tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0,1]$

Лемма 3. Производные $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2}$ существуют почти всюду в $Q_T = [0,1]\times\ \times[-T,T]$ при любом $T > 0$ и для таких x, t они совпадают.

Из лемм 2 и 3 получается

Теорема 3. Функция $u_0(x,t)$ есть классическое решение эталонной задачи, т. е. $u_0(x,t)$ удовлетворяют условиям (1)–(3) с функцией $\psi_1(x)$ вместо $\psi(x)$, когда уравнение (1) с $q(x) = 0$ удовлетворяется почти всюду.

Лемма 4. Ряд $u_1(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием до второго порядка по x и t, сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$.

Теорема 4. Если $\psi(x) \in W_2^1[0,1], \psi(0) = \psi(1) = 0$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (1)–(3) является классическим решением этой задачи, когда уравнение (1) выполняется почти всюду.

Исследование задачи (1)–(3) для $\psi(x) \in L_2[0,1]$

В этом случае сохраняется представление (11) формального решения.

Лемма 5. Ряд $u_1(x,t)$ и ряд, получающийся из него почленным дифференцированием по t, сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$.

Далее исследуется ряд $u_0(x,t)$.

Лемма 6. Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его суммы имеет место формула

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x-t) - \Phi(x+t)], \tag{12}$$

где $\Phi(x) = \Phi(-x)$, $\quad\Phi(x+2) = \Phi(x)$, $\quad\Phi(x) = \int_x^1 \psi_1(\tau)d\tau$ на $[0,1]$. Кроме того, существует $u'_{0t}(x,0)$ для почти всюду $x \in [0,1]$ и $u'_{0t}(x,0) = \psi_1(x)$.

Из леммы 6 следует

Лемма 7. Функция $u_0(x,t)$ из (12) удовлетворяет условиям (3) и $u_0(x,0) = 0$; $u_0(x,t)$ абсолютно непрерывна по t, почти всюду на $[0,1]$ существует $u'_{0t}(x,0)$ и $u'_t(x,0) = \psi_1(x)$.

Лемма 8. Сумма ряда $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (3) и $u(x,0) = 0$; $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по t почти всюду на $[0,1]$, существует $u'_t(x,0)$ и $u'_t(x,0) = \psi(x)$.

Обобщенное решение задачи (1)–(3)

Далее показывается, что сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (1)–(3) является обобщенным решением этой задачи для любой $\psi(x) \in L_2[0,1]$.

Лемма 9. Для $u(x,t)$ имеет место оценка $\max_{Q_T} |u(x,t)| \leqslant C_T \|\psi\|_2$, где постоянная C_T зависит только от T и $\|\cdot\|_2$ — норма в $L_2[0,1]$.

Пусть $\psi_h(x)$ имеет тот же смысл, что и $\psi(x)$ в теореме 4 и $u_h(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) для такой $\psi_h(x)$. Тогда из леммы 9 следует

Теорема 5. Если $\psi(x) \in L_2[0,1]$ и $\|\psi_h - \psi\|_2 \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3).

Пусть теперь $\psi(x) \in L[0,1]$. Далее показывается, что формальное решение задачи (1)–(3), которое также берется в виде (11), и в этом случае является обобщенным решением этой задачи.

Так же, как в лемме 9 получается

Лемма 10. Ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и справедлива оценка $\max_{Q_T} |u_1(x,t)| \leqslant C_T \|\psi\|_1$, где постоянная C_T зависит только от T и $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$.

Лемма 11. Ряд $u_0(x,t)$ сходится равномерно в Q_T и для его суммы справедлива формула (12).

Из леммы 11 следует

Лемма 12. Имеет место оценка $\max_{Q_T} |u_0(x,t)| \leqslant C\|\psi\|_1$.

Пусть $\psi_h(x)$ и $u_h(x,t)$ - те же, что и в теореме 5, тогда из лемм 10–12 получается следующий результат.

Теорема 6. Если $\psi(x) \in L[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (1)–(3) удовлетворяет условиям (3) и $u(x,0) = 0$. Кроме того, если $\|\psi_h - \psi\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3).

Таким образом, если $\psi(x) \in L[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (1)–(3) обладает более слабыми, по сравнению со свойствами обобщенного решения, когда $\psi(x) \in L_2[0,1]$.

В **четвертом** разделе исследуется задача (1), (2), (4).

Исследование задачи (1), (2), (4) для $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$

Пусть в задаче (1), (2), (4) $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Теперь оператор L такой:

$$Ly = -y'' + q(x)y,$$
$$u_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \quad u_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0.$$

Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и для них верна асимптотика из раздела 3. Контуры $|\lambda| = r, \gamma_n, \tilde{\gamma}_n$ - те же, что и в разделе 3. Формальное решение (10) сохраняется, а оператор L_0 тоже другой: $L_0 y = -y'',\ y'(0) = y'(1) = 0$.

Представляя $\psi(x)$ в виде $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, где $\psi_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора L), формальное решение представляется в виде $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda^0\psi_1\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda, \tag{13}$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda\psi_1 - R_\lambda^0\psi_1\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda, \tag{14}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda\psi_2\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left(R_\lambda g\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

R_λ^0 - резольвента оператора $L_0, g = (L - \mu_0 E)\,\psi_2, \mu_0$ находится вне контуров $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \geqslant n_0$.

Теорема 7. Имеют место формулы

$$R_\lambda f = v_1(x,\rho)\,(f,z_1) + v_2(x,\rho)\,(f,z_2) - (M_\rho f)\,(x),$$

$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x,\rho)\left(f,z_1^0\right) + v_2^0(x,\rho)\left(f,z_2^0\right) - \left(M_\rho^0 f\right)(x),$$

где M_ρ - прежний оператор, M_ρ^0 определяется через $z_j^0(x,\rho)$ вместо $z_j(x,\rho)$ $(j = 1,2)$, $v_1^0(x,\rho) = -\frac{\cos\rho\cos\rho x}{\rho\sin\rho}$, $v_2^0(x,\rho) = -\cos\rho x$.

Так же, как и леммы 1, 2, получаются две следующие леммы.

Лемма 13. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = (\psi_1,1)\,t + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\,(\psi_1(\xi),\cos n\pi\xi)\cos n\pi x\sin n\pi t.$$

Лемма 14. Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула $u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\tilde\psi(\tau)d\tau$, где $\tilde\psi(-x) = \tilde\psi(x), \tilde\psi(x+2) = \tilde\psi(x), \tilde\psi(x) = \psi_1(x)$ при $x\in[0,1]$.

Лемма 3 и теорема 3 сохраняются, но теперь $u_0(x,t)$ есть решение (1), (2) с функцией $\psi_1(x)$ из (13) вместо $\psi(x)$ при $q(x) = 0$ с условиями $u'_{0x}(0,t) = u'_{0x}(1,t) = 0$. Сохраняется также и лемма 4, которая верна также и для $u_2(x,t)$.

Теорема 8. Если $\psi(x)\in W_2^1[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (1), (2), (4) есть классическое решение этой задачи, когда уравнение (1) выполняется почти всюду.

Исследование задачи (1), (2), (4) для $\psi(x)\in L_2[0,1]$

Пусть в задаче (1), (2), (4) $\psi(x)\in L_2[0,1]$. В этом случае формальное решение берется в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{15}$$

где $u_0(x,t)$ и $u_1(x,t)$ есть (13) и (14) с функцией $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$.

Лемма 15. Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула $u_0(x,t) = (\psi,1)t + \frac{1}{2}[\Phi(x+t) - \Phi(x-t)]$, где $\Phi(x) = -\Phi(-x), \Phi(x+2) = \Phi(x), \Phi(x) = \int_0^x[\psi(\tau)-(\psi,1)]d\tau$ *при* $x\in[0,1]$.

Лемма 16. Ряд $u_1(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t один раз, сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T>0$.

Лемма 17. Если $\psi(x)\in L_2[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по x,t и $u(x,0) = 0$; почти всюду на $[0,1]$ существует $u'_t(x,0)$ и почти всюду на $(-\infty,\infty)$ существуют $u'_x(0,t), u'_x(1,t)$; почти всюду выполняются $u'_t(x,0) = \psi(x)$ и условия (4).

Обобщенное решение задачи (1), (2), (4)

Пусть $\psi_h(x)$ — та же, что и $\psi(x)$ в разделе 6, и $u_h(x,t)$ — решение задачи (1), (2), (4) с функцией $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, представленное в теореме 8. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 9, получается следующий результат.

Теорема 9. Если $\psi(x) \in L_2[0,1]$ и $\|\psi_h - \psi\|_2 \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1), (2), (4).

Далее рассматривается случай, когда в задаче (1), (2), (4) $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение имеет вид (15). В этом случае лемма 10 сохраняется.

Лемма 18. Ряд $u_0(x,t)$ сходится всюду при $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$, причем $\max_{Q_T} |u_0(x,t)| \leqslant c_T \|\psi\|_1$, где постоянная c_T зависит только от T.

Если $\psi_h(x)$ и $u_h(x,t)$ — те же, что и в теореме 9, то следует

Теорема 10. Если $\psi(x) \in L[0,1]$, то ряд $u(x,t)$ формального решения задачи (1), (2), (4) сходится всюду при $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty, \infty)$ и $u(x,0) = 0$. Более того, если $\|\psi_h - \psi\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи (1), (2), (4) сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$. Таким образом, $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1), (2), (4) для $\psi(x) \in L[0,1]$.

В **девятом** разделе описана практическая часть. В качестве самостоятельной работы был написан программный код, для подсчета резольвенты оператора в случае двух типов граничных условий: когда концы закреплены и когда каждое из граничных условий содержит производную по x. В качестве инструмента разработки был использован пакет прикладных программ Matlab. Алгоритм работы программы, код и результаты приведены в магистерской работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской работе была исследована смешанная задача для волнового уравнения с непрерывным комплексным потенциалом в случае нулевого начального положения и ненулевой начальной скорости, а также двух типов двухточечных граничных условий: когда концы закреплены и когда каждое из граничных условий содержит производную по x. С использованием резольвентного подхода в методе Фурье, было получено классическое решение в случае $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ (уравнение удовлетворяется почти всюду). Было также показано, что в случае, когда $\psi(x) \in L[0,1]$, ряд формального решения для задачи с закрепленными концами сходится равномерно в любой ограниченной области, а для второй задачи он сходится лишь всюду, и для обеих задач является обобщенным решением в равномерной метрике. Также, с помощью пакета прикладных программ Matlab был написан программный код, с помощью которого рассчитывается резольвента оператора для наперед заданной функции в случае двух типов граничных условий.