МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Двоичные базисные сплайны произвольной степени

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы

направления ***01.04.02 – Прикладная математика и информатика***

механико-математического факультета

Сиротиной Ольги Владимировны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________________ С.Ф. Лукомский
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________________ Д.В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно построение сплайна происходит следующим образом. Предположим для определенности, что мы хоти построить сплайн 3 степени. Дифференцируем сплайн 2 раза и для второй производной в узловых точках записываем систему линейных уравнений. Количество уравнений оказывается меньше, чем число уравнений, и чтобы решить эту систему, приходится добавлять одно или несколько дополнительных условий. Одно из них берется в начальной точке, другое в конечной точке отрезка, на котором строится сплайн.

После этого доказывается теорема, что если эти краевые условия выбраны подходящим образом, то существует единственный интерполяционный сплайн и для погрешности интерполяции справедлива оценка через модуль непрерывности. Краевые условия выбирают так, чтобы матрица системы имела преобладающую главную диагональ. В этом случае матрица системы невырожденная, и система имеет единственное решение. Так как матрица системы имеет преобладающую главную диагональ, то норма матрицы отделена от нуля и норма обратной матрицы ограничена сверху. Это позволяет получать оценку погрешности интерполяции. Таким образом задача существования сплайна и задача оценки погрешности соединены в одну задачу.

В настоящей работе предлагается разделить эти задачи. Отдельно решается задача построения интерполяционного сплайна. Таких сплайнов можно построить бесконечно много и они зависят от одного или нескольких параметров. При этом используются двоичные базисные сплайны. После этого решается задача выбора параметров, при которых погрешность интерполяции будет маленькой. Таким образом цель работы можно сформулировать следующим образом:

1. Указать метод построения интерполяционного сплайна, не требующий решений системы уравнений.

2. Нахождение параметров сплайна, при которых оценки погрешности выражаются через модуль непрерывности и шаг сетки.

Основное содержание работы

В первой главе данной работы были введены понятия сплайна, базисного сплайна и отмечены их основные свойства и способы получения.

Во второй главе данной работы были рассмотрены двоичные базисные сплайны в терминологии Дж.Уолша, существование и погрешность.

В третьей главе рассматривались двоичные базисные сплайны, полученные интегрированием функции Уолша. Был построен интнрполяционный сплайн второй степени на всей числовой прямой и на промежутке [0,1) с узлами интерполяции, лежащими в точках склейках, что давало не очень хороший результат погрешности.

Так же, был введен дополнительный четвертый параграф, в котором приведена информация о матрицах с преобладающей главной диагональю, который необходим для технических деталей и и такого рода матрицы испольтзуются при построении двоичного базисного сплайна.

В пятом параграфе третьей главы мы занимались построением двоичного базисного сплайна второй степени в узлах интерполиции, лежащих между точками склейки. Приводились численные и графические результаты, а так же были получены более хорошие результаты при вычислении погрешности, за счет подбора начальных условий.

Шестой параграф был посвящен обзору двоичных базисных сплайнов третьей степени, их построению, а так же были приведены оценки погрешностей.

Определение 0.1. *Сплайн — функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым алгебраическим многочленом (полиномом). Максимальная из степеней использованных полиномов называется степенью сплайна. Разность между степенью сплайна и получившейся гладкостью называется дефектом сплайна.*

Определение 0.2. *Сплайн называется интерполирующий, если*

$$S^{(m,r)}(x_k) = f(x_k), \tag{0.1}$$

где $f(x)$ - неизвестная функция, заданная своими значениями в точках x_k.

Замечание. Для того, чтобы провести через имеющиеся точки такой полином единственным образом, необходимо и достаточно, чтобы степень полинома была на 1 меньше, чем количество условий.

В работе Дж. Уолша «Теория сплайнов и ее приложения» рассматривалась традионная постановка задачи о базисных сплайнах - теорема о существовании и единственности сплайна. Начальные и краевые условия выбирались до процесса построения. В данной работе, этот вопрос был разделен. Сначала мы построили сплайн, а потом выбирали условия таким образом, чтобы погрешность была минимальна.

1 Базисные сплайны

В этом параграфе рассмотрены базисные сплайны как разделенные разности. Именно так были определены базисные сплайны первоначально.

2 Базисные сплайны как свертка функций.

В этом параграфе рассмотрены базисные сплайны, введенвые в 1983г. Стрембергом.

3 Интерполяционные классические сплайны 2-й степени, существование

В этом параграфе рассмотрены классические сплайны 2-й степени. Дается определение сплайна 2-й степени, указывается способ построения интерполяционного сплайна 2-й степени и доказываются теоремы о существовании сплайна. Доказаны также теоремы об оценке погрешности приближения интерполяционным сплайном.

Определение 3.1. *Сплайн $S(x)$ называется периодическим сплайном второй степени с периодом $(b-a)$, интерполирующим функцию f на сетке δ, если:*

1.$S_2(x+b-a)=S_2(x), -\infty<x<+\infty$

2. S_2 *имеет непрерывные первую и вторую производные на всём отрезке* $[a,b]$ *и* $S_2{}''(x) = S_k{}''(x)$ *при* $(x_{k-1}+x_k)/2 \leqslant x \leqslant (x_k+x_{k+1})/2$, *где* $S_k{}''$ *- константы,* $k=1,2,...,n$, $x_{n+1}=b-a+x_1-x_0$

3. $S_2(x_k)=f(x_k), k=0,1,\ldots,n.$

Пусть в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема и её $(n+1)$-я производная интегрируема. Тогда в окрестности точки x_0

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Положим

$$\begin{gathered}h_h=x_{k+1}-x_k,\quad k=0,1,\ldots,n\\ f(x_k,x_{k+1})=\tfrac{f(x_{k+1})-f(x_h)}{h_k}\\ f(x_{k-1},x_k,x_{k+1})=\tfrac{f(x_h,x_{k+1})-f(x_{h-1},x_h)}{h_{k-1}+h_k}\end{gathered}$$

Так как любая сплайн-функция $S(x)$ порядка n дефекта 1 представима в виде линейной комбинации функций, можем представить S_2 в виде:

$$S_2(a)=S_2(a)+S_2'(a)(x-a)+\int_0^x(x-t)S_2''(t)dt \tag{3.1}$$

и потребуем, чтобы выполнялось условие $S_2\left(x_{k-1},x_k,x_{k+1}\right)=f\left(x_{k-1},x_k,x_{k+1}\right)$, $k=1,2,...,n$. Тогда

$$\begin{gathered}\tfrac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}S_{k-1}''+3S_k''+\tfrac{h_k}{h_{k-1}+h_k}S_{k+1}^*=8f\left(x_{k-1},x_k,x_{k+1}''\right)\\ k=1,2,\ldots,n,S_0''=S_n'',S_{n+1}^*=S_1^*\end{gathered} \tag{3.2}$$

Матрица коэффициентов системы (3.2) обладает доминирующей главной диагональю, отсюда, можем заключить что система имеет единственное решение. Неизвестные $S_2(a)$ и $S_2'(a)$ можно найди из условий интерполяции. Таким образом, доказали, что для $n\geqslant 1$ переодический сплайн второй степени существует и единствен.

4 Оценка погрешности

Теорема 4.1. *Если переодический сплайн $S_2(x)$ второй степени интерполирует в узлах сетки (1.3) непрерывную переодическую функцию $f(x)$ с периодом $b-a$ и $\sigma=maxh_k$, то*

$$\|f(x)-S_2(x)\|=\max_{q\in x\leqslant\beta}|f_i(x)-S_2(x)|\leqslant\omega(\delta,f)+\delta L, \tag{4.1}$$

где $L=8\max_{a\leqslant h\leqslant n-1}h_k^{-1}\omega(h_k,f)$

Теорема 4.2. *Если функция $f(x)$ с периодом $b-a$ имеет непрерывную* *первую производную, то*

$$\|f^{(i)}(x)-S_2^{(i)}(x)\| \leqslant K_i\delta^{1-i}\omega(\delta,f') \quad (i=0,1) \tag{4.2}$$

где $K_0=8,5; K_1=17.$

5 Двоичные базисные сплайны второй степени

Начиная с этого параграфа в работе рассматривается новая конструкция базисных сплайнов которые названф двоичными базисными сплайнами

Введем теперь определение двоичного базисного сплайна.

Пусть $If(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$– оператор интегрирования, $r_n(t)=sign\sin 2^n t$ - функции Радемахера, $W_{2^n-1}(x)=\prod_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ - функции Уолша.

Определение 5.1. *Функцию*

$$\psi=\begin{cases}(4I)^2W_3(x), x\in[0,1],\\ 0, x\notin[0,1]\end{cases} \tag{5.1}$$

будем называть двоичным базисным сплайном 2-й степени.

Рассмотрим функцию Уолша $W_i(x)$, где i определяется как 2^k-1 и представляет собой колическо периодов в функции Радемахера. Будем строить двоичный базисный сплайн дважды интегрирую функцию $W_3(x)$.

6 Интерполяционный сплайн 2-й степени на всей числовой прямой

Необходимо дважды проинтегрировать функцию (5.1), для этого запишем ее в следующем виде:

$$\varphi(x)=\begin{cases}8x^2, & x\in\left[0,\frac14\right]\\ -8x^2+8x-1, & x\in\left[\frac14,\frac34\right]\\ 8x^2-16x+8, & x\in\left[\frac34,1\right]\end{cases} \tag{6.1}$$

Рассмотрим следующую интерполяционную задачу:

пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, $x_k=\frac{k}{n}(k=\overline{0,n})$ - равномерная сетк на $[0,1]$. Через $S(x)$ обозначим интерполяционный сплайн второй степени, совпадающий с $f(x)$ в узлах x_k, который будем строить следующим образом:

(-1) шаг.

Пусть $M_0 \in \mathbb{R}$ произвольно. Положим $S_{-1}(x) = -\frac{M_0}{n}\varphi\left(x+\frac{3}{n}\right)$. В этом случае $S'_{-1}(0) = M_0$.

0-й шаг.

Определим $S_0(x)$ равенством

$$S_0(x) = S_{-1}(x) + \varphi\left(x - \frac{2}{n}\right)\left(f\left(\frac{0}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{0}{n}\right)\right) \tag{6.2}$$

В этом случае $S_0(0) = f(0), S'_0(0) = M_0$.

Далее, продолжая рассуждения таким образом, получим k - й шаг.

$(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + 2\varphi\left(x - \frac{k-1}{n}\right)\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \tag{6.3}$$

После k - го шага, $S_k\left(\frac{j}{n}\right) = f\left(\frac{j}{n}\right), (j = 1, 2, \ldots, k)$

И, теперь пологаем $S(x) = S_n(x)$. Очевидно, что $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах сетки $x_k = \frac{k}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$, и $S'(0) = M_0$. $\square$

Теорема 6.1. *Совокупность функций* $\psi\left(x - \frac{n}{4}\right) \quad (n \geqslant -3, n \neq -1)$ *образует базис в пространстве* $Q_2[0, +\infty)$

Теорема 6.2. *Рассмотрим функцию* $f(x)$ *определенную на отрезке* $(-\infty, +\infty)$. *Тогда, для нее существует интерполяционный сплайн второй степени, который будет интерполировать заданную функцию* $f(x)$ *в точках* $x = \frac{k}{4}$.

Мы получили следующие формулы для построения двоичного базисного сплайна:

$$S_{-n}(x) = S_{-n+1}(x) + c_n\psi(x + \frac{n+1}{4}), c_{-n} = \frac{f(\frac{-n+1}{4}) - S_{-n+1}(\frac{-n-1}{4})}{\psi(x+\frac{n}{4})}, \tag{6.4}$$

Таким образом, построили двоичные базисные сплайны на всей числовой прямой. $\square$

7 Интерполяция двоичными базисными сплайнами второй степени с узлами интерполяции, лежащими в точках склейки

Рассмотрим следующую интерполяционную задачу:

пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, $x_k = \frac{k}{n}(k = \overline{0,n})$ - равномерная сетк на $[0,1]$. Через $S(x)$ обозначим интерполяционный сплайн второй степени, совпадающий с $f(x)$ в узлах x_k, который будем строить следующим образом:

(-1) шаг.

Пусть $M_0 \in \mathbb{R}$ произвольно. Положим $S_{-1}(x) = -\frac{M_0}{n}\varphi\left(x+\frac{3}{n}\right)$. В этом случае $S'_{-1}(0) = M_0$.

0-й шаг.

Определим $S_0(x)$ равенством

$$S_0(x) = S_{-1}(x) + \varphi\left(x - \frac{2}{n}\right)\left(f\left(\frac{0}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{0}{n}\right)\right) \tag{7.1}$$

В этом случае $S_0(0) = f(0), S'_0(0) = M_0$.

Далее, продолжая рассуждения таким образом, получим

k - й шаг.

$(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + 2\varphi\left(x - \frac{k-1}{n}\right)\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \tag{7.2}$$

После k - го шага, $S_k\left(\frac{j}{n}\right) = f\left(\frac{j}{n}\right), (j = 1, 2, \ldots, k)$

И, теперь пологаем $S(x) = S_n(x)$. Очевидно, что $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах сетки $x_k = \frac{k}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$, и $S'(0) = M_0$. $\square$

8 Интерполяция двоичными базисными сплайнами второй степени с узлами интерполяции, лежащими между точками склейки

В этом параграфе рассмотрена рекурсивная конструкция интерполяционного сплайна 2-й степени, узлы которого находятся посередине между узлами интерполяции.

Построим сплайн рекурсивно.

-1-й шаг) Определяем $S_{-1}(x)$ так, чтобы $S'_{-1}(0) = f'(0)$. Для этого полагаем

$$S_{-1}(x) = f'(0)\frac{\varphi(x+\frac{3}{n})}{\varphi'(\frac{1}{n})}$$

0-й шаг)Выбираем произвольно m_0 и строим $S_0(x)$ так, чтобы $S_0(0) = m_0$.

Для этого полагаем

$$S_0(x) = S_{-1}(x) + (m_0 - S_{-1}(0))\varphi(x + \frac{2}{n}$$

k-й шаг) Определим сплайн $S(x)$ на $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ следующим образом:

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + \frac{\varphi(x - \frac{k-1}{n})}{\varphi(\frac{1}{2n})}\left(f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right) - S_{k-1}(\frac{k-\frac{1}{2}}{n})\right).$$

В этом случае

$$S_k(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}) = f(\frac{k-\frac{1}{2}}{n})k = 1, 2, ..., n,$$

т.е. мы интерполируем $f(x)$ в серединных точках отрезков $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$.Вывод: $x_k = \frac{k}{n}$ - это точки склейки, $\frac{1}{2}(\frac{k-1}{n} + \frac{k}{n})$ - это точки интерполяции.

Теорема 8.1. *Значение $S(1)$ линейно зависит от m_0.*

Была получена оценка для погрешности интерполяции.

Теорема 8.2. *Пусть f имеет на отрезке $[0, 1]$ непрерывную производную и m_0 выбрано так, что $S(1) = f(1)$. Тогда*

$$|f'(x) - S'(x)| \leq 3\omega_{\frac{1}{n}}(f') + 2\omega_{\frac{2}{n}}(f') \tag{8.1}$$

.

Следствие. Справедлива следующая оценка $|f(x) - S(x)| \leq \frac{7}{n}\omega_{\frac{1}{n}}(f')$. Замечание: В [1], стр.275 была получена оценка для погрешности

$$|f' - S'| \leq 17\omega_{\frac{1}{n}}(f')$$

коротая в 2 раза хуже, чем в (5.14). Отметим, что оценка (8.1) получена иным методом, нежели в [1], стр.275.

Для получения сплайна с такой погрешностью выберем начальное условие $S(0) = m_0$. m_0 необходимо выбрать так, чтобы после построения сплайна оказалось $S(1) = f(1)$. Для этого будем использовать линейную зависимость между $S(1)$ и m_0. Т.е. справедливо равенство $S(1) = Am_0 + B$, в котором A и B неизвестны. Чтобы найти A и B запускаем программу с двумя разными значениями $m_0 = m_{01}$ и $m_0 = m_{02}$. Получаем на выходе два разных значения $S(1) = S_{01}$ и $S(1) = S02$. Получаем систему для нахождения A и B. После этого ищем m_0 так, чтобы $f(1) = Am_0 + B$, т.е. $m_0 = (S(1)?B)/A$.

9 Двоичные Интерполяционные сплайны 3-й

Двоичный базисный сплайн $\psi(x)$ 3-й степени определяется равенством

$$\psi(x) = \left(2^2 I\right)\left(2^3 I\right)^2 W_7(x),$$

где $(If)(x) = \int_0^x f(t)dt$ - оператор интегрирования, W_7 - функция Уолша.

Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[0,1]$. Определим функцию $\psi(x) = \varphi\left(\frac{n}{8}x\right)$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\psi = \left[0, \frac{8}{n}\right]$. Для построения двоичного базисного сплайна третьей степени необходимо знать первую и вторрую прозводную, а так же значение функции в точке 0.

Иммем следующие формулы для построение сплайна:

$$S_k(x) := S_{k-1}(x) + \frac{\psi\left(x - \frac{k-1}{n}\right)}{\psi\left(\frac{1}{n}\right)}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow S_k\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

После n-го шага получаем интерполяционный сплайн S_n третьей степени дефекта 2. Он зависит от параметров m_1 и m_2.

Теорема 9.1. *Пусть $f(x)$ имеет на $[0,1]$ непрерывную вторую производную. Параметры m_2 и m_1 можно выбрать так, что*

1) $|f''(x) - S_n''(x)| \leq 5\omega\left(h, f''\right)$

2) $|f'(x) - S_n'(x)| \leq 5h\omega\left(h, f''\right)$

3) $|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{5}{2}h^2\omega\left(h, f''\right), h = \frac{1}{n}$

Укажем, как можно выбрать параметры m_2 и m_1 в случае, когда f имеет непрерывную вторую производную.

Теорема 9.2. *Пусть $f(x)$ имеет на $[0,1]$ непрерывную вторую производную. Выберем $m_2 = f''(0)$. Отображение $m_1 \mapsto S''(1)$ линейно.*

Алгоритм нахождения m_1:

1) Выбираем два значения m_1 и $\tilde{m}_1$ близкие к $f'(0)$.

2) Вычисляем $S''(1)$ $\tilde{S}''(1)$ и при этих значениях.

3) Записываем уравнение прямой, проходящей через точки $(m_1, S''(1))$ и $\tilde{m}_1, \tilde{S}''(1)$

4) Находим на этой прямой точку с ординатой $f''(1)$ и вычисляем соответствующее значение m_1.

5)Решаем задачу интерполяции с начальными значениями

$$S''(0) = f''(0), \quad S'(0) = m_1, \quad S(0) = f(0)$$

.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена задача построения интерполяционных сплайнов 2-й и 3-й степени на равномерной сетке с использованием двоичных базисных сплайнов.

1. Разработаны алгоритмы построения интерполяционных сплайнов с использованием двоичных базисных сплайнов. Предложенная конструкция не требует решения системы линейных уравнений. Доказано, что сплайнов, интерполирующих функцию в узловых точках существует бесконечно много. Каждый такой сплайн определяется одним или несколькими параметрами. При разных значениях параметров погрешность интерполяции различна.

2. Указан метод нахождения параметров, при которых полученный сплайн имеет наименьшую погрешность. Численные эксперименты показывают, что даже незначительное изменение параметров влечет увеличение погрешности вблизи конечной точки отрезка интерполяции.

3. Для сплайнов 2-й степени полученные оценки погрешности оказались в 2 раза меньше, чем известные ранее.

4. Численные эксперименты показали эффективность предложенного подхода. Для визуализации полученных данных была использована библиотека Jframe с помощью которой были построены все графики в данной работе. Код, представленный в приложении написан на языке Java8.

5. Предложенный метод позволяет строить интерполяционные сплайны любой степени. Трудности могут быть только при оценке погрешности интерполяции.