МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Приближенное решение интегрального уравнения Абеля

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Калаганова Михаила Валерьевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ____________________ Г.В.Хромова
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор ____________________ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Саратов, 2020 год

Введение. При построении математических моделей физических задач мы неизбежно сталкиваемся с тем, что исходные данные этих задач всегда заданы приближённо, поскольку получаются в результате измерений. Поэтому функции, являющиеся исходными данными, нуждаются в предварительной математической "обработке". Это приводит к двум классам задач. То есть выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа, по существу, являются плохо поставленными. Они принадлежат к классу некорректно поставленных задач.

Целью данной работы - изучение методов приближенного решения уравнения Абеля в случае, когда его правая часть задана с погрешностью. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемых источников.

В первой главе даётся определение некорректно поставленной задачи, приводится известная информация об уравнении Абеля, и приводится поставленовка задачи приближенного решения этого уравнения. Далее приводятся известные подходы к решению указанного уравнения и особое внимание уделяется методам регуляризации.

Во второй главе описывается метод регуляризации, построенный на базе операторов Стеклова: даётся теоретическое обоснование, указывается способ выбора параметра регуляризации.

Основное содержание работы. Основная часть состоит из двух глав. В **первой** главе вводятся основные определения, связанные с некорректными задачами, решением уравнений первого рода, описываются методы решения интегрального уравнения Абеля.

Некорректно поставленные задачи. Различают корректно поставленные, и некорректно поставленные задачи. Понятие корректной постановки задач математической физики было введено Адамаром следующим образом.

Определение 1.1. Математическая задача называется поставленной корректно, если её решение существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных.

Из определения следует, что задача будет являться некорректно поставленной, если не выполняется хотя бы одно из сформулированных требований. В дальнейшем мы будем понимать некорректность именно в смысле отсутствия непрерывной зависимости решения от исходных данных.

Интегральные уравнения. Интегральными уравнениями обычно называют уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла. Абель получил один из первых результатов, который можно связать с интегральными уравнениями, рассматривая такую задачу: материальная точка под действием силы тяжести движется в вертикальной плоскости (ξ, η), по некоторой кривой. Требуется определить эту кривую так, чтобы материальная точка, начав своё движение без начальной скорости в точке кривой с ординатой y, достигла оси ξ за время $t = f(y)$, где функция $f(y)$ задана заранее. Уравнение Абеля имеет вид:

$$\int\limits_0^y \frac{\phi(\eta)d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = -\sqrt{2g}f(y)$$

Позднее стали рассматриваться различные обобщения уравнения Абеля, одно из них

$$\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}U(t)dt = f(x)$$

Метод Филлипса- Туоми. Попытки решения некорректно поставленных задач, формулируемых с помощью операторного уравнения $Au = f$, без внесения дополнительной априорной информации о решении приводят к появлению высокочастотных осциляций в спектре $\widetilde{u}(\omega)$ и, как следствие, к неудовлетворительному восстановлению $u(x)$. Филипс, проанализировал характер этих осциляций, отождествил их с аномально большими значениями производных $d^2u(x)/dx^2$ и построил регуляризующий алгоритм: необходимо из семейства фозможных решений $u(x)$ выбрать наиболее "гладкое"в смысле минимизации нормы производной $\int\limits_a^b (du/dx)^2 dx - min$. Если при этом $\rho(Au, f)$- мера уклонения регистрируемой функции f от точной Au, то можно показать, что указанный минимум достигается на границе области, определяемой неравенством

$$\rho(Au, f) \leqslant \rho_0$$

т.е. когда $\rho = \rho_0$. Соответствующая задача на условный экстремум, решаемая методом Лагранжа, описывается уравнением

$$\rho(Au, f) + \alpha \int\limits_a^b (du/dx)^2 dx - min,$$

где α - неопределённый множитель, который, согласно Филлипсу, следует находить из условия $\rho = \rho_0$.

Итерационная схема Ван-Циттерта. Известен метод, предложенный Ван-Циттертом и развитый в дальнейшем Ван-Циттертом и Бругером.Идея метода исключительно проста: алгоритм можно охарактеризовать такой последовательностью операций: 1) в качестве нулевого приближения берём $\phi^{(0)}(x) = f(x)$; 2)$f^{(n)}(x) = \phi^{(n)}(x) \otimes K(x)$, где $\otimes$ - символ операции свёртки; 3)$\phi^(n + 1)(x) = \phi^{(n)}(x) + [f(x) - f^{(n)}(x)]$; 4)$n \rightarrow (n + 1)$; 5) переходим к пункту 2. Удобство метода состоит в том, что для каждой конкретной установки и выбранного порядка приближения члены

$$\sum_{i=1}^{N} C_{N+1}^{m+1} (-1)^m K^{(N)}(y)$$

легко рассчитать заранее. Выбор N) осуществляется полуинтуативно, руководствуясь соображениями о реальной либо фиктивной природе тех деталей решения $\phi(x)$, которые возникают по мере роста числа итераций.

Сплайновая аппроксимация. Отдельного рассмотрения заслуживает использование при решении обратных задач особых степенных полиномов-сплайнов. Применение таких полиномов весьма эффективно, при решении тех интегральных уравнений, для которых известны аналитические обращения, как это имеет место для преобразования Абеля. Тогда известная функция аппроксимируется сплайном и полученное выражение подставляется в формулу обращения уравнения Абеля. Основную трудность представляет выбор параметра сглаживания α,. На практике, параметр сглаживания полагается равным единице, либо подбирается интуитивно.

Метод регуляризации Тихонова. Тихонов разработал эффективный способ преобразования некорректной задачи в корректную за счёт стабилизации минимума среднеквадратичного уклонения Au от заданной правой части f при помощи вспомогательного параметрического функционала. Тихонов ввёл важное понятие регуляризующего оператора $R(f, \alpha)$ для уравнения $Au = f$, который обладает следующими свойствами: а) он определён для всякого $\alpha \geqslant 0$, а также любого $f \in F$ и непрерывен по f; б) если δ - погрешность исходных данных f_δ, то существуют такая функция $\alpha(\delta)$ и такое число $\delta(\epsilon)$ (для любого $\epsilon > 0$), что при $\rho_F(f, f_\delta) \leqslant \delta(\epsilon)$ выполнится соотношение $\rho_U(u, u_\alpha) \leqslant \epsilon$, где $u_{alpha} = R(f_\delta, \alpha(\delta))$. Тем самым задача сводится, во-первых, к нахождению регуляризующих операторов $R(f, \alpha)$ и, во-вторых, к определениюпараметра регуляризации α по той или иной дополнительной информации о задаче.

Достоинство метода логической прозрачности. Однако существуют некоторые недостатки: 1) Метод требует достаточно точного знания погрешности δ. 2) Нахождение α по невязке даже в случае, когда оператор A линейный, а пространство F гильбертово, может оказаться неоднозначным.

Проекционная схема Танабы - Хуанга. Идея метода, разработанного Танабой и Хуангом, сводится к следующему. Перейдём от исходного уравнения $Au = f$ к его алгебраизованной версии

$$\sum_{i=1}^{N} A_{mi} u_i = f_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1}$$

Будем рассматривать $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ как вектор в N-мерном пространстве, а каждое из M уравнений в 1 - как гиперплоскость. Пусть выбрано некое начальное приближение $u^{(0)}$. Следующее приближенное решение $u^{(1)}$ найдётся как проекция $u^{(0)}$ на первую гиперплоскость

$$u^{(1)} = u^{(0)} - [(u^{(0)} \cdot A_1 - f_1)A_1]/A1 \cdot A_1 \tag{2}$$

где $A_1 = (A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1N})$, а скалярное произведение обозначено точкой. Затем вычислим проекцию $u^{(2)}$, используя в соответствии с 2 векторы $u^{(1)}$, $A_2 = (A_{21}, A_{22}, ldots, A_{2N})$ и так далее, покане дойдём до $u^{(M)}$. Тем самым первый цикл итераций закончен. Далее повторяем весь первый цикл, исходя из $u^{(M)}$, получив в результате $u^{(2M)}$ и так далее. Танабой и Хуангом показано: а) Векторная последовательность $u^{(0)}, u^{(M)}, u^{(2M)}, u^{(3M)}, \ldots$ всегда сходитсядля любых N, M и A_{mi}, причём

$$\lim_{n\to\infty} u^{(nM)} = u \tag{3}$$

если система уравнений 1 имеет единственное решение; б) если система 1 имеет бесконечное множество решений, то u будет решением, минимизирующим норму невязки

$$||u - u^{(0)}|| = \left\{ \sum_{i=1}^{N} (u_i - u_i^{(0)})^2 \right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Иными словами, даже при бесконечном множестве решений мы можем надеяться на получение приемлемого, физически разумного решения, если начнём с хорошего приближения $u^{(0)}$; в) проекционный метод допускает введение самой разнообразной информации о решении: ограниченности, неотрицательности, монотонности и т.п.

Метод Лаврентьева. Уравнения вида $Au = f$, в которых правая часть $\mathrm{f} \in \mathrm{B}\,(\mathrm{f}_\delta, \delta) \neq \mathrm{AM}$, изучались М.М. Лаврентьевым. Ему принадлежит идея замены исходного уравнения близким ему, в некотором смысле, уравнением, для которого задача нахождения решения устойчива к малым изменениям правой части и разрешима для любой правой части.

Пусть $Au = f$, где u - неизвестная функция, но предполагается её существование и единственность. Оператор A компактен, поэтому обратный оператор A^{-1} неограничен. Априорно известно, что $||Au - f_\delta|| \leqslant \delta$. Как обычно, считаем, что $u \in D(A)$. На множестве $D(A)$ мы можем выделить множество возможных решений M. Функция f может как принадлежать, так и не принадлежать множеству AM. То есть уже по постановке это существенно некорректная задача. М.М. Лаврентьев предложил решать вместо уравнения $Au = f$ следующую задачу:

$$(A + \alpha E)u = f_\delta, \tag{5}$$

где $f_\delta \in F$, A - компактный симметричный положительный оператор.

Теорема 1.4. Семейство операторов

$$R_\alpha = (A + \alpha E)^{-1} \tag{6}$$

является регуляризирующим для уравнения $Au = f$.

Теорема 1.5. Пусть $A : H \to H$ - компактный самосопряженный положительный оператор, $\alpha = \alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и имеет менее высокий порядок малости. Тогда приближённое решение $u_{\delta\alpha} = (A + \alpha E)^{-1} f_\delta$ непрерывно зависит от правой части.

Вторая глава посвящается методу регуляризации, построенному на привлечении операторов Стеклова – дается теоретическое обоснование, указывается, как выбирать параметр регуляризации.

Понятие разрывного оператора Стеклова. В. А. Стеклов ввёл в рассмотрение оператор $\frac{1}{\alpha}\int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)dt$, который был назван его именем. Наряду с ним оператором Стеклова также называются операторы $\frac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)dt$ и $\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)dt$. Мы будем называть первый из них правосторонним оператором Стеклова, второй — левосторонним, третий — симметричным оператором Стеклова. Построим разрывный оператор Стеклова следующим образом. Возьмём правосторонний оператор Стеклова, но будем рассматривать его на отрезке $[1/2, 1]$, а левосторонний — на отрезке $[1/2, 1]$, т.е. построим оператор

$$S_\alpha f = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)dt = S_{\alpha 2} f, & x \in [0, 1/2] \\ \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)dt = S_{\alpha 1} f, & x| \in [1/2, 1] \end{cases} \tag{7}$$

Такая запись предполагает, что мы считаем несущественным, какие именно значения приписывать функции $S_\alpha f$ при $x = 1/2$. Потребуем, чтобы значения этого оператора не выходили за границы отрезка, т.е. чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{2} + \alpha \leqslant 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{2} - \alpha \geqslant 0 \tag{8}$$

Отсюда получим несущественное ограничение на $\alpha : \alpha \leqslant 1/2$. Функции $S_\alpha f$ терпят разрыв 1-го рода в точке $x = 1/2$. Поэтому мы будем их рассматривать как элементы подпространства из $L_\infty[0, 1]$ с нормой:

$$\| \cdot \|_{L_\infty} = \max \left(\| \cdot \|_{C[0,1/2]}, \| \cdot \|_{C[1/2,1]} \right) \tag{9}$$

Теорема 2.1. Для любой $f(x) \in C[0, 1]$ имеет место сходимость

$$\|S_\alpha f - f\|_{L_\infty} \to 0, \quad \alpha \to 0$$

Основные принципы построения методов регуляризации для уравнений 1-го рода. Рассмотрим уравнение

$$Au = f \tag{10}$$

где A — линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства X_1 в банахово пространство X_2. Считаем, что A^{-1} существует, но неограничен. В этом случае уравнение (10) называется уравнением 1-го рода. Считается, что точная правая часть f нам неизвестна (так и бывает при решении прикладных задач), а вместо неё известно δ-приближение к f , т.е. последовательность элементов f_δ такая, что $\|f_\delta - f\|_{X_2} \leqslant \delta$. Требуется по f_δ и δ построить такую последовательность элементов u_δ, чтобы $\|u_\delta - u\|_{X_1} \to 0$ при $\delta \to 0$. Для получения решения поставленной задачи, применяются специальные методы, называемые методами регуляризации.Они состоят из двух принципиальных моментов: 1) построение семейства линейных операторов R_α , зависящих от параметра α, действующих из пространства X_2 в пространство X_1 и обладающих свойствами: а) каждый из операторов R_α определён на всем пространстве X_2; б)$\|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1} \leqslant \infty$ при каждом значении αМ; в) при $\alpha \to 0$

$$\|R_\alpha f - u\|_{X_1} \to 0 \tag{11}$$

2) согласование параметра α с погрешностью $\delta : \alpha = \alpha(\delta)$ такое, что $\alpha(\delta) \to 0$:

$$\delta \left\| R_{\alpha(\delta)} \right\|_{X_2 \to X_1} \to 0 \qquad \text{при} \qquad \delta \to 0. \tag{12}$$

Определение 2.1. Семейство линейных операторов $R_\alpha, \alpha > 0$ — параметр, удовлетворяющее условиям (а)–(в), называется регуляризирующим семейством для уравнения (10); параметр α называется параметром регуляризации.

Лемма 2.1. Имеет место сходимость

$$\|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1} \to \infty \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{13}$$

Определение 2.2. Погрешностью метода $R_{\alpha(\delta)}$ в точке будем называть величину $\Delta\left(\delta, R_{\alpha(\delta)}, u\right)$; погрешностью метода $R_{\alpha(\delta)}$ на классе $M \subset X_1$ будем называть величину $\Delta\left(\delta, R_{\alpha(\delta)}, M\right)$.

Теорема 2.2. Для сходимости $\Delta\left(\delta, R_\alpha, u\right) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ условия (12) являются необходимыми и достаточными.

Теорема 2.3. При любых и имеет место двусторонняя оценка:

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\delta, R_\alpha, M\right) \leqslant \Delta\left(\delta, R_\alpha, M\right) \leqslant \varphi\left(\delta, R_\alpha, M\right) \tag{14}$$

где

$$\varphi\left(\delta, R_\alpha, M\right) = \Delta_1\left(R_\alpha A, M\right) + \delta \left\|R_\alpha\right\|_{X_2 \to X_1} \tag{15}$$

Г. В. Хромовой был предложен метод получения оценок погрешностей приближенных решений, не улучшаемых по порядку δ, и формул для согласования α с δ, обеспечивающего такие оценки. Этот метод схематически заключается в следующем: 1. Находится представление

$$\Delta_1\left(R_\alpha A, M\right) = \varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha) \tag{16}$$

где $\psi_1(\alpha) = o\left(\varphi_1(\alpha)\right)$ при $\alpha \to 0$, либо двусторонняя оценка

$$C_2\varphi_1(\alpha) + \tilde{\psi}_1(\alpha) \leqslant \Delta_1\left(R_\alpha A, M\right) \leqslant C_1\varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha) \tag{17}$$

где $\tilde{\psi}_1(\alpha), \psi_1(\alpha)$ суть $o\left(\varphi_1(\alpha)\right)$; 2. Находятся аналогичное представление для $\|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1}$:

$$\|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1} = \varphi_2(\alpha) + \psi_2(\alpha) \tag{18}$$

либо оценка

$$C_3\varphi_2(\alpha) + \tilde{\psi}_2(\alpha) \leqslant \|R_\alpha\|_{X_2\to X_1} \leqslant C_4\varphi_2(\alpha) + \psi_2(\alpha) \tag{19}$$

где $\tilde{\psi}_2(\alpha), \psi_2(\alpha)$ суть $O\left(\varphi_2(\alpha)\right)$; 3. Составляется функция

$$\Phi(\delta, \alpha) = \varphi_1(\alpha) + \delta\varphi_2(\alpha)$$

и находится $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\Phi(\delta, \alpha) \to \inf_\alpha$.Тем самым определяется метод $R_{\alpha(\delta)}$; 4. Найденное согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ подставляется в оценку (14). В результате получается оценка погрешности, точная по порядку δ и не улучшаемая по порядку δ для данного метода регуляризации, поскольку $\Delta\left(\delta, R_{\alpha(\delta)}, M\right) \simeq \inf_\alpha \Delta\left(\delta, R_\alpha, M\right)$.

Хромовой был предложен метод регуляризации, использующий конструкцию оператора A^{-1} и базирующийся на применении операторов из теории приближений. Он выглядит так: пусть T_α (α — параметр) — семейство операторов, действующих в пространстве X_1 и таких, что $\|T_\alpha u - u\|_{X_1} \to 0$ при $\alpha \to 0$ для любого $u \in X_1$ либо для любого $u \in M \subset X_1$, если заранее известно, что $u \in M$. Имеем $T_\alpha u = T_\alpha A^{-1}Au \equiv R_\alpha Au$, где $R_\alpha = T_\alpha A^{-1}$ определён на множестве значений оператора A.

Теорема 2.4. Если операторы R_α можно продолжить так, что они будут линейными ограниченными при каждом α, действующими из X_2 в X_1, то семейство $\{R_\alpha\}$ является регуляризирующим для уравнения (10).

Решение уравнения Абеля методом Хромовой. Рассматривается уравнение Абеля

$$Au \equiv \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t)dt = f(x) \tag{20}$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, $0 < \beta < 1, u(x) \in \mathcal{C}[0,1], f(x)$ задана её δ-приближением в $L_2[0,1] : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta$. Решается задача нахождения равномерных приближений к $u(x)$ по заданным f_δ и δ. Для оператора A известен вид обратного оператора

$$A^{-1}f = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t)dt \tag{21}$$

Этой формулой мы не можем воспользоваться, если $f(x)$ задана приближённо: $f_\delta(x)$. Мы рассматриваем постановку, в которой о решении $u(x)$ даётся минимум информации (только его непрерывность), что делает невозможным применение ни одного из классических методов решения некорректных задач. В качестве T_α возьмём операторы S_α и построим семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$.

Теорема 2.5. Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x,t)$, имеющими вид

$$R_\alpha(x,t) = \begin{cases} (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 2}(x,t), & x \in [0,1/2], \\ (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 1}(x,t), & x \in [1/2,1], \end{cases} \tag{22}$$

$$R_{\alpha 1}(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{-\beta} - (x-\alpha-t)^{-\beta}, & 0 \leqslant t < x-\alpha_2 \\ (x-t)^{-\beta}, & x-\alpha \leqslant t < x \\ 0, & x \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \tag{23}$$

$$R_{\alpha 2}(x,t) = \begin{cases} (x+\alpha-t)^{-\beta} - (x-t)^{-\beta}, & 0 \leqslant t < x \\ (x+\alpha-t)^{-\beta}, & < x \leq t < x+\alpha \\ 0, & x+\alpha \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \tag{24}$$

Теорема 2.6. Операторы $R_{\alpha j}, j = 1,2$, при $0 < \beta < 1/2$ являются линейными, ограниченными при каждом значении α операторами, действующими из пространства $L_2[0,1]$ в $C[1/2,1]$ при $j=1$ и в $C[0,1/2]$ при $j=2$. При этом справедлива двусторонняя оценка

$$C_\beta \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}} \leqslant \|R_\alpha\|_{L_2 \to L_\infty} \leqslant \sqrt{2} C_\beta \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}} \tag{25}$$

где $C_\beta = (\Gamma(1-\beta))^{-1}(1-2\beta)^{-1/2}$.

Теорема 2.7. Для сходимости $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{2\beta+1}{2}} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2.8. Справедлива неулучшаемая по порядку δ оценка

$$\frac{1}{2} C_1(\beta) \delta^{\frac{2}{3+2B}} \leqslant \Delta\left(\delta, R_{\alpha(\delta)}, \mathrm{Lip}_M 1\right) \leqslant C_2(\beta) \delta^{\frac{2}{3+2\beta}} \tag{26}$$

где

$$\alpha(\delta) = D(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}} \tag{27}$$

$$D(\beta) = \left(2^{1/2}M^{-1}C_\beta(2\beta+1)\right)^{\frac{2}{3+38}},$$

$$C_1(\beta) = \frac{M}{2}D(\beta) + C_\beta(D(\beta))^{-\frac{2\beta+1}{2}},$$

$C_2(\beta)$ отличается от $C_1(\beta)$ множителем 2 во втором слагаемом,$0 < \beta < 1/2$.

Лемма 2.3. Операторы $S^2_{\alpha 1}$ и $S^2_{\alpha 2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} S^2_{\alpha 1}f &= \tfrac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha}(2\alpha-(x-t))f(t)dt + \int\limits_{x-\alpha}^{\infty}(x-t)f(t)dt\right], \\ S^2_{\alpha 2}f &= \tfrac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x}^{x+\alpha}(t-x)f(t)dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}(2\alpha-(t-x))f(t)dt\right] \\ &\qquad (\alpha \leqslant 1/4). \end{aligned} \tag{28}$$

Теорема 2.9. Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x,t)$, имеющими вид

$$R_\alpha(x,t) = \alpha^{-2}2\pi^{-1/2}\begin{cases} R_{\alpha 2}(x,t), & x \in [0,1/2] \\ R_{\alpha 1}(x,t), & x \in [1/2,1] \end{cases}$$

где

$$R_{\alpha 2}(x,t)\begin{cases} (x-t)^{1-\beta} - 2(x-t+\alpha)^{1-\beta} + (x-t+2\alpha)^{1-\beta}, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ (x-t+2\alpha)^{1-\beta} - 2(x-t+\alpha)^{1-\beta}, & x \leqslant t \leqslant x+\alpha, \\ (x-t+2\alpha)^{1-\beta}, & x+\alpha \leqslant t \leqslant x+2\alpha, \\ 0 & x+2\alpha \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{29}$$

$$R_{\alpha 12}(x,t)\begin{cases} (x-t-2\alpha)^{1-\beta} - 2(x-t-\alpha)^{1-\beta} + (x-t)^{1-\beta}, & 0 \leqslant t \leqslant x-2\alpha, \\ (x-t)^{1-\beta} - 2(x-t-\alpha)^{1-\beta}, & x-2\alpha \leqslant t \leqslant x-\alpha, \\ (x-t)^{1-\beta}, & x-\alpha \leqslant t \leqslant x, \\ 0 & x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{30}$$

$$0 < \alpha \leqslant 1/4$$

Теорема 2.10. Операторы R_α, рассматриваемые как операторы из $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$, являются регуляризирующими для уравнения (20) при любом β из интервала $(0,1)$.

Теорема 2.11. Для норм операторов R_α справедлива двусторонняя оценка

$$C_2\alpha^{-\frac{1+2\beta}{2}} \leqslant \|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty} \leqslant C_1\alpha^{-3/2} + O\left(\alpha^{\frac{5}{2}-2\beta}\right) \tag{31}$$

где $C_1 = (1-\beta)^{-1}(\Gamma(1-\beta))^{-1}6^{1/2}, C_2 = (1-\beta)^{-1}(\Gamma(1-\beta))^{-1}(3-2\beta)^{-1}$

Замечание 1.2. Недостаток оценки (31) — «разбаланс» в показателях степеней α слева и справа. При этом чем больше β, тем ближе показатель степени у α слева к показателю справа.

Теорема 2.12. Если β - любое из интервала $(0,1)$, то для сходимости $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющее условиям

1. $\alpha(\delta) \to 0$;
2. $\delta(\alpha(\delta))^{-(1/2+\beta)} \to 0$ при $\delta \to 0$, и достаточно выполнения условия (1) и условия $\delta(\alpha(\delta))^{-3/2} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2.13. В случае $\beta = 1/2$ для норм операторов R_α выполняется следующая оценка

$$C_2\alpha^{-1} \leqslant \|R_\alpha\|_{L_2\longrightarrow L_\infty} \leqslant C_2\alpha^{-1} + O(a^2), \tag{32}$$

где $C_2 = (2/\pi)^{1/2}, C_1 = C_2(2\ln 6)^{1/2}$.

Теорема 2.14. Если $\beta = 1/2$ то для сходимости $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо и достаточно

1. $\alpha(\delta) \to 0$;
2. $\delta(\alpha(\delta))^{-(1)} \to 0$ при $\delta \to 0$,

Заключение. В данной дипломной работе с помощью разрывного оператора Стеклова получено приближённое решение уравнения Абеля. Сделаны выводы о выборе параметра регуляризации обеспечивающим сходимость приближённого решения к точному.