МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ С ДОХОДАМИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Охлупина Максима Дмитриевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент ______________ И. А. Кузнецова

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. С каждым днем, растет востребованность процессов Маркова с доходами как моделей экономической динамики и динамического программирования. Марковские процессы востребованны во многих областях. Некоторые разделы теории цепей маркова включены в курсы теории вероятностей, что подтверждает важность этой темы.

Целью бакалаврской работы является изучение цепей Маркова как математического инструмента в экономике, и использование их в экономических задачах.

Объектом исследования является математическая модель описывающая динамику развития экономических величин.

Предметом исследования является исследование различных стратегий. В зависимости от результата исследований можно прийти к динамике развития экономических величин.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие задачи:

- определить основные понятия и теоремы, связанные с теорией цепей Маркова;
- рассмотреть модели управления цепями Маркова с доходами;
- расчитать необходимые характеристики модели управления цепями Маркова с доходами;
- вычислить оптимальное управление для исследуемой модели;

Практическая значимость данного исследования обусловлена тем что на компьтерной модели можно определить решение экономической задачи которая составлена по реальным данным. По результатам вычислений можно сделать выводы о том какую стратегию выгоднее всего использовать в том или ином моменте времени.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованых источников состоящего из 20 наименований и приложений. Объем работы состовляет 65 страниц, включая таблицы и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы работы, формулирются цели и задачи.

В первом разделе описаны основные понятия и теоремы теории цепей Маркова. Рассмотрим экономическую систему, которая может находится в одном из несовместных состояний $\xi = i$ конечного пространства возможных состояний $S = 1, 2, \ldots, N$. Во время функционирования, в дискретные моменты времени, система переходит из состояния в состояние, из ξ_n в ξ_{n+1}, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Смена состояний происходит по закону: в нулевой момент времени $(n = 0)$ вероятность начальных состояний равны $\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \ldots, \pi_N^{(0)}$, а затем на любом шаге n условная вероятность перехода системы, находящейся в состоянии $\xi_n = i$, в состояние $\xi_{n+1} = j$ равна p_{ij}. При анализе цепей Маркова весьма удобно пользоваться *графом состояний*. Каждому состоянию цепи Маркова на схеме соответствует круг (прямоугольник) с номером состояния внутри него или рядом. Эти круги называются вершинами графа. В задачах рассматривается система с конечным числом состояний, функционирование которой моделируется цепью маркова, и матрицей вероятностей перехода $P = (p_{ij})$, из состояния i в состояние j с вероятностью $p_{ij} > 0$. При переходе из одного состояния в другое система получает *одношаговый доход* (возможно, отрицательный) r_{ij}, не зависящий от номера шага. Совокупность одношаговых доходов образует $(N \times N)$-матрицу одношаговых доходов $R = (r_{ij})$. Доход, кторый неуправляемая система может получить за n шагов, является случайной величиной с распределением вероятностей, определяемым вероятностными связями цепи. Математическое ожидание этой случайной величины называется *полным ожидаемым доходом* за n шагов.

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[r_{ij} + v_j(n-1)], \tag{1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, $n = 1, 2, \ldots$, $v_j(0)$-продажня цена системы, если она заканчивает функционирование в состоянии j, $q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij}$ - *средний одношаговый доход*, получаемый системой при переходе из состояния i.

Введем в рассмотрение вектор полных одношаговых доходов за n шагов:

$$V(n) = \begin{pmatrix} v_1(n) \\ \dots\dots \\ v_N(n) \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix},$$

где Q - вектор средних одношаговых доходов,
тогда рекурентное соотношение для полного одношагового дохода в векторной форме примет вид

$$V(n) = Q + PV(n-1). \tag{2}$$

Выше мы получили рекурентное соотношение для полного ожидаемого дохода *без переоценки, без приведения* будущих доходов к текущему времени. Получим его аналог, учитывающий, что сумма в V единиц, получаемая через один шаг, эквивалентна βV единиц в настоящий момент, сумма в V единиц, получаемая через n лет, эквивалентна $\beta^n V$ единицам в настоящий момент.

Коэффициент $\beta \in (0, 1]$ называется *коэффициентом переоценки (приведения)* будущих доходов. Очевидно, при $V = 1$ коэффициент переоценки равен величине капитала, приносящего единичный доход через один шаг.

Если вернутся к соотношениям (1),(2), но уже с учетом переоценки будущих доходов:

$$v_i(n) = \textstyle\sum_{j=1}^{N} p_{ij}[r_{ij} + \beta v_j(n-1)], i = 1, 2, \dots, N,$$

то получим

$$V_\beta(n) = Q + \beta P V_\beta(n-1). \tag{3}$$

Далее, рассмотрим характер поведения полного ожидаемого дохода при $n \to \infty$. Выше мы получили формулу, ее n-кратное применение при $V_\beta(0) = 0$ дает

$$V_\beta = Q + \beta P[Q + \beta P V_\beta(n-2)] = Q + \beta PQ + (\beta P)^2 V_\beta(n-2) =$$
$$Q + \beta PQ + (\beta P)^2[Q + \beta P V_\beta(n-3)] = Q + \beta PQ + (\beta P)^2 Q + (\beta P)^3 V_\beta(n-3) =$$
$$\ldots = Q + \beta PQ + (\beta P)^2 Q + (\beta P)^3 Q + \ldots + \underbrace{(\beta P)^n V_\beta(0)}_{0}$$

или

$$V_\beta(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (\beta P)^i Q. \tag{4}$$

Предельный доход $V_{\beta_\infty}(n) = \lim_{n\to\infty} V_\beta(n)$. При $\beta \in (0,1)$ предельный доход равен $V_{\beta_\infty} = (1-\beta P)^{-1} Q$. Рассмотрим экономическую систему с N состояниями, функционировние которой на интервале времени продолжительностью n_{max} шагов описывается цепью Маркова произвольного типа с доходами.

Будем называть цепь Маркова *управляемой*, если на каждом шаге $n = 1, 2, \ldots, n_{max}$ и в каждом состоянии $i = 1, 2, \ldots, N$ может быть выбрана строка матрицы

$$p_i^{k_i} = (p_{i1}^{k_i}, p_{i2}^{k_i}, \ldots, p_{iN}^{k_i}) \tag{5}$$

и строка матрицы одношаговых доходов R

$$r_i^{k_i} = (r_{i1}^{k_i}, r_{i2}^{k_i}, \ldots, r_{iN}^{k_i}), \tag{6}$$

определяющих дальнейшее функционирование системы.

Величина k_i называется *стратегией управления* в i-м состоянии, а $K_i = \{k_i\}$ - *множеством стратегий управления* в i - м состоянии. Вектор стратегий $\overline{k} = (\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_N}) \in K_1 \times, \ldots, \times K_N$ называется *политикой*. Если стратегия k_i или политика $\overline{k}$ выбираются на n - м шаге, то они снабжаются индексом n. Последовательность выбраных на каждом шаге политик образует управление $\overline{\overline{k}} = (\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_{n_{max}}})$, однознчно определяющее эволюцию цепи. Если продолжительность интервала времени $n_{max} < \infty$, то говорят о *конечном горизонте управления*, в противном случае - о *бесконечном*. Число шагов до завершения интервала времени управления обозначают через $n = 0, 1, 2, \ldots, n_{max}$. Управление, максимищирующее эффективность системы, называется *оптимальным*. Задача состоит в том что необходимо найти оптимальное управление цепью маркова, в зависимости от постановки на конечном или бесконечном горизонте управления.

Во втором разделе описаны частные модели управления цепями Маркова с доходами.

О выборе наилучшего объекта. Пусть имеется N объектов, занумерованных $1, 2, \ldots, N$ так, что объект с номером N классифицируется как лучший, а объект с номером 1 - как худший. Объекты исследуются в случайном порядке, то есть первый объект для исследования выбирается с вероятностью $1/N$, второй - с вероятностью $1/(N-1)$ и т.д. После выбора всех объектов будет получена некотрая перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел $(1, 2, \ldots, N)$. Например, если $N = 10$, то номера объектов и вариант перестановки имеют вид, представленный в таблице 1.

Таблица 1 — Вариант перестановки

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
3	1	4	2	8	6	7	10	9	5

Про любые два объекта можно сказать, какой из них лучше, тем самым по мере формирования перестановки извлеченные объекты можно упорядочить по возрастанию их качества. Наилучший объект может быть извлечен на любом шаге (в примере - на восьмом). Задача состоит в том, чтобы распознать с максимальной вероятнстью наилучший объект в момент его извлечения.
Объекты $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_L}$ в перестановке $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, $N \geq L$, называются *максимальными*, если каждый последующий лучше предыдущего. Очевидно, объект a_{i_L} является наилучшим, и вообще, наилучший объект следует искать среди максимальных. В нашем примере максимальными являются a_1, a_3, a_5, a_8 (первый объект всегда максимальный).

Задачи об оптимальной остановке. Пусть работы системы моделируется цепью со множеством состояний $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ и матрицей вероятностей перехода P. Предположим челоевек имеет возможность наблюдать траекторию цепи, т.е. состояния i в дискретные моменты времени $n = 0, 1, 2, \ldots$. Если в момент n человек останавливает работу системы и при этом система находилась в состоянии i, то он получает доход f_i (f_i - заданная функция).

Внеся определенную плату, человек может и не останавливать работу системы - в надежде оказаться в дальнейшем в состоянии j, которому соответствует больший доход. Правило, которого придерживается человек желаяя получить максимальный доход, определяет некое управление цепью, называемое *управлением по остановке*, т.е возможны две стратегии управления на каждом состоянии и каждом шаге: $k_{in} = 1$ - остановка и $k_{in} = 2$ - продолжение.

Управление байесовым риском. Рассмотрим вопрос построения оптимальной процедуры последовательного решения по критерию байесовского риска на примере задачи о капиталовложениях. Некая компания собирается вложить капиталы в производство. Это вложение может дать хороший доход, если спрос на производимую продукцию возрастет, но может и привести к убытку в случае падения спроса. Компания может сразу решить "вкладывать"(d_1) или "не вкладывать капитал"(d_2), но если риск неблагоприятного решения велик, то она может заказать проведение n последовательных исследований рынка и уточнить сведения о его состоянии и перспективах развития. После $n-$ исследования, $n = 1, 2, \dots$, компания может прекратить их, а может заказать очередное исследование. Этот вопрос решается с помощью *правила остановки*. Правило остановки это, по существу, решение рекуррентного соотношение динамического программирования для определения оптимального управления по остановке. Если исследования прекращены, то компания на основе полученных сведений должна с помощью *решающего правила* принять одно из двух решений d_1 и d_2. Таким образом, процедура управления риском включает две компоненты - правило остановки и решающее правило.

В третьем разделе рассмотрены два примера использования цепей Маркова в экономике.

Задача о рекламной компании.

Перейдем к рассмотрению задачи о рекламной компании. Требуется найти оптимальное значение полного ожидаемого дохода $v_i^*(n)$ и оптимальные стратегии управления k_{in}^* для всех i и $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Фирма может осуществлять рекламу с помощью одного из трех средств: радио, телевидение, газеты. Фирма может оценивать объем сбыта как удовлетворительный ($i = 1$), хороший ($i = 2$) и отличный ($i = 3$). Деятельность фирмы моделируется с помощью цепи Маркова. Матрицы вероятностей перехода и недельных доходов, соответствующие каждому из трех средств массовой информации, представлены ниже.

P:

0,4	0,5	0,1	0,7	0,2	0,1	0,2	0,5	0,3
0,1	0,7	0,2	0,3	0,6	0,1	0	0,7	0,3
0,6	0,2	0,2	0,1	0,7	0,2	0	0,2	0,8

R:

400	520	600	1000	1300	1600	400	530	710
300	400	700	800	1000	1700	350	450	800
200	250	500	600	700	1100	250	400	650

Для решения задачи будем использовать формулу для среднего одношагового дохода, для предельного дохода, а также будем использовать рекурентное соотношение для полного ожидаемого дохода с учетом переоценки ($\beta = 0.5$) 2 3 4. Рассмотрим 5 периодов.

Результаты вычислений:

Таблица 2 — Стратегия 1

n	0	1	2	3	4	5	$\to \infty$
v_1	0	480	576	595	599	600	915
v_2	0	450	632	700	725	734	871
v_2	0	270	486	555	574	580	702

Таблица 3 — Стратегия 2

n	0	1	2	3	4	5	$\to \infty$
v_1	0	1120	1512	1649	1697	1714	2172
v_2	0	1010	1481	1681	1762	1793	2035
v_3	0	770	1257	1490	1590	1631	1767

Таблица 4 — Стратегия 3

n	0	1	2	3	4	5	$\to\infty$
v_1	0	558	614	619	620	620	1131
v_2	0	555	749	817	841	849	1128
v_3	0	600	896	1033	1095	1122	1188

В таблицах отражены результаты вычислений по трем состояниям и трем различным стратегиям. Теперь необходимо понять какая стратегия будет оптимальной: Таблица 5

Таблица 5 — Оптимальная стратегия

i	n	0	1	2	3	4	5
1	$v_1^*(n)$	0	1120	2183	3228	4267	5303
2	$v_2^*(n)$	0	1010	2029	3057	4088	5121
3	$v_3^*(n)$	0	770	1743	2757	3784	4815
1	v_{1n}^*	-	2	2	2	2	2
2	v_{2n}^*	-	2	2	2	2	2
3	v_{3n}^*	-	2	2	2	2	2

На бесконечном горизонте управления: Таблица 6:

Таблица 6 — Бесконечный горизонт управления

	1	2
$v_1^*(n)$	2172 $(k=2)$	2172 $(k=2)$
$v_2^*(n)$	2035 $(k=2)$	2035 $(k=2)$
$v_3^*(n)$	1767 $(k=2)$	1767 $(k=2)$

Таким образом, оптимальной стратегией будет использование Телевидения при
$n > 1$. В данной задаче были запрограммированы формулы для вычисления полного одношагового дохода, а также был запрограммирован Алгоритм Ховарда для вычисления оптимальной стратегии на бесконечном горизонте управления.

Задача о частном предпринимателе.

Предположим что в произвольном городе в аренду сдаются два помещения под коммерческую деятельность. Стоимость аренды и содержание помещений стоит 781 у.е.. Частный предприниматель решает развить свой бизнес и арендовать эти помещения. Объем сбыта можно оценить как удовлетворительный ($i = 1$), хороший ($i = 2$) и отличный ($i = 3$). Смоделируем развитие событий с помощью цепи Маркова и посмотрим какая стратегия будет оптимальной, арендуя помещения или же нет ($k = 1, 2$). Матрицы вероятностей перехода и месячных доходов, соответствующие каждой из двух стратегий, представлены ниже.

P:

0,68	0,24	0,1
0,27	0,41	0,32
0,11	0,5	0,39

0,13	0,55	0,32
0,1	0,48	0,42
0,37	0,42	0,21

R:

200	300	600
310	400	700
400	500	650

500	800	1700
830	1100	2000
1100	1400	1850

Необходимо понять через какой количество периодов следует отказаться и следует ли вообще отказываться от аренды помещений. Рассмотрим деятельность предпренимателя в течении одного года (12 месяцев). Если результаты будут таковы что в течении года не следует отказываться от аренды, то следует либо увеличить период исследования, либо провести исследования, спустя исследованный период времени.

Рассмотрим стратегию $k = 1$ (аренда помещений не производится): Таблица 7.

Таблица 7 — Стратегия - 1

$v_i^* \| \| n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_1^*	268	450	574	658	715	754	781	799	811	819	825	829
v_2^*	472	738	896	994	1057	1098	1125	1144	1156	1165	1170	1174
v_3^*	548	1027	1367	1592	1738	1832	1894	1935	1962	1980	1992	2000

Рассмотрим стратегию $k = 2$ (аренда производится): Таблица 8.

Таблица 8 — Стратегия - 2

$v_i^*\|\|n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_1^*	1049	1185	1203	1205	1206	1206	1206	1206	1206	1206	1206	1206
v_2^*	1451	2252	2650	2843	2936	2981	3002	3013	3018	3020	3021	3022
v_3^*	1384	2672	3329	3641	3788	3858	3892	3908	3916	3920	3921	3922

Результат исследования одного года: Таблица 9.

Таблица 9 — Исследование 12-ти месяцев

	v_i^*	n
1	450	2
2	2241	12
3	3141	12

По итогу исследований можно сказать что если, спустя два месяца после начала исследований, уровень сбыта можно оценить как удовлетворительный, то следует отказаться от аренды помещений что бы избежать убытка в будущем. Однако если уровень сбыта можно оценить либо как хороший, либо как отличный, то можно продолжать арендовать помещения в течение года. По истечении года следует провести исследования еще раз.

В данном примере были запрограммированы формулы для вычисления полного ожидаемого дохода и предельного дохода. Также был запрограммирован алгоритм оптимальной остановки на конечном горизонте управления.

В заключении описаны результаты проделанной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Определены основные понятия, определения и теоремы связанные с теорией цепей Маркова. Изучены основные и часные модели цепей Маркова с доходами.
2. Изучены алгоритмы построения моделей и алгоритмы нахождения оптимального управления.
3. Решены две практические задачи. Найдены оптимальные управления, исходя из которых можно сделать вывод о динамике развития экономических величин.