МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Электронный образовательный курс: Уравнения и неравенства с модулем

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 3 курса 322 группы

направления ***44.04.01 – Педагогическое образование***

механико-математического факультета

Ефимовой Екатерины Николаевны

Научный руководитель
Доцент, к.ф.-м.н. __________________________
А.М.Захаров
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор __________________________
Д.В.Прохоров
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата

Саратов 2018

Введение. Данная работа представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Уравнения и неравенства с модулем». Этот образовательный курс предназначен для учащихся 6-11-х классов основного общего образования, и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой.

Электронный образовательный курс «Уравнения и неравенства с модулем» – это электронный ресурс, который содержит полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы согласно учебному плану в рамках образовательной программы. Он обеспечивает все виды работы: практикум, средства для контроля качества усвоения материала, методические рекомендации.

Структура электронного образовательного курса

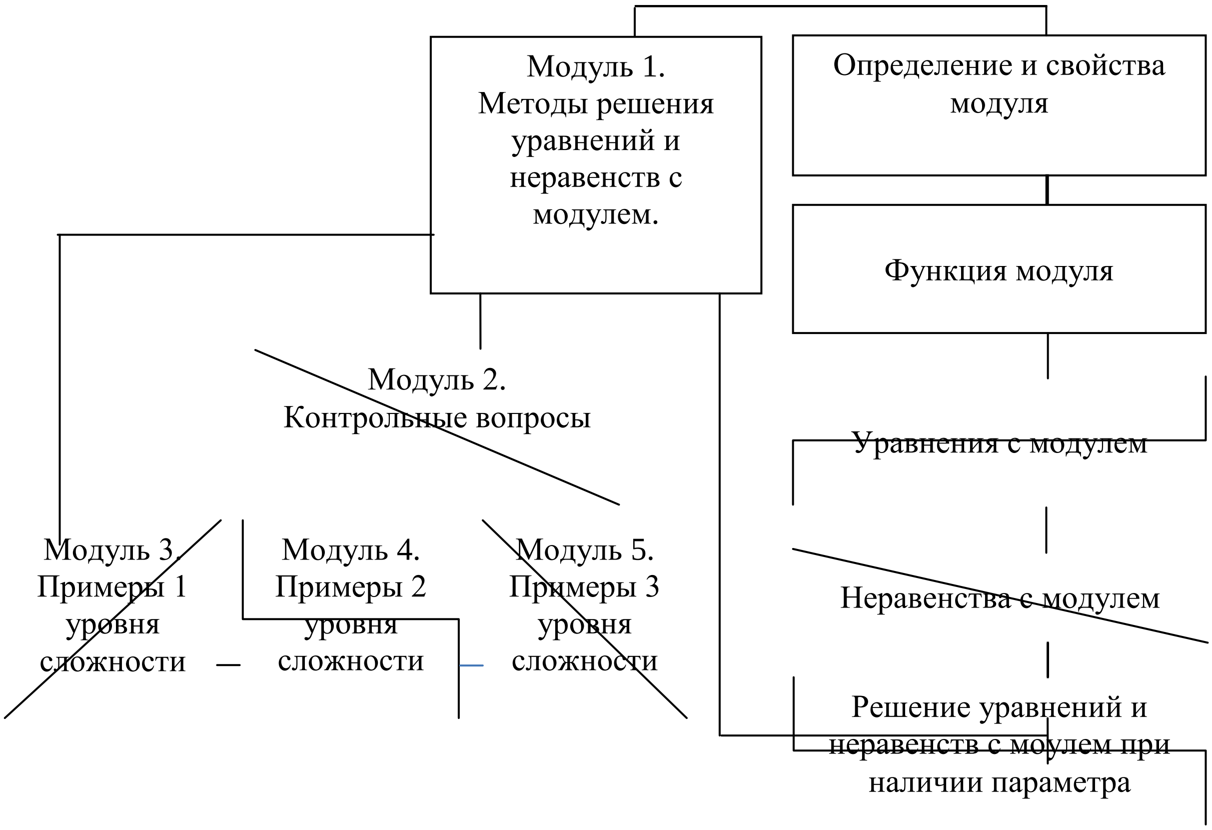

Рисунок 1 – Структура электронного образовательного курса

Уровни учебных результатов описываются для возможности проектировать обучение. Успешное освоение данного электронного образовательного курса окажет помощь при сдаче экзаменов.

Приведем рекомендации по изучению электронного курса «уравнения и неравенства с модулем». Для начала необходимо ознакомиться с модулем 1 «Методы решения уравнений и неравенств с модулем». Он состоит из 5 основных пунктов (в соответствии с рисунком 1). Далее идут вопросы на закрепление материала, «Контрольные вопросы» – модуль 2. Правильный ответ на каждый вопрос оценивается в один балл. Вопросов всего 10, поэтому об успешном прохождении модуля можно говорить, набрав от 8 до 10 баллов – это оценка «5». Если учащийся набрал 6 – 7 баллов – это оценка «4», необходимо вернуться к повторению теоретической части.

После успешного прохождения модуля «Контрольные вопросы» можно приступить к решению примеров 1 уровня сложности – это модуль 3. В нем содержится 5 вариантов по 10 заданий в каждом варианте. Каждая задача данного уровня оценивается в 1 балл. Модуль считается успешно пройденным, если учащийся набрал 9 – 10 баллов. Такое количество баллов соответствует оценке «5». Если учащийся набрал 7– 8 баллов – это оценка «4», что говорит о менее успешном освоении модуля. Набрав 5–6 баллов (оценка «3») необходимо снова вернуться к изучению теоретической части.

После прохождения модуля 3 можно приступить к решению примеров 2 уровня сложности – это модуль 4. Он содержит 5 вариантов, в каждом из которых 8 заданий. Каждая задача данного уровня будет оцениваться в 2 балла. Модуль считается успешно пройденным, если учащийся набрал 13 –16 баллов, это соответствует оценке «5». Если учащийся набрал 11– 12 баллов, это соответствует оценке «4», 9– 10 баллов – это оценка «3». Перевод в оценку необходим для самоконтроля. Если набрано менее 11 баллов, необходимо снова обратиться к теоретическому материалу.

После успешного выполнения тренировочных примеров 2 уровня сложности можно приступать к модулю 5– «примеры 3 уровня сложности». Он содержит 5 вариантов в каждом из которых 2 задания. Малое количество заданий обусловлено сложностью примеров для школьников даже профильного уровня обучения. Каждая задача данного уровня оценивается в

3 балла. При этом учитывается не только правильность решения задания, но и само решение, его обоснованность и полнота. Соответственно, максимальное количество баллов по варианту данного модуля – 6. Об успешном прохождении данного модуля можно говорить, набрав 5– 6 баллов, что соответствует оценке 5. Если набрано 3-4 балла – это соответствует оценке 4.если набрано 3 балла – это соответствует оценке 3. Набрав 3 или менее баллов, рекомендуется снова обратиться к теоретическому материалу.

Минимальное количество баллов, свидетельствующее о прохождении всех модулей – 27 балла, максимальное количество баллов, свидетельствующее об успешном изучении курса, – от 37 до 42 баллов. На освоение данного электронного образовательного курса в среднем можно затратить неделю. Но это касается учащихся 11-х классов, освоивших темы, необходимые для решения некоторых задач среднего и повышенного уровней сложности. Необходимо учитывать уровень знаний учащихся, и в каком классе предлагается прохождение данного курса.

По результатам выполнения магистерской работы на сайте http://ipsilon-dev.sgu.ru/ выставлены:

- теоретический материал по теме «Уравнения и неравенства с модулем»;

- контрольные вопросы с выбором ответа;

- набор тренировочных задач трех уровней сложности.

Актуальность изучения данной темы возрастает постепенно. Так как тема «уравнения и неравенства с модулем» применяется на протяжении всего периода обучения математике, она необходима при сдаче экзаменов в 9 и 11 классах. Так же задания с модулем часто встречаются в других темах профильного курса математики 10-11 классов.

Основная часть. Данная работа начинается с теоретической части, в которой сначала рассмотрены определения и свойства модуля. После этого описываются особенности построения графиков функций, содержащих знак абсолютной величины. Далее приведены формулы для решения уравнений, содержащих знак модуля, и разобраны основные виды этих уравнений.

Рассмотрим уравнения вида $|f(x)| = a$

Если $a < 0 \Leftrightarrow$ решений нет.

Если $\mathrm{a} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{f(x)} = 0$

Если $a > 0$ то $|f(x)| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$

Рассмотрим уравнение вида $|f(x)| = g(x)$

1 способ решения:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

2 способ решения:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

3 способ решения:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)^2 - g(x)^2 = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x)^2 - g(x)^2 = 0$$

Рассмотрим уравнение вида $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)| = g(x)$

Решение этих уравнений основано на определении модуля числа. Пусть дано уравнение $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_i(x)| = g(x)$ где $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ — функции любого характера. Это могут быть многочлены, дробно-рациональные функции, тригонометрические функции и т.д. Для каждой из функций необходимо найти область определения, ее нули и точки разрыва, разбивающие общую область определения функций $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ на промежутки, в каждом из которых каждая из функций $f_i(x)$ сохраняет свой знак. Далее, используя определение модуля, для каждой из найденных областей получим уравнение, подлежащее решению на рассматриваемом промежутке.

Далее в работе разобраны неравенства, содержащие знак модуля. Их разновидности и способы решения, такие как графический, геометрический и аналитический.

Решение неравенств вида $|f(x)| > a, |f(x)| < a, |f(x)| \geq a, |f(x)| \leq a$

Для начала разберем решение неравенств вида $|f(x)| \leq a$

1) $a < 0 \rightarrow$ решений нет

2) $a \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ } f(x) \\ f(x) \leq a \\ f(x) \geq -a \end{cases}$

Решение неравенств вида $|f(x)| \geq a$

1) $a < 0 \rightarrow x \epsilon R$

2) $a \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ } f(x) \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq a \\ f(x) \leq -a \end{array}\right. \end{cases}$

Метод рационализации

$$|f(x)| \vee a \begin{cases} \text{ОДЗ } f(x) \\ \big(f(x)\big)^2 - a^2 \vee 0 \end{cases}$$

Решение неравенств вида $|f(x)| \vee g(x)$

<u>*1 способ.*</u>

1) Если $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$

2) Если $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{array}\right.$

<u>*2 способ.*</u>

1) $$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ x \in \text{ОДЗ} \end{cases} \end{array}\right.$$

2) $$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ \text{решений нет} \end{cases} \end{array}\right.$$

3 способ. (Рационализация)

$$|f(x)| \vee g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ } f(x); g(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x)^2 - g(x)^2 \vee 0 \end{cases}$$

Решение неравенств вида $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)| \vee g(x)$…….

При решении неравенств этого типа используется тот же прием, что и при решении уравнений, содержащих сумму модулей нескольких функций.

Так же в работе приведен такой метод как решение неравенств методом интервалов.

Для решения неравенства методом интервалов необходимо сделать следующее:

1) Привести его к виду $f(x) \vee 0$

2) Найти ОДЗ функции и нули. Поскольку нули разбивают область определения функции на интервалы в которых функция непрерывна и не обращается в ноль, то она сохраняет на каждом из промежутков свой знак неизменным.

В последнем пункте работы приведены и разобраны уравнения и неравенства с параметром, содержащие знак модуля

В главе 2 приведены примеры 3 уровней сложности, и контрольные вопросы. Примеры 1 уровня сложности самые простые и могут использоваться и в 6 и в 8 классах. Ниже приведен один из вариантов этих примеров

Вариант 1

№ 1. $|x-3|-5=0$

№ 2. $|7-x|+4=0$

№ 3. $|x+3|=2x-4$

№ 4. $|7-x|=3x-3$

№ 5. $|x+2|=|2x|$

№ 6. $|3x-8|\geq 7$

№ 7. $\left|\frac{1}{2}x-4\right|\leq 5x$

№ 8. $|2x-3|-|7x-14|\geq 3x$

№ 9. $|2x-7|\leq|5x-12|$

№ 10. В каких точках функция $y=3|x-2|-2$ пересекает ось x?

Далее в работе приводятся примеры 2 уровня сложности. Их рекомендуется давать уже в старших классах: 9, 10,11. Ниже приведен один из вариантов

Вариант 1

1) $x^2+4|x-3|-7x+11=0$. Ответ: $\frac{11-\sqrt{29}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
2) $|x+2|+|x-3|=5$. Ответ:$x\in[-2;3]$
3) $\left||3-x|-x+1\right|+x=6$. Ответ: $x=-2; x=4$
4) $\frac{2.5}{|x+1|+3}<2.5-|x+1|$. Ответ: $(-4;2)$
5) $\left|x^2-\frac{29}{12}x-\frac{35}{12}\right|\geq 2x^2-\frac{61}{12}x-\frac{19}{12}$. Ответ: $x\in[-0.5;3]$
6) $|x-6|>|x^2-5x+9|$. Ответ: $x\in(1;3)$
7) $\begin{cases}|x^2-4x|<5\\|x+1|<3\end{cases}$. Ответ: $(-1;2)$
8) Построить график функции: $y=\left||x^3-4x|+5\right|$

Завершают данный электронный курс примеры 3 уровня сложности. Они рекомендованы для учащихся 10 – 11 классов профильного уровня обучения. Ниже приведен один из вариантов.

Вариант № 1

№ 1.

Определить при каких значениях параметра а уравнение имеет 2 решения:

$$|\mathrm{x} - 2| = a\log_2|x - 2|$$

№ 2.

Найти все значения параметра а при которых любое число из отрезка

$2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5$$

Заключение. В данной работе реализована тема «Уравнения и неравенства с модулем». Электронный курс был апробирован в общеобразовательной школе № 83 и лицее № 15 города Саратова, тем самым были достигнуты поставленные задачи.

Основа процесса обучения по данному дистанционному курсу – контролируемая самостоятельная деятельность обучающегося. Электронный образовательный курс имеет много достоинств. К примеру, индивидуальное расписание занятий для обучающегося, которое он сам может для себя определить. Так же, можно отметить объективную, независимую от преподавателя оценку его знаний. Слушатель сам выбирает последовательность и уровень изучения материалов, тем самым процесс обучения адаптируется под его способности.

Для преподавателей электронный образовательный курс тоже очень удобен, поскольку появляется возможность дополнительного обучения, в котором минимально задействованы школьные часы

Дистанционная форма обучения быстро становится популярной в образовательной сфере.

По результатам апробации электронного образовательного курса «Уравнения и неравенства с модулем» были реализованы следующие задачи:

- изучен и систематизирован теоретический материал по данной теме;
- определены методические особенности данной темы;
- разработана система примеров, разделенная по уровню сложности;
- расширен кругозор учащихся.

Таким образом, практическое значение данной темы заключается в том, что этот курс может быть использован учащимися разной степени подготовки. Теоретическая часть включает в себя материал, который присутствует в школьных учебниках, а так же тот материал который не рассмотрен школьным курсом, но необходим при сдаче экзаменов профильного уровня сложности.