МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Системы Хаара и Фабера-Шаудера в обработке сигналов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВАРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Кудряшова Олега Игоревича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент Д.С.Лукомский

должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор В.А.Юрко

должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись

Саратов 2020

Введение. В дипломной работе будут рассматриваться системы Фабера-Шаудера и связь с ней системы Хаара. Система Фабера-Шаудера возникла как первый пример базиса в пространстве функций, непрерывных на отрезке [0,1] и была определена в 1910 году Фабером. Шаудер переоткрыл ее в 1927 году и до 70-х годов она называлась системой Шаудера. Работу Фабера вспомнили в 70-х годах и систему стали называть системой Фабера-Шаудера. Эта система является простейшим базисом пространства $C[0,1]$. Фабером доказано, что система образует базис в пространстве [0,1].

Шаудер ввел в рассмотрение класс базисов пространства C[0,1]. Каждый базис из этого класса определяется в зависимости от исходного счетного всюду плотнго на [0,1] множества, содержащего точки 0 и 1. Если в качестве такого множества взять множество двоично-рациональных дробей, упорядоченное естественным образом, то мы получим систему $\Phi = \{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ которая совпадает с системой после нормировки последней в C[0,1]. Эту систему $\Phi = \{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ - нормированный базис в C[0,1] - мы называем системой Фабера- Шаудера.

Целью работы является построение алгоритма нахождения коэффициентов разложения функции Фабера-Шаудера и Хаара, затем в дальнейшем анализировании найденных коэффициентов с целью применения данного алгоритма к обработке сигналов. А именно выяснения необходимого колличества максимальных коэффициентов для восстановления с наименьшими потерями, а после сравнения разложения по этим двум системам.

Структура ВКР. Данная работа состоит из 4 разделов:

1) В первом разделе даются оценки коэффициентов и теорема о сходимости, дано определение системы Хаара, а также вводятся вспомогательные определения и теоремы.

2) Во втором разделе проводится исследование системы Фабера-Шаудера.

3) В третьем разделе приводятся системы типа Фабера-Шаудера.

4) В четвертом разделе рассмотривается задача построения алгоритма раз-

ложения Фабера-Шаудера и Хаара.

Основное содеражние работы.

Оценки коэффициентов и теоремы о сходимости рядов Фурье-Хаара.

Определение 1. *Двоичным интервалом называется интервал вида:*

$$\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \qquad i = 1, 2, ..., 2^k, \qquad k = 0, 1, ...$$

Для $n = 2^k + i, \qquad i = 1, 2, ..., 2^k, \qquad k = 0, 1, ...$ обозначим:

$$\Delta_n = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right);\ \overline{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right];$$

$$\Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1);\ \Delta_1 = [0,1].$$

Если $\Delta \subset (0,1)$ - какой либо интервал, то через Δ^+ и Δ^- обозначаются соответственно левая и правая половина интервала Δ (без включения средней точки). В частности $n = 2^k + i$,

$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1},$$

$$\Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i}.$$

Определение 2. *Система Хаара - это система функций*

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, *а функция* $\chi_n(x)$ с $2^k < n \leq 2^{k+1}, k = 0, 1, ...$, *определяется так :*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{\frac{k}{2}}, x \in \Delta_n^+, \\ -2^{\frac{k}{2}}, x \in \Delta_n^-. \end{cases} \tag{2}$$

Выражение для частных сумм $S_N(f,x)$ ряда Фурье-Хаара функции $f \in L^1(0,1)$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\chi_n(x), \tag{3}$$

где $c_n(f) = c_n(f,x)$- коэффициенты Фурье-Хаара.

$$c_0(f) = \int_0^1 f(x)dx,$$

$$c_n(f) = 2^{\frac{k}{2}} \left[\int_{\Delta_n^+} +f(x)dx - \int_{\Delta_n^-} -f(x)dx \right], n = 2,3...$$

Рассмотрим оценки, относящиеся к поведению коэффициентов Фурье по системе Хаара некотрых классов функций.

Определение 3. *Если нам дана функция $f(x) \in C(0,1)$, то функция*

$$\omega(\delta, f) = \sup_{0<h\leq\delta, x,y\in[0,1]} |f(x) - f(y)| \qquad (4),$$

где $0 \leq \delta \leq 1$, *называется модулем непрерывности* f.

Теорема 1. *Если функция $f(x)-$ измеримая на интервале $(0,1)$, то справедливы неравенства:*

$$|c_n(f)| \leq (2n)^{-\frac{1}{2}}\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \qquad n > 1, \tag{5}$$

если $f \in C(0,1)$;

$$|c_n(f)| \leq (n)^{\frac{2+p}{2p}}\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right), \qquad n > 1, \tag{5}$$

если $f \in L^p(0,1), 1 \leq p \leq \infty$, где $\omega(\delta, f)$ и *$\omega_p(\delta, f)$- модуль непрерывности функции $f(x)$ в пространстве C и L^p.*

Теорема 2. *Для произвольной функции $f(x) \in C(0,1)$ ее ряд Фурье-Хаара сходится равномерно к $f(x)$ на $[0,1]$. При этом*

$$\rho_C(f, S_N) := ||f - S_N(f)||_C \leq 3\omega\left(\frac{1}{N}, f\right), \qquad N \geq 1.$$

Система Фабера-Шаудера.

Определение 4.

Системой Фабера-Шаудера называется система функций:

$$\Phi = \{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \qquad x \in [0,1]$$

в которой

$$\phi_0(x) = 1, \qquad \phi_1(x) = x \qquad x \in [0,1]$$

и при

$$n = 2^k + i, \qquad k = 0, 1, ..., i = 1, 2, ..., 2^k$$

$$\phi_n(x) = \phi_k^{(i)}(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если } x = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна} \\ \text{на } \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \text{и на} \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Систему Фабера-Шаудера можно определить также, интегрируя функции Хаара. Точнее говоря, имеет место равенства:

$$\phi_1(x) = \int\limits_0^x \chi_1(t)dt, \;\; \phi_n(x) = 2||\chi_n||_\infty \int\limits_0^x \chi_n(t)dt, \qquad n = 2, 3, ... \tag{7}$$

Запишем $S_N(x)$ - частную сумму ряда по системе Фабера-Шаудера:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \phi_n(x), \qquad N = 0, 1, ...$$

,

В которой коэффициенты A_n однозначно определяются функцией $f(x)$,

$$A_0 = A_0(f) = f(0), \;\; A_1 = A_1(f) = f(1) - f(0),$$

$$A_n = A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right], \tag{8}$$

если $n = 2^k + i, k = 0, 1, ..., i = 1, 2, ..., 2^k$.

Для функций Фабера-Шаудера была доказана теорема о том, что в пространстве C[0,1] есть базис из кусочно-линейных функций - так называемый базис Фабера-Шаудера.

Теорема 3. *Система Фабера-Шаудера - базис в пространстве $C(0,1)$. При этом коэффициенты разложения*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\phi_n(x), \qquad f \in C(0,1),$$

определяются формулами (2.4), а частные суммы $S_N(f,x)$ этого разложения принадлежат L_N и удовлетворяют соотношению:

$$S_N(f,x) = f(x) \qquad \text{при } x \in \pi_N, \qquad N = 1, 2, ... \tag{9}$$

Следствие 1. *Пусть $f \in C(0,1)$. Имеют место оценки:*

$$\text{а)} |A_n(f)| \leq \omega^{(2)}\left(\frac{1}{N}, f\right), \qquad n = 1, 2, ..., \text{где}$$

$$\omega^{(2)}(\delta, f) := \sup_{0<h\leq\delta,\ h\leq x\leq 1-h} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|;$$

$$\text{б)} ||f - S_N(f)||_C \leq \omega^{(2)}\left(\frac{1}{N}, f\right).$$

Построение алгоритма. Практическая часть работы заключается в построении алгоритма нахождения коэффициентов разложения функции Фабера-Шаудера и Хаара, затем в дальнейшем анализировании найденных коэффициентов с целью применения данного алгоритма к обработке сигналов. А именно выяснения необходимого колличества максимальных коэффициентов для восстановления с наименьшими потерями, а после, сравнения разложения по этим двум системам.

Разобьем отрезок [0,1] на количество точек 2^n, где n-некоторое фиксированное целое число.

Ранее мы ввели $S_N(x)$ - частную сумму ряда по системе Хаара и по системе Фабера-Шаудера.

Данные выражения являются системами линейных алгебраических уравнений(СЛАУ) относительно коэффициентов $c_N(f)$ и $A_N(f)$ соответственно. Для системы Хаара будем решать с помощью быстрого дискретного преобразования, а для системы Фабера-Шаудера применим формулы (8). После нахождения коэффициентов, сортируемых их в порядке возростания и наименьшие по модулю - зануляем, по оставшимся коэффициентам восстанавливаем функцию $f(x)$ и затем сравниваем с исходной функцией.

Поставленная задача была решена с помощью программы, написанной на языке Python. Исходный код программы приведен в приложении.

На основе вычислительного эксперимента построим графики соответствующих функций.

Сравним два этих разложения при N=8 без обнуления коэффициентов.

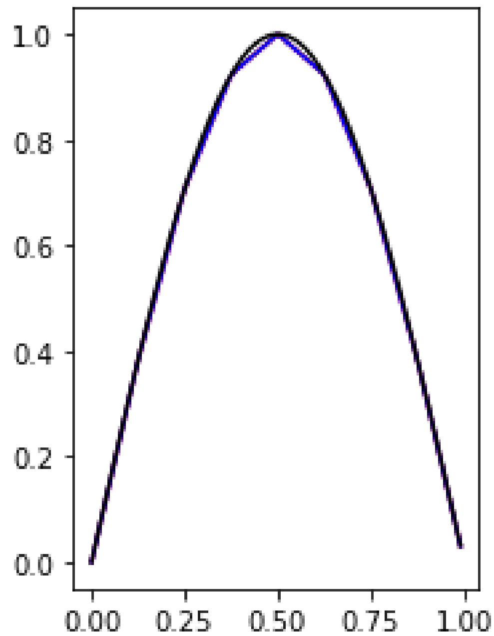

Рис. 1: а)Приближенное решение в виде системы Фабера-Шаудера

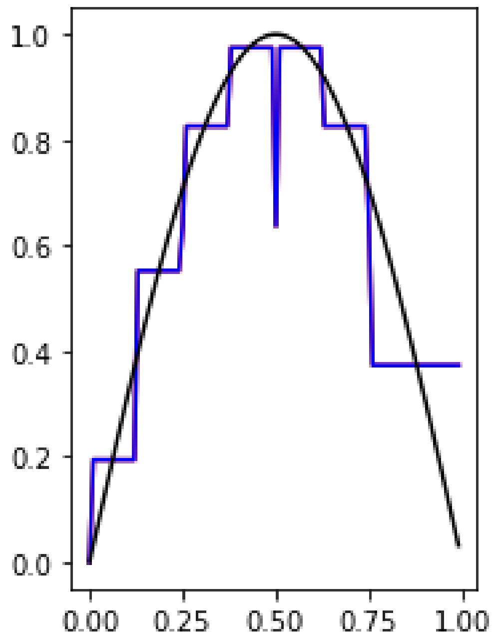

Рис. 2: б)Приближенное решение в виде системы Хаара

Сравним два этих разложения при N=8 с обнулением коэффициентов

20%.

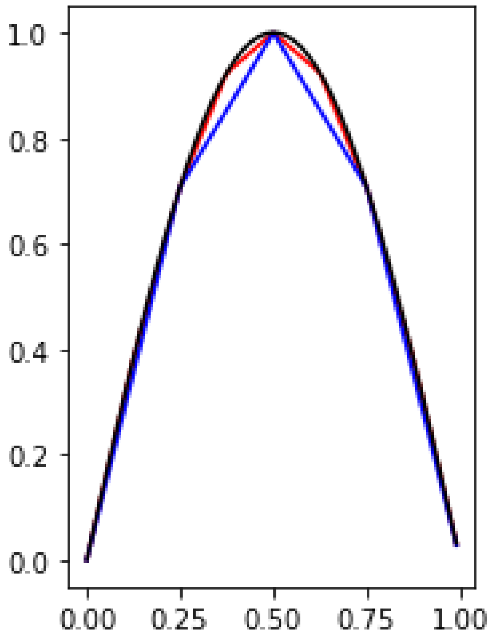

Рис. 3: а)Приближенное решение в виде системы Фабера-Шаудера

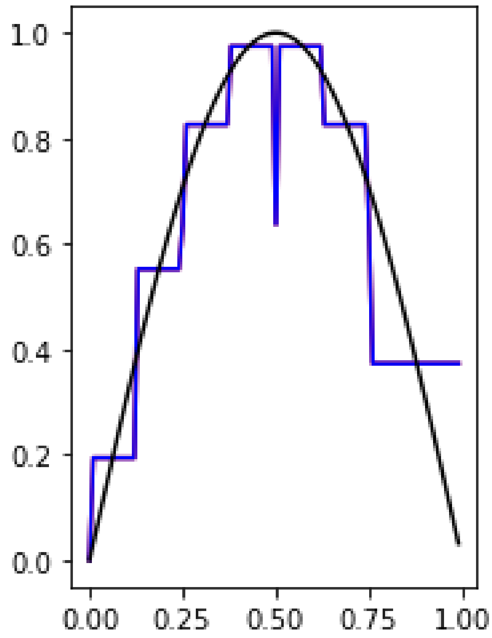

Рис. 4: б)Приближенное решение в виде системы Хаара

Сравним два этих разложения при N=8 с обнулением коэффициентов 70%.

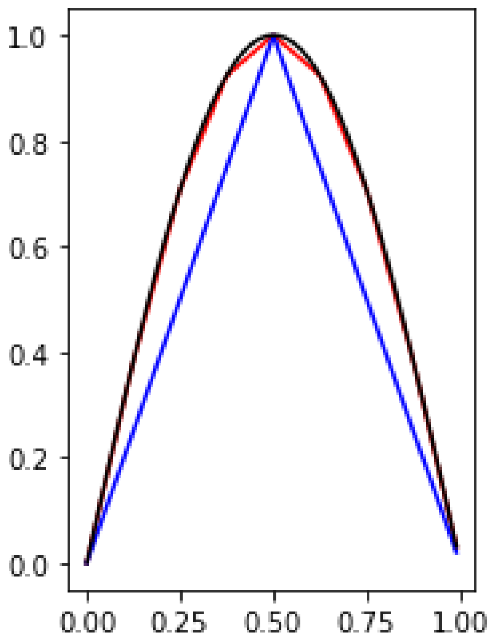

Рис. 5: а)Приближенное решение в виде системы Фабера-Шаудера

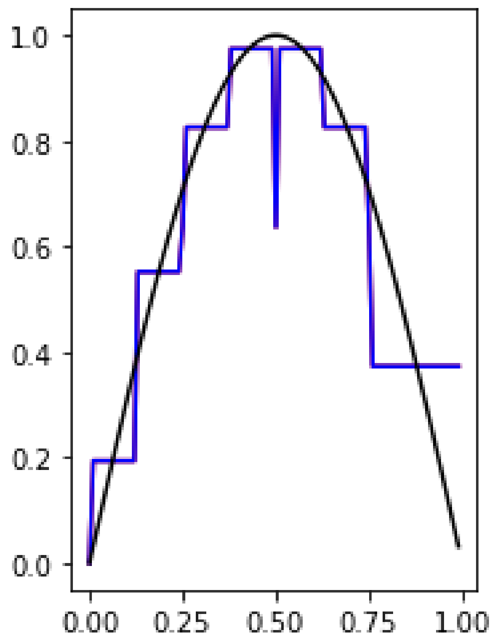

Рис. 6: б)Приближенное решение в виде системы Хаара

На рисунках 1 и 2 представлены графики без обнуления, графики черного

цвета - исходная функция, графики синего цвета - построенные по полученным коэффициентам.
На рисунках 3 и 4 представлены графики с обнулением 20%, графики красного цвета - построенные по обнуленным коэффициентам.
На рисунках 5 и 6 представлены графики с обнулением 70%.
Получаем погрешности для приблеженного решения решения по системе Фабера-Шаудера и Хаара соответствено:
1)Без обнуления коэффициентов:
Фабер-Шаудер = 0.018825 и Хаара = 0.36338
2)Обнуление 20%:
Фабер-Шаудер = 0.070365 и Хаара = 0.36338
3)Обнуление 70%:
Фабер-Шаудер = 0.210513 и Хаара = 0.605209

Из графиков видно, что система Фабера-Шаудера приближает функцию лучше, чем система Хаара.
Сравнивая значения полученных погрешностей, можно сделать вывод о том, что при обнулении коэффициентов график приближенного решения становится хуже. Поогрешность увеличивается за счет того, что мы зануляем коэффициенты преобразования.
Погрешность для разложения по системе Хаара гораздо выше, чем у того же разложения, но по системе Фабера-Шаудера.

Заключение.В ходе выполнения дипломной работы были изучены основные определения касающиеся системы функций Фабера-Шаудера, кроме этого был изучен способ нахождения коэффициентов функции, исследована сходимость ряда. Также была рассмотрена система Хаара, основные её свойства. Для данных систем была написана программа на языке Python.