Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

О двукратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов n-го порядка с постоянными коэффициентами

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 117 группы

направления 1.04.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета

Карпова Кирилла Алексеевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент | | В.С. Рыхлов
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:
д.ф.-м.н., профессор | | А. П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Саратов 2020 г.

Введение

Многие проблемы современного естествознания приводят к необходимости спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов, а так же пучков таких операторов. Спектральный анализ включает в себя вопросы полноты и базисности систем корневых функций, вопросы о разложения в биортогональные ряды Фурье по корневым функциям (к.ф), вопросы асимптотики спектра и т.д.

В $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным (присутствуют только главные члены) дифференциальным выражением (д.в.) n -го порядка

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, p_{n0} \neq 0 \tag{1}$$

и линейно независимыми однородными двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l} \tag{2}$$

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n} \tag{3}$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}, \varkappa_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}, 1 \leq l \leq n-1$.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, известные определения собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к.ф) кратной $(1 \leq m \leq n)$ полноты к.ф.

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная полнота к.ф. этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$.

Основное содержание работы

Основополагающей по этой проблеме является работа М.В Келдыша 1951г., в которой была сформулирована теорема об n-кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д.в. со специальной главной частью.

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{ возмущение }\}$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в статье Хромова А.П. в 1973г. в случае аналитических коэффициентов д.в. и в 1976г. Шкаликовым А.А. в случае суммируемых коэффициентов. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен в W. Eberhard'ом. Детальное исследование вопроса об m-кратной $(1 \le m \le n)$ полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия – полу-распадающиеся, проведено Вагабовым В.И. Полу-распадающиеся краевые условия – это такие краевые условия, когда l $(2l \ge n)$ краевых условий берутся только в одном конце основного отрезка $[0,1]$ (например, в 0), а остальные $n-l$ краевых условий берутся и в 0 и в 1.

Предположим, что корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих от начала, в количествах k и $n-k$ $(0 \le k \le n)$ Не нарушая общности можно считать, что корни ω_j расположены следующим образом:

$$\omega_n e^{i(\pi-\varphi)} < \omega_{n-1} e^{i(\pi-\varphi)} < \cdots < \omega_{k+1} e^{i(\pi-\varphi)} < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k \qquad (4)$$

где $0 < |\varphi| < \pi$ (см. рис. 1). То есть первые k корней ω_j лежат на положительном луче, а остальные $n-k$ корней на луче, исходящем из начала под углом φ. В случае одного луча ($k = n$ или $k = 0$), ради единообразия дальнейших выкладок, считаем, что $\varphi = 0$ и $k = n$, то есть формально тоже два луча, но один луч не содержит корней.

Обозначим $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[p,q]_+ = \max\{p,q\}$, $[p]_+ = [p,0]_+$ и положим при $j=\overline{1,n}$

$$a_{ij}=\sum_{v+s=\varkappa_i}\alpha_{ivs}\omega_j^v,\, i=\overline{1,l}; b_{ij}=\sum_{v+s=\varkappa_i}\beta_{ivs}\omega_j^v,\, i=\overline{l+1,n}$$

Используя эти обозначения, введем следующие условия отличия от нуля главного члена асимптотики характеристического определителя пучка $L(\lambda)$ (то, что это так, будет видно из доказательства):

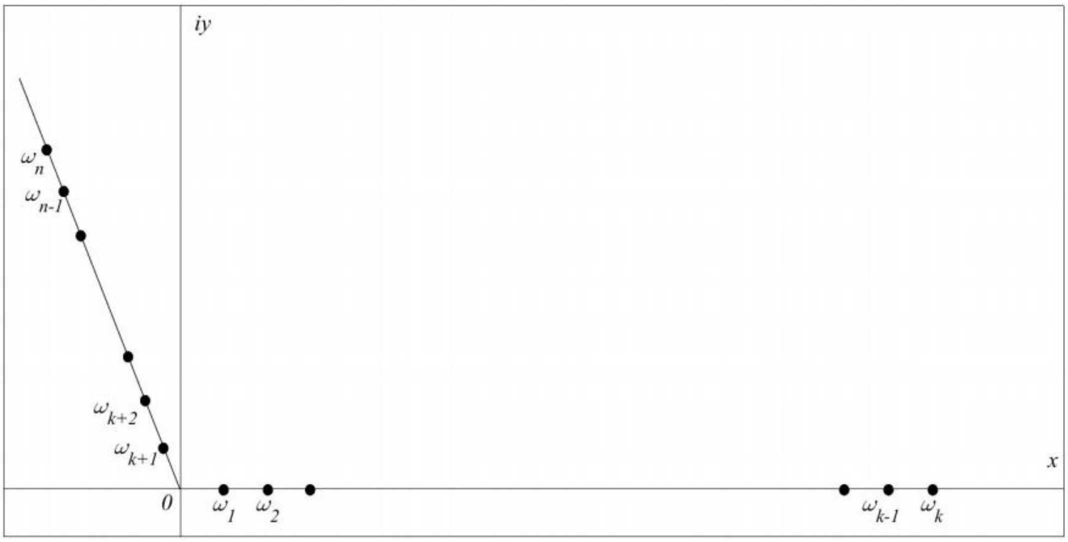

Рисунок 1 – Расположение характеристик

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i=1,l}^{j=\frac{1,k+l-n;k+1,n}{j}}\neq 0,\quad \det\left(b_{ij}\right)_{i=l+1,n}^{j=\overline{k+l-n+1,k}}\neq 0 \text{ при } n-k\leq l \tag{5}$$

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i=1,l}^{j=\frac{\overline{n-l+1,n}}{1}}\neq 0,\quad \det\left(b_{ij}\right)_{i=l+1,n}^{j=\overline{1,n-l}}\neq 0 \text{ при } n-k\geq l \tag{6}$$

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i=1,l}^{j=\overline{n,l}}\neq 0,\quad \det\left(b_{ij}\right)_{i=l+1,n}^{j=\overline{l+1,n}}\neq 0 \text{ при } k\leq l \tag{7}$$

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i=1,l}^{j=\overline{k-l+1,k}}\neq 0,\quad \det\left(b_{ij}\right)_{i=l+1,n}^{j=\overline{1,k-l:k+1,n}}\neq 0 \text{ при } k\geq l \tag{8}$$

Отметим, что в крайнем случае $n-k=l$ условия (5) и (7) совпадают. Аналогично. В крайнем случае $k=l$ совпадают условия (7) и (8).

Теорема 1. *Если* $[k,n-k]_+\geq l$ *и выполняются условия* (5) *и* (7), *то при* $m=2(n-l)$ *система к.ф. пучки* (1)-(3) m*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $d_1:=\sum_{i=l+1}^{n}[m-1-\varkappa_i]_+$.

Теорема 2. *Если* $[k,n-k]_-\geq l$ *и выполняются условия* (6) *и* (8), *то при* $m=2l$ *система к.ф. пучки* (1)-(3) m*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $d_2:=\sum_{i=l+1}^{n}[m-1-\varkappa_i]_+$.

Два крайних подслучая из теоремы 1 и 2 объединим в отдельной теореме. Это соответствует случаю регулярного пучка.

Теорема 3. *Если* $[k, n-k]_+ = [k, n-k]_- = l$ *или, что эквивалентно,* $n = 2k = 2l$ *и выполняются условия* (5) *(или* (6) *и* (7) *(или* (8)*), то система к.ф. пучки* (1)-(3) m*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $[d_1, d_2]_-$ *в случае, если по-крайней мере для одного* $i = \overline{1,n}$ *выполняется неравенство* $\varkappa_i > n-1$*, и с нулевым дефектом в противном случае.*

В доказательстве теорем 1 и 2 отмечено, что в случае

$$[k, n-k]_- < l < [k, n-k]_+ \tag{9}$$

который исключен из рассмотрения и теоремах 1-3. используемый метод рассуждений не проходит из-за пока непреодолимых трудностей. Условие (9) – случай пучка $L(\lambda)$ с устойчивой сильной нерегулярностью, то есть такой сильной нерегулярностью, которая имеет место при любых значениях коэффициентов краевых условий α_{ijs} иβ_{ijs}.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (4), (9) *и характеристический многоугольник* M_Δ *пучка* (1)-(3) *касается сторон* $A'B'$ *и* $C'D'$ *многоугольника* M*. Тогда если* $m = [k, n-k]_-$*, то система его к.ф.* m*-кратна полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом.*

Утверждение 1. *Функции* $\widetilde{\Phi}_1(x,\lambda), \ldots, \widetilde{\Phi}_l(x,\lambda)$ *) являются линейно независимыми решениями уравнения* $\ell(y,\lambda) = 0$ *удовлетворящими последним* $n-l$ *краевым условиям* (3)*, а функции* $\widetilde{\Phi}_{l+1}(x,\lambda), \ldots, \widetilde{\Phi}_n(x,\lambda)$ *являются линейно независимыми решениями того же уравнения удовлетворяющими первым* l *краевым условиям* (2)*.*

Утверждение 2. *Функции* $\tilde{\theta}_1(\lambda), \ldots, \tilde{\theta}_n(\lambda)$ *не зависит от выбора ф.с.р. уравнения* $\ell(y,\lambda) = 0$*.*

Лемма 1. *Предположим, что для пучка* $L(\lambda)$ *выполняются неравенства*

(4). *Тогда при* $|\lambda| >> 1$*имеют место оценки*

$$|\theta_i(\lambda)| \leq C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_i} \tag{10}$$

где $C(\varepsilon)$ *– константа, зависящая только от* ε *при следующих предположениях:*

1. в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$

1.1. при $n-k<l, i=\overline{l+1,n}$ *и выполнении условия* (5);

1.2. при $n-k=l, i=\overline{1,n}$ *и выполнении условия* (5) *или* (6) *(условия* (5) *или* (6) *в этом случае совпадают);*

1.3. при $n-k>l, i=\overline{1,n}$ *и выполнении условия* (6);

2. В случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^{+-}$

2.1. при $k<l, i=\overline{l+1,n}S$ *и выполнении условия* (7);

2.2. при $k=l, i=\overline{1,n}$ *и выполнении условия* (7) *или* (8) *(условие* (7) *и* (8) *в этом случае совпадают);*

2.3. при $k>l, i=\overline{1,n}$ *и выполнении условия* (8).

Лемма 2. *Если* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ *и* $|\lambda| \gg 1$, *то при* $n-k \leqslant l$ *выполнении условий* (5) *имеет место следующая оценка снизу:*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+1-n}^k \omega_\nu} \right|, \tag{11}$$

а при $n-k \geq l$ *и выполнении условий* (6) *— оценка снизу*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=1}^{n-l} \omega_\nu} \right|, \tag{12}$$

где $C(\varepsilon) > 0$ *есть константа, зависящая только от* ε *и от параметров пучка* $L(\lambda)$.

Лемма 3. *Если* $|\lambda| >> 1$, *то в случае* 1) *из леммы* 1, *т. е. когда* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$, *имеют место следующие утверждения:*

1. при $n-k<l$, $i=\overline{l+1}$, n *справедлива оценка сверху*

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+1-n}^k \omega_\nu} \right| \tag{13}$$

2. при $n-k=l$, $i=\overline{l,n}$, n *справедлива та же оценка* (13);

3. при $n-k>l$, $i=\overline{l,l}$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=1}^{n-l}\omega_\nu}\right|. \tag{14}$$

Замечание 1. *Отметим, что в случае $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$ при $n-k<l$, $i=\overline{l,l}$ вместо оценки (13) имеет место не улучшаемая оценка сверху*

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l-n}^{k}\omega_\nu}\right|,$$

которая не позволяет получить в дальнейшем требуемый для доказательства основных теорем не более чем степенной рост функции $|\Theta_i(\lambda)|S$. Аналогично обстоит дело в случае $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$ при $n-k>l$, $i=\overline{l+1,n}$.

Лемма 4. *Если $\lambda\in\Pi_\varepsilon^-$ и $|\lambda|>>1$, то при $k\le l$ и выполнении условий (7) имеет место следующая оценка снизу:*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=l+1}^{n}\omega_\nu}\right|, \tag{15}$$

а при $k>l$ и выполнении условий (8) – оценка снизу

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i}\left|e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+1}^{n-l}\omega_\nu+\sum_{\nu=1}^{k-l}\omega_\nu\right)}\right|. \tag{16}$$

Лемма 5. *Если $|\lambda|>>1$, то в случае 2) из леммы 1, т. е. когда $\lambda\in\Pi_\varepsilon^-$, имеют место следующие утверждения:*

1. при $k<l, i=\overline{l+1,n}$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=l+1}^{n}\omega_\nu}\right|; \tag{17}$$

2. при $k=l, i=\overline{1,n}$ справедлива та же оценка (17);

3. при $k>l, i=\overline{1,l}$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+1}^{n}\omega_\nu+\sum_{\nu=1}^{k-l}\omega_\nu\right)}\right|. \tag{18}$$

Отметим, что при $k=l$ оценки (17) и (18) совпадают.

Утверждение 3. *Отметим, что в случае $\lambda\in\Pi_\varepsilon^-$ при $k<l, i=\overline{1,l}$ вместо оценки (17) имеет место не улучшаемая оценка сверху*

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=l}^{n}\omega_\nu}\right|,$$

которая не позволяет получить в дальнейшем требуемый для доказательства основных теорем не более чем степенной рост функции $|\Theta_i(\lambda)|$. Ана-

логично обстоит дело в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ *при* $k > l, i = \overline{l+1, n}$.

Приведем пример использования теорем 1 и 2. Исследуем кратную полноту системы к.ф. пучка

$$y^{(5)} - (7+4i)\lambda y^{(4)} + (11+28i)\lambda^2 y''' + (13-56i)\lambda^3 y'' + (32i-42)\lambda^4 y' + 24\lambda^5 y, \quad (19)$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = 0. \quad (20)$$

Для рассматриваемого пучка n = 5, l = 3

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = 4, \quad \omega_4 = i, \quad \omega_5 = 3i, \quad (21)$$

т. е. характеристики лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах $k = 3$ и $n - k = 2$.

Так как $[k, n-k]_+ = max\{3, 2\} = 3 = l$, то для исследования кратной полноты можно воспользоваться теоремой 1. Для этого нужно проверить выполнение условий (5) и (7).

Подсчитаем параметры a_{ij} и b_{ij}. Из вида краевых условий (20) и (2)–(3) следует, что для рассматриваемого пучка

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 1, \quad \varkappa_3 = 2, \quad \varkappa_4 = 0, \quad x_5 = 1$$

$$\alpha_{100} = \alpha_{210} = 1, \alpha_{201} = 0, \alpha_{320} = 1, \alpha_{311} = \alpha_{302} = 0, \quad \beta_{400} = \beta_{510} = 1, \quad \beta_{501} = 0.$$

Таким образом

$$a_{1j} = 1, \quad a_{2j} = \omega_j, \quad a_{3j} = \omega_j^2, \quad b_{4j} = 1, \quad b_{5j} = \omega_j, \quad j = \overline{1, 5},$$

т.е

$$a_{11} = 1, \; a_{12} = 1, \; a_{13} = 1, \; a_{14} = 1, \; a_{15} = 1;$$

$$a_{21} = 1, \; a_{22} = 2, \; a_{23} = 4, \; a_{24} = i, \; a_{25} = 3i;$$

$$a_{31} = 1, \; a_{32} = 4, \; a_{33} = 16, \; a_{34} = -1, \; a_{35} = -9;$$

$$b_{41} = 1, \; b_{42} = 1, \; b_{43} = 1, \; b_{44} = 1, \; b_{45} = 1;$$

$$b_{51} = 1, \; b_{52} = 2, \; b_{53} = 4, \; b_{54} = i, \; b_{55} = 3i.$$

Проверим отличие от нуля определителей, которые фигурируют в условиях теоремы 2, а именно определителей (5) и (7):

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 3i \\ 1 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 8 - 4i \neq 0,$$

$$\det\left(b_{ij}\right)_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} = \begin{vmatrix} b_{42} & b_{43} \\ b_{52} & b_{53} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

$$\det\left(b_{ij}\right)_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l-1,n}} = \begin{vmatrix} b_{44} & b_{45} \\ b_{54} & b_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & 3i \end{vmatrix} = 2i \neq 0.$$

Следовательно, для рассматриваемого пучка (19)–(20) все условия теоремы 1 выполнены. Так как в данном случае $m = 2(n-l) = 2(5-3) = 4$ и

$$d_1 = [m-1-\varkappa_4]_+ + [m-1-\varkappa_5]_+ = [3-0]_+ + [3-1]_+ = 3+2 = 5,$$

то по теореме 1 получим, что система к.ф. пучка (19)–(20) 4-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом не больше 5.

Исследуем теперь кратную полноту системы к.ф. пучка, порожденного тем же д.в. (19), но другими краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0. \tag{22}$$

Для рассматриваемого пучка $n = 5, l = 1$ и характеристики те же, что и для уже рассмотренного примера, а именно (21), т. е. характеристики лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах $k = 3$ и $n - k = 2$.

Так как $[k, n-k]_+ = min\{3, 2\} = 2 \geq l = 1$, то для исследования кратной полноты можно воспользоваться теоремой 2. Для это нужно проверить выполнение условий (6) и (8).

Подсчитаем параметры a_{ij} и b_{ij}. Из вида краевых условий (22) и (2)–(3) следует, что для рассматриваемого пучка

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 0, \ \varkappa_3 = 1, \quad \varkappa_4 = 2, \quad \varkappa_5 = 3;$$

$$\alpha_{100} = 1, \quad \beta_{200} = \beta_{310} = 1, \ \beta_{301} = 0, \quad \beta_{420} = 1, \quad \beta_{411} = \beta_{402} = 0,$$

$$\beta_{530} = 1, \quad \beta_{521} = \beta_{512} = \beta_{503} = 0.$$

Таким образом

$$a_{1j} = 1, \quad b_{2j} = 1, \quad b_{3j} = \omega_j, \quad b_{4j} = \omega_j^2, \quad b_{5j} = \omega_j^3, \quad j = \overline{1,5},$$

т.е

$$a_{11} = 1, \ a_{12} = 1, \ a_{13} = 1, \ a_{14} = 1, \ a_{15} = 1;$$
$$b_{21} = 1, \ b_{22} = 1, \ b_{23} = 1, \ b_{24} = 1, \ b_{25} = 1;$$
$$b_{31} = 1, \ b_{32} = 2, \ b_{33} = 4, \ b_{34} = i, \ b_{35} = 3i;$$
$$b_{41} = 1, \ b_{42} = 4, \ b_{43} = 16, \ b_{44} = -1, \ b_{45} = -9;$$
$$b_{51} = 1, \ b_{52} = 8, \ b_{53} = 64, \ b_{54} = -i, \ b_{55} = -27i.$$

Проверим отличие от нуля определителей, которые фигурируют в условиях теоремы 2, а именно определителей (6) и (8):

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} = \det\left(a_{15}\right) = \det(1) = 1 \neq 0,$$

$$\det\left(b_{ij}\right)_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & i \\ 1 & 4 & 16 & -1 \\ 1 & 8 & 64 & -i \end{vmatrix} = -6 + 78i \neq 0,$$

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} = \det\left(a_{13}\right) = \det(1) = 1 \neq 0,$$

$$\det\left(b_{ij}\right)_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & i & 3i \\ 1 & 4 & -1 & -9 \\ 1 & 8 & -i & -27i \end{vmatrix} = -24-68i \neq 0.$$

Следовательно, для рассматриваемого пучка (19), (22) все условия теоремы 2 выполнены. Так как в данном случае $m = 2l = 2 \cdot 1 = 2$ и $d_2 =$

$[m-1-\varkappa_1]_+ = [1-0]_+ = 1$, то по теореме 2 получим, что система к.ф. пучка (19), (22) 2-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом не больше 1.

Заключение

В представленной работе был изучен вопрос об условии n и m-кратной полноты $(1 \le m \le n)$ в $L_2[0,1]$ корневых функций пучка $L(\lambda)$ вида (1)-(3) с постоянными коэффициентами. Описанная теория была применена к сильно нерегулярному пучку n-порядка с распадаюшимся краевыми условиями в случае $1 < l < n-1$ и были получены достаточные условия двукратной полноты. Были построены характеристические многоугольники алгоритмом Грэхама с помощью пакета прикладных программ MATLAB и MuPAD.