МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с закрепленными краевыми условиями

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Донскова Игоря Вячеславовича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор ________ Хромов А. П.
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________ Хромов А. П.
подпись, дата

Саратов, 2020 год

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Метод Фурье - один из важнейших математических методов. Впервые строгое обоснование метода Фурье смог дать академик В. А. Стеклов. Метод Фурье получил широкое распространение, в этой области были достигнуты значительные успехи И.Г.Петровским, В.И.Смирновым, О. А. Ладыженской, В.А.Ильиным. Но у данного подхода есть существенный недостаток: требуется завышение гладкости начальных данных.

В ходе исследований по ускорению сходимости рядов Фурье А. Н. Крылов разработал прием, который сводит вопрос о дифференцировании ряда к изучению двух других рядов, которые получаются путем разбиения первого. Один из этих рядов точно суммируется, а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно дифференцировать почленно. А. Н. Крылов успешно преодолел трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования на ряде конкретных прикладных задач.

В. А. Чернятин, воспользовавшись приемом А. Н. Крылова и асимптотикой для собственных значений и собственных функций, успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости условия гладкости, более того, в ряде случаев эти условия стали минимально возможными.

Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А. Н. Крылова, В. А. Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий исследовать смешанные задачи методом Фурье с исчерпывающей полнотой. Кроме того ставится много новых важных вопросов в теории функций.

Резольвентный подход к методу Фурье, который излагается в работах А.П. Хромова, В. В. Корнева, М. Ш. Бурлуцкой позволяет найти решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с ослабленными условиями гладкости без использования информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи.

В данной работе исследуется резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на исходные данные.

Цель работы. Необходимо дать обоснование метода Фурье при получении классического решения в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на начальные данные. Написать программный код для вычисления резольвенты функции в случае нулевого потенциала.

Структура работы. Данная работа состоит из введения, основной части, заключения,списка использованных источников и приложений. Основная часть включает в себя 5 глав: Постановка задачи, Частные случаи, Вспомогательные утверждения, Основная теорема, Практическая часть.

Научная новизна. В магистерской работе излагается резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче, в случае, когда волновое уравнение неоднородное и его потенциал комплекснозначный. Приведены строгие математические доказательства. Данные результаты имеют высокую научную значимость.

Положения выносимые на защиту. Подробно изложен резольвентный подход к методу Фурье, получено классическое решение для поставленной задачи, написан программный код для подсчета резольвенты.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первом** разделе рассматривается смешанная задача следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q = [0,1] \times (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где все функции предполагаются комплекснозначными, причем

$$q(x) \in C[0,1],\ \varphi(x) \in C^2[0,1],\ \psi(x) \in C^1[0,1],\ f(x,t) \text{ непрерывна в } Q. \tag{4}$$

Определение 1. Классическим решением данной задачи будет называться функция $u(x,t)$, для которой выполняются два условия:
1) $u(x,t) \in C^2(Q)$,
2) $u(x,t)$ удовлетворяет данной задаче.

Накладываются необходимые условия для существования классического решения:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \tag{5}$$

$$\varphi''(0) + f(0,0) = \varphi''(1) + f(1,0) = 0. \tag{6}$$

Дополнительно необходимо потребовать, чтобы

$$f_t'(x,t) \in C(Q). \tag{7}$$

Основной задачей ВКР является доказательство того факта, что при сделанных предположениях формальный ряд, построенный по методу Фурье, сходится и его сумма является классическим решением поставленной задачей.

Далее в работе приводится ряд теорем, близких к результатам основной теоремы данной ВКР.

Во **втором** разделе исследовалась вспомогательная спектральная задача с вещественнозначным потенциалом, для которой была получена асимптотика собственных значений. Эта асимптотика была распространена на случай комплексного потенциала. Были доказаны теорема 2 и 3 – частные случаи задачи (1)-(3).

Для собственных значений $\lambda_n = \rho_n^2$ оператора L, который задается соотношениями: $Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0$, при достаточно больших n справедлива асимптотика:

$$\rho_n = n\pi + \varepsilon_n, \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots, \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далее вводится вспомогательная задача и доказывается лемма о явной формуле резольвенты.

Пусть $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения $y'' - q(x) + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z_1(0,\rho) = z_2'(0,\rho) = 1$ и $z_1'(0,\rho) = z_2(0,\rho) = 0$. Функции $z_j(x,\rho)$ целые по ρ и λ, $j = 1, 2$.

Лемма 1. Для R_λ имеет место формула

$$R_\lambda g = -z_2(x,\rho)\,(g, z_1) + v(x,\rho)\,(g, z_2) + M_\rho g,$$

где $(g,z)=\int_0^1 g(x)z(x)dx,\quad v(x,\rho)=z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)z_2^{-1}(1,\rho)$,

$$M_\rho g=\int_0^x M(x,\xi,\rho)g(\xi)d\xi,\qquad M(x,\xi,\rho)=\begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho)\\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho)\end{vmatrix}.$$

Так же устанавливается связь метода Фурье со спектральной задачей для оператора второго порядка.

Вводятся окружности $\tilde\gamma_n=\{\rho|\,|\rho-n\pi|=\delta\}$, где $\delta>0$ и достаточно мало, $n\geqslant n_0$, а n_0 таково, что внутри $\tilde\gamma_n$ находится только одно ρ_n. Пусть γ_n — образ $\tilde\gamma_n$ в λ-плоскости $\left(\lambda=\rho^2,\quad \operatorname{Re}\rho\geqslant 0\right)$. Формальное решение поставленной задачи по методу Фурье задачи берется в виде

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left[\left(R_\lambda\varphi\right)(x)\cos\rho t+\frac{1}{\rho}\left(R_\lambda\psi\right)(x)\sin\rho t+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\left(R_\lambda f\right)(x,\tau)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right]d\lambda, \tag{8}$$

где $R_\lambda f$ – значение R_λ на функции $f(x,\tau)$ как функции x, $r>0$ фиксировано, и контур $|\lambda|=r$ содержит внутри только те λ_n, номера которых меньше n_0, причем на самом контуре собственных значений нет.

Правая часть формулы представляет собой формальный ряд, построенный по методу Фурье.

Теорема 1. Если $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1)-(3), то для него справедлива формула (8), причем ряд сходится равномерно по $x\in[0,1]$ при каждом фиксированном t.

Следующие две теоремы – частные случаи задачи (1)-(3).

Вначале – для однородного уравнения (1) справедлива теорема:

Теорема 2. Пусть в задаче (1)-(3) $f(x,t)=0$. Тогда ряд в (8) сходится абсолютно и равномерно в $Q_T=[0,1]\times[-T,T]$, где $T>0$ — произвольное фиксированное число, и формальное решение (8) есть классическое решение этой задачи.

Следующий частный случай задачи (1)-(3), когда $q(x)=\varphi(x)=\psi(x)=0$. Через R_λ^0 обозначается резольвента оператора L_0, который есть оператор L

при $q(x)=0$ с собственными значениями $\lambda_n^0=n^2\pi^2, n=1,2,\ldots$. По лемме 1

$$R_\lambda^0 g=-z_2^0(x,\rho)\left(g,z_1^0\right)+v^0(x,\rho)\left(g,z_2^0\right)+M_\rho^0 g \tag{9}$$

где $z_1^0, z_2^0, v^0, M_\rho^0$– те же, что и z_1, z_2, v, M_ρ, но взятые для оператора L_0. В этом случае

$$z_1^0(x,\rho)=\cos\rho x, \quad z_2^0(x,\rho)=\frac{1}{\rho}\sin\rho x, \quad v^0(x,\rho)=\sin\rho x\operatorname{ctg}\rho.$$

Далее доказывается теорема, справедливая для случая нулевых начальных данных.

Теорема 3. При выполнении условия $f(0,0)=f(1,0)=0$ классическое решение задачи (1)-(3) в случае $q(x)=\varphi(x)=\psi(x)=0$ существует и дается формулой

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(\int_0^t\left(R_\lambda^0 f\right)(x,\tau)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right)d\lambda$$

где $R_\lambda^0 f$– значение R_λ^0 на функции $f(x,\tau)$ как функции x, причем ряд сходится равномерно по $x\in[0,1]$ при любом фиксированном t.

В **третьем** разделе приведены некоторые вспомогательные данные, необходимые для понимания и исследования основной теоремы данной работы.

Вначале рассматривается **метод Фурье и задача Штурма – Лиувилля**, которая состоит в отыскании нетривиальных решений на промежутке (a,b) уравнения Штурма — Лиувилля

$$L[y]=\lambda\rho(x)y(x),$$

удовлетворяющих однородным краевым (граничным) условиям

$$\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=0, \qquad \alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0;$$
$$\alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=0, \qquad \alpha_2^2+\beta_2^2\neq 0;$$

и значений параметра λ, при которых такие решения существуют.

Оператор $L[y]$ здесь — это действующий на функцию $y(x)$ линейный дифференциальный оператор второго порядка вида

$$L[y]\equiv\frac{d}{dx}\left[-p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y(x),$$

(оператор Штурма — Лиувилля или оператор Шрёдингера), x — вещественный аргумент.

Функции $p(x), p'(x), q(x), \rho(x)$ предполагаются непрерывными на (a, b), кроме того функции $p(x), \rho(x)$ положительны на (a, b).

Искомые нетривиальные решения называются собственными функциями этой задачи, а значения λ, при которых такое решение существует — её собственными значениями (каждому собственному значению соответствует собственная функция).

Задачи Штурма — Лиувилля возникают при решении уравнений в частных производных методом разделения переменных (или методом Фурье) – метод решения дифференциальных уравнений, основанный на алгебраическом преобразовании исходного уравнения к равенству двух выражений, зависящих от разных независимых переменных.

Асимптотика собственных значений.

Суть данного пункта описывается теоремой:

Теорема. Собственные значения дифференциального оператора n-го порядка в интервале [0, 1], порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности λ_k', λ_k'' $(k = N, N+1, N+2, \ldots)$, где N - некоторое целое число.

При нечетном n, $n = 4q - 1$,

$$\lambda_k' = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],$$
$$\lambda_k'' = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],$$

а для нечетного n, $n = 4q + 1$,

$$\lambda_k' = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],$$
$$\lambda_k'' = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right];$$

где $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$– определенные корни уравнения $\theta_1 \xi + \theta_0 = 0$ отвечающего области S_ν с ν, соответственно нечетным и четным.

При четном n, $n = 2\mu$, и $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$

$$\lambda_k' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{10}$$

$$\lambda_k'' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{11}$$

где ξ' и ξ'' - корни уравнения

$$\theta_1 \xi^2 + \theta_0 \xi + \theta_{-1} = 0, \tag{12}$$

отвечающего области S_0, причем верхний знак в формулах (10)-(11) соответствует четному, а нижний - нечетному μ.

Наконец, при четном n, $n = 2\mu$, и $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$

$$\lambda_k' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \tag{13}$$

$$\lambda_k'' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \tag{14}$$

где ξ - (двойной) корень уравнения (12), отвечающего области S_0, а выбор верхнего или нижнего знака в формулах (13)-(14) следует производить по такому же правилу, как в (10)-(11).

В первых трех случаях все собственные значения, начиная с некоторого, простые, а в четвертом - начиная с некоторого, простые, или двукратные.

Резольвента и ее свойства.

Определение 2.

Пусть A — линейный оператор. Его резольвентой называется функция

$$R(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1},$$

где E — тождественный оператор, а λ — комплексное число, из резольвентного множества, то есть такого множества, что $R(\lambda)$ есть ограниченный оператор.

Операторы преобразования.

На интервале $(-a, a)$ $(a \leqslant \infty)$ рассматривается дифференциальное уравнение Штурма - Лиувилля

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0, \tag{15}$$

где $q(x)$ – непрерывная на этом интервале комплекснозначная функция (потенциал), а λ – комплексный параметр. В дальнейшем $q(x)$ будет потенциалом этого уравнения или соответствующего оператора Штурма - Лиувилля $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$. Через $e_0(\lambda, x)$ обозначаются решения уравнения (15) при начальных данных

$$e_0(\lambda, 0) = 1, \quad e_0'(\lambda, 0) = i\lambda \tag{16}$$

(здесь индекс "0" означает, что начальные данные задаются в точке 0, а буква e напоминает, что они такие же, как у функции $e^{i\lambda x}$, с которой совпадает $e_0(\lambda, x)$, если $q(x) \equiv 0$).

Интегральный оператор $I + K$, определенный формулой

$$(I + K)f = f(x) + \int_{-x}^{x} K(x,t)f(t)dt,$$

называется оператором преобразования, сохраняющим начальные условия в точке $x = 0$. Он переводит функции $e^{-i\lambda x}$ (решение простейшего уравнения (15) при начальных данных (16)) в решениях уравнения (15) при тех же начальных данных. Поскольку функции $e^{i\lambda x}$ и $e^{-i\lambda x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + \lambda^2 y = 0$, оператор $I + K$ преобразует любое решение этого уравнения в решении уравнения (15) при тех же начальных данных в точке 0.

Прием Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье.

Смысл этого приема заключается в следующем. Пусть имеется сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}), \tag{17}$$

с коэффициентами $a_n,\ b_n$ первого порядка малости относительно $1/n$. Они представляются в виде

$$a_n = \frac{A_n}{n} + \alpha_n, \qquad b_n = \frac{B_n}{n} + \beta_n,$$

где $\alpha_n,\ \beta_n$ имеют порядок малости относительно $1/n$ выше первого. Тогда ряд (17) можно записать как

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos\frac{\pi n x}{l} + \beta_n \sin\frac{\pi n x}{l}) + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{A_n}{n}\cos\frac{\pi n x}{l} + \frac{B_n}{n}\sin\frac{\pi n x}{l}).$$

Здесь первый ряд будет иметь порядок малости выше первого, что и требовалось. А второй ряд можно просуммировать с помощью известных разложений.

Если требуется более высокий порядок малости коэффициентов (т.е. более быстрая сходимость), то следует продолжить операцию улучшения сходимости. Для этого улучшенный ряд дифференцируется, затем снова выделяется главная часть вида $1/n$, и процедура улучшения сходимости повторяется.

Таким образом, последовательное выделение особенностей позволяет достичь необходимой скорости сходимости ряда Фурье. Такова общая схема метода.

Вспомогательные леммы необходимы для доказательства основной теоремы.

Лемма 2. При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место асимптотические формулы

$$v^{(j)}(x,\rho) = v^{0(j)}(x,\rho) + O\left(\rho^{j-1}\right), \quad j = 0,1,2,$$

где оценки $\mathrm{O}(\ldots)$ равномерны по $x \in [0,1]$.

Лемма 3. При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место формулы

$$(g, z_2) = (n\pi + \mu)^{-1}\left[(g_1(\xi)\cos\mu\xi, \sin n\pi\xi) + (g_1(\xi)\sin\mu\xi, \cos n\pi\xi)\right],$$

$$\left(g, z_2 - z_2^0\right) = (n\pi + \mu)^{-2}\left[(g_2(\xi)\cos\mu\xi, \cos n\pi\xi) - (g_2(\xi)\sin\mu\xi, \sin n\pi\xi)\right],$$

где $\rho = n\pi + \mu, \mu \in \tilde{\gamma}_0, g_1(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 K(s,\xi)g(s)ds, g_2(\xi) = -g(\xi)K(\xi,\xi) + \int_\xi^1 K'_\xi(s,\xi)g(s)ds, K(s,\xi)$ непрерывно дифференцируема по $s, \xi \in [0,1]$.

Лемма 4. Через $\gamma(x)$ обозначаются функции $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x,t) \in C\left(Q_T\right)$, $f(x,t,\mu) = f(x,t)\gamma(\mu x),\ \mu \in \tilde{\gamma}_0$ и $\beta_n(t,\mu) = (f(x,t,\mu), \gamma(n\pi x))$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(t,\mu)| \leqslant c \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2},$$

где постоянная c не зависит от t, μ, c_1 и c_2.

Вводится новое обозначение $a_n(x,t)$ и доказывается лемма о возможности почленного дифференцирования $a_n(x,t)$ по x и t:

$$a_n(x,t) = \int_{\gamma_n} \left(\int_0^t \left(R_\lambda f - R_\lambda^0 f \right)(x,\tau) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda.$$

Лемма 5. Ряды $\sum_{n\geqslant n_0} a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$ и $\sum_{n\geqslant n_0} a^{(j)}_{n,t^j}(x,t) \quad (j=0,1,2)$ сходятся абсолютно и равномерно по $(x,t) \in Q_T$.

В **четвертом** разделе изложена основная идея данной работы. Формальное решение (8) представляется в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t), \qquad \text{где}$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t \left(R_\lambda^0 f_1 \right) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \tag{18}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi) \frac{\sin\rho t}{\rho} d\lambda, \tag{19}$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t \left(R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1 \right) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \tag{20}$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left((R_\lambda \varphi)\cos\rho t + \int_0^t (R_\lambda f_2) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \tag{21}$$

$$f_1(x,\tau) = f(x,\tau) - f_2(x), \quad f_2(x) = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x).$$

Лемма 6. Ряд (18) сходится и функция $u_1(x,t)$ является классическим решением задачи (1)-(3) при $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$ с неоднородностью $f_1(x,t)$.

Лемма 7. Ряд (19) сходится и функция $u_2(x,t)$ является классическим решением задачи (1)-(3) при $\varphi(x) = 0$ и $f(x,t) = 0$.

Лемма 8. Ряд (21) сходится к функции $\varphi(x)$.

Лемма 9. Ряд (20) сходится, и функция $u_3(x,t)$ непрерывна вместе с частными производными $u''_{3,xx}(x,t)$ и $u''_{3,tt}(x,t)$, причем

$$u_3(0,t) = u_3(1,t) = u_3(x,0) = u'_{3,t}(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u''_{3,tt}(x,t) - u''_{3,xx}(x,t) = \frac{1}{2\pi i} q(x) \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_\lambda f_1) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda.$$

Основным результатом данного раздела и всей работы в целом является теорема 4.

Теорема 4. Если выполняются условия (4)-(7), то при любых $x \in [0,1]$ и $t \in \mathbb{R}$ формальный ряд (8) сходится, и его сумма $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1)-(3).

В **пятом** разделе описана практическая часть. В качестве самостоятельной работы был написан программный код, для подсчета резольвенты оператора по формуле (9). В качестве инструмента разработки был использован Matlab – пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений. Алгоритм работы программы, код и результаты приведены в магистерской работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской работе дается обоснование метода Фурье при получении классического решения в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на начальные данные. Используемый резольвентный подход не требует никакой информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи. Также, был разработан программный код, с помощью которого возможно посчитать резольвенту оператора для наперед заданной функции с помощью пакета прикладных программ для решения задач технических вычислений Matlab.