МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Установившийся ламинарный конвективный пограничный слой на поверхности движущейся вертикальной пластины

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы
направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Овчаренко Светланы Николаевны

Научный руководитель
старший преподаватель ____________ В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ____________ Ю.А. Блинков

Саратов 2020

Введение. Естественной конвекцией называется движение, возникающее вследствие различия плотностей неодинаково нагретых частей жидкой среды. Это определение следует уточнить в том смысле, что при естественной конвекции возникают специфические циркуляционные токи между поверхностью нагрева (или охлаждения) и ядром жидкой среды. Таким образом, в такое ограниченное понятие естественной конвекции не входят течения, хотя и обусловленные разностью плотностей в различных точках среды, но имеющие вполне определенное одностороннее направление, например движение газа при естественной тяге в дымовой трубе. В таких случаях хотя разность плотностей и является побудителем движения, но сам механизм процесса в значительной мере тождествен обычному вынужденному течению.

Фундаментальный вклад в исследования теплообмена при естественной тепловой конвекции был внесен Л. Лоренцем, В. Бекманом, В. С. Жуковским, М. А. Михеевым, Л. С. Эйгенсоном, Е. Шмидтом.

Так как в работе рассматривается движущаяся пластина, течение жидкости обусловливается не только конвекцией, но и движением пластины. Идея влияния вязкости жидкости вблизи стенок затрагивалась в работах Навье, Пуассона и Стокса, и получила оформление в теории пограничных слоев. Введение пограничного слоя позволяет существенно упростить моделирование течения жидкости путем разделения потока на две области: тонкий слой вблизи тела, где трение играет существенную роль, и область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать. Поведение пограничного описывается уравнениями Л. Прандтля, решение которых для заданных начальных и граничных условий в общем случае можно получить только численно с помощью ЭВМ. Характерной особенностью математического описания пограничного слоя является возможность преобразования уравнений Прандтля таким образом, что при переходе к новым безразмерным переменным значительно сокращается объем вычислений при решении практических задач, а решение уравнений Прандтля сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Целью работы является изучение задачи о ламинарном течении жидкости и изменении ее температуры вблизи нагревающейся, движущейся вертикальной пластины при том, что течение жидкости обусловлено движением пластины, а также конвективным переносом тепла в жидкости от пластины, на которой поддерживается постоянная температура. Задача состоит в решении системы уравнений, описывающей течение в окрестности пластины, приведенной в состояние равномерного движения и имеющей заданную температуру, с граничными условиями вблизи поверхности пластины и вдали от нее.

Для аналитического решения краевой задачи был применен метод получения автомодельных решений. Затем, для численного решения краевой задачи в автомодельных переменных был применен язык программирования Python.

Новизна данной работы состоит в рассмотрении поставленной задачи, когда средой, в которой исследуется ламинарный конвективый пограничный слой, является степенная неньютоновская жидкость.

Работа состоит из двух разделов, описывающих этот процесс в разных средах - ньютоновской и степенной неньютоновской жидкостях.

В **первом подразделе первого раздела** приведено описание рассматриваемого физичекого явления и приводится схема изучаемого движения ньютоновской жидкости вблизи поверхности тела.

Во **втором подразделе первого раздела** задается система уравнений и граничные условия, описывающее течение жидкости.

В **третьем подразделе первого раздела** осуществляется переход к автомодельным переменным и формируется краевая задача.

В **четвертом подразделе первого раздела** полученная краевая задача решается с помощью комбинации численных методов: метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4 порядка.

В **пятом подразделе первого раздела** представлены результаты расчетов в виде графиков для продольной и поперечной составляющих скорости течения, а также распределения температуры в пограничном слое при различных значениях параметров, характеризующих течение.

В **первом подразделе второго раздела** задается система уравнений и граничные условия, описывающее течение неньютоновской жидкости.

Во **втором подразделе второго раздела** осуществляется переход к автомодельным переменным и формируется краевая задача.

В **третьем подразделе второго раздела** представлены результаты расчетов в виде графиков зависимости искомых величин от параметров, характеризующих течение, а также распределения продольной и поперечной составляющих скорости течения и распределения температуры в пограничном слое при различных значениях параметров.

Конвективный пограничный слой на поверхности пластины в вязкой ньютоновской жидкости.

Описание физического процесса. В вязкую теплопроводную несжимаемую жидкость с температурой T_∞ вертикально помещена тонкая пластина, движущаяся вертикально со скоростью $U_w(x) = Cx^\alpha (C = const, \alpha = const)$. На поверхности пластины поддерживается переменная температура $T = T_\infty + Bx^k$ $(B = const, k = const)$. Требуется изучить течение вблизи поверхности пластины, когда набегающая жидкость является:

1. ньютоновской,
2. степенной неньютоновской жидкостью с нелинейной теплопроводностью.

Схема процесса представлена в соответствии с рисунком 1.1.

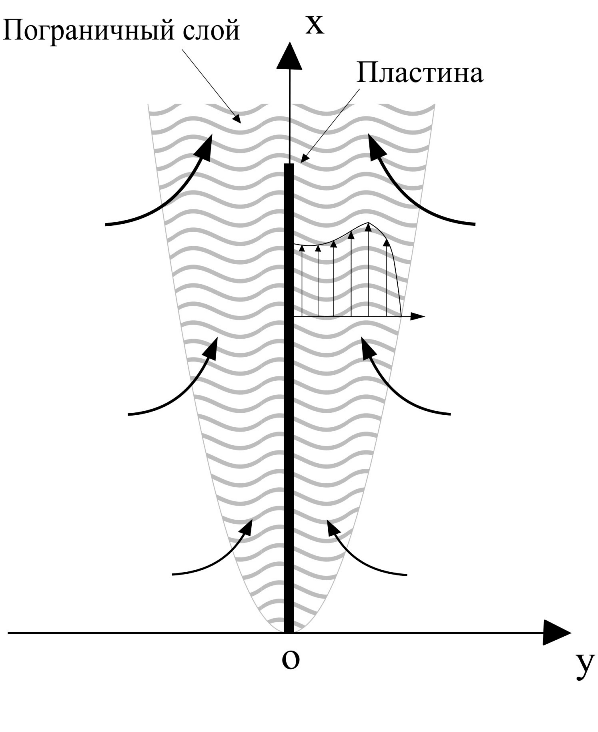

Рисунок 1.1 - Схема течения жидкости вблизи движущейся вертикальной пластины

Постановка задачи. Когда набегающая жидкость является обычной ньютоновской несжимаемой жидкостью, течение в температурном пограничном слое при условии пренебрежения теплом, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g\beta(T - T_\infty), \tag{2}$$

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Граничные условия на поверхности пластины при $y = 0, x \geqslant 0$ имеют вид:

$$u = C \cdot x^\alpha, \quad v = 0, T = T_\infty + Bx^k (B = const, k = const). \tag{4}$$

Граничные условия вдали от пластины («на бесконечности») при $y \to \infty$ имеют вид:

$$u \to 0, \qquad T \to T_\infty. \tag{5}$$

Получили краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (1)-(3) с граничными условиями (4)-(5).

Постановка задачи в автомодельных переменных. Введем масштабные величины. Обозначим через L - масштаб длины в направлении оси Ox, через Y - масштаб длины в направлении оси Oy, через U - масштаб скорости в направлении оси Ox, через V - масштаб скорости в направлении оси Y. Тогда можно ввести безразмерные переменные по следующим формулам:

$$x = L\overline{x}, y = Y\overline{y}, \tag{6}$$

$$u = U\overline{u}, v = V\overline{v}, \tag{7}$$

$$T = T_\infty + BL^k\overline{T}. \tag{8}$$

Путем перехода к автомодельным переменным и дальнейшего преобразования, получаем систему ОДУ:

$$\frac{d^3\varphi}{d\eta^3} = \frac{k+1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - \frac{k+2}{4}\varphi\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} - \theta. \tag{9}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} = Pr \cdot \left((k-1)\theta\frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{k+2}{4}\varphi\frac{d\theta}{d\eta}\right), \tag{10}$$

где

$$Pr = \frac{\lambda}{\rho c v}$$

- число Прандтля.

С граничными условиями:

При $\eta = 0$:

$$\varphi(0) = 0, \frac{d\varphi}{d\eta}\mid_{\eta=0} = A, \theta(0) = 1, A = const. \tag{11}$$

При $\eta \to \infty$:

$$\frac{d\varphi}{d\eta}\mid_{\eta=0} \to 0, \theta(\infty) \to 0. \tag{12}$$

Таким образом, в автомодельных переменных решение задачи о естественной конвекции вблизи движущейся вертикальной пластины при условии пренебрежения теплом, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, сводится к решению краевой задачи для системы ОДУ (9), (10) с граничными условиями (11) при $\eta = 0$ и (12) при $\eta \to \infty$.

Численное решение краевой задачи. ОДУ (9) является ОДУ 3-го порядка относительно функции φ, а ОДУ (10) - ОДУ 2-го порядка относительно функции θ.

При реализации численного интегрирования вместо полуинтервала $[0, \infty)$ рассматривается интервал $[0, \eta_m]$, где η_m - достаточно большое число.

Численное решение краевой задачи сводится к минимизации значения $R^i = \sqrt{(N_1^i)^2 + (N_2^i)^2}$., где $N_1^i(\varphi_{20}^i, \theta_{10}^i) = \varphi_{1m}^i - \varphi_{1m} = \varphi_{1m}^i$, и $N_2^i(\varphi_{20}^i, \theta_{10}^i) =$

$\theta_{0m}^i - \theta_{0m} = \theta_{0m}^i$, - невязки. Т.е. при некотором значении $i = M$ мы должны получить $R^i < \varepsilon$, где ε - точность решения.

Для решения краевой задачи для система ОДУ (9), (10) был применен метод, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

Результаты расчетов. При расчетах исследовалась зависимость распределения продольной и поперечной составляющих скорости, а также распределение температуры вблизи вертикальной пластины от изменения числа Прандтля Pr и коэффициента k. Поведение этих величин было исследованно на отрезке $[0, 10]$ безразмерной величины η при различных значениях параметров Pr и k.

Продольная составляющая скорости быстрее достигает предельного значения при увеличение значения k. Попечечная состовляющая скорости быстрее изменяется при увеличение значения k. Область температурного пограничного слоя увеличивается при уменьшении значения k.

Продольная составляющая скорости быстрее достигает предельного значения при увеличение значения Pr. Попечечная состовляющая скорости быстрее изменяется при увеличение значения Pr. Область температурного пограничного слоя увеличивается при уменьшении значения Pr.

Конвективный пограничный слой на поверхности пластины в степенной неньютоновской жидкости.

Постановка задачи.Течение степенной неньютоновской жидкости с нелинейной теплопроводностью вблизи поверхности тела при условии пренебрежения теплом, которое выделяется вследсвие работы сил вязкости, описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{13}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu_* n\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g\beta(T - T_\infty), \tag{14}$$

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda_* m\left|\frac{\partial T}{\partial t}\right|^{m-1}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{15}$$

Граничные условия на поверхности пластины имеют вид:

$$y = 0, x \geqslant 0 : u = 0, v = 0, T = T_\infty + Bx^k (B = const, \beta = const) \tag{16}$$

Граничные условия вдали от пластины («на бесконечности») при $y \to \infty$ имеют вид:

$$y \to \infty : u \to U_\infty(x), T \to T_\infty \tag{17}$$

Получили краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (13) - (15) с граничными условиями (16), (17).

Постановка задачи в автомодельных переменных. Путем перехода к автомодельным переменным по формулам (6) - (8) и дальнейшего преобразования, получаем систему ОДУ:

$$\left|\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}\right|^{n-1}\frac{d^3\varphi}{d\eta^3} + \frac{1}{2}\left[\frac{k(2n-1)+2n+1}{n+1}\varphi\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} - (k+1)\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2\right] + \theta = 0, \tag{18}$$

$$\left|\frac{d\theta}{d\eta}\right|^{1-m} \cdot Pr\left[\frac{k(2n-1)+(2n+1)}{2(n+1)}\varphi\frac{d\theta}{d\eta} - k\theta\frac{d\varphi}{d\eta}\right] = 0. \tag{19}$$

где

$$Pr = \frac{\rho c(kn+4k-n)}{\lambda_*(4kn+k-1)}\left(\frac{\mu_* n}{\rho}\right)^{\frac{5k-1}{kn+4k-n}} \cdot (g\beta B)^{-\frac{2kn-3k+1}{kn+4k-n}} \cdot B^{-\frac{(n-1)^2(3k+1)}{(kn+4k-n)(n+1)}}$$

- обобщенное число Прандтля.

С граничными условиями:

При $\eta = 0$:

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\eta}\Big|_{\eta=0} = A, \quad \theta(0) = 1. \tag{20}$$

При $\eta \to \infty$:

$$\frac{d\varphi}{d\eta}\Big|_{\eta=0} \to 0, \quad \theta(\infty) \to 0. \tag{21}$$

Результаты расчетов. При расчетах исследовалась зависимость распределения продольной и поперечной составляющих скорости, а также распределение температуры вблизи вертикальной пластины от изменения обобщенного числа Прандтля Pr, коэффициента k, показателя степени n и параметра A, характеризующего скольжение.

При расчетах главной задачей стало решение краевой задачи для системы ОДУ (18), (19) с граничными условиями (20) при $\eta = 0$ и (21) при $\eta \to \infty$, то есть нахождение φ_{20} и θ_{10} при заданных начальных приближениях и параметрах k, Pr, n, A. Поэтому в первую очередь в явном виде была получена зависимость искомых величин φ_{20} и θ_{10} от изменения этих параметров.

В результате исследования, было выяснено, что обе величины уменьшаются при увеличении параметров Pr, k, A и при фиксированных значениях остальных параметров ($k = 1$, $n = 0.9$, $A = 0.2$). А также, что величина φ_{20} увеличивается при увеличении параметра n и при фиксированных значениях остальных параметров ($Pr = 1$, $k = 1$, $A = 0.2$), а величина θ_{10} уменьшается.

Далее были получены распределения продольной и поперечной составляющих скорости, а также распределение температура вблизи вертикальной пластины на отрезке $[0, 10]$ в зависимости от изменения параметров Pr, k, n, A соответственно.

Продольная составляющая скорости быстрее достигает предельного значения при увеличение параметров Pr, k, n, A. Попечечная составляющая скорости быстрее изменяется при уменьшение параметров Pr, k, n, A. Область температурного пограничного слоя увеличивается при уменьшении параметров Pr, k, n, A.

Заключение. В работе была решена задача об определении установившегося ламинарного конвективного пограничного слоя на поверхности движущейся вертикальной пластины. Эта задача является автомодельной.

Был выполнен переход к автомодельным переменным и сформулирована краевая задача в автомодельных переменных. После ряда преобразований, решение задачи сводится к рещению системы ОДУ для автомодельных представителей функции тока и температуры с граничными условиями на пластине и вдали от пластины. Задача параметризированна четыремя параметрами: параметром, характеризующим скольжение, числом Прандтля, показателем в законе распределения температуры на пластине k, показателем n, характеризующим степенную неньютоновскую жидкость.

Для решения поставленных задач была написана программа на языке Python.

Решение задачи представлено в виде графиков распределений автомодельных представителей функции тока и температуры, а также графиков изменений неизвестных граничных условий при различных значениях параметров задачи. Дана оценка качественного и количественного распределения скоростей и температуры в пограничном слое.