МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Достаточные условия однолистности

АВТОРЕФЕРАТ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 — Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета
Бегинина Даниила Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент
_________________ Е. В. Разумовская
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор _________________ Д. В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2019

Содержание

Введение 3

1 Интегральные функционалы в достаточных условиях однолистности **5**

1.1 Цепи Левнера в достаточных условиях однолистности 5

1.2 Специальные случаи и примеры 8

2 Использование производной Шварца в достаточных условиях однолистности **13**

Заключение 21

Список использованных источников 22

Введение

В магистерской работе рассматриваются достаточные условия однолистности аналитических функций специального вида.

В настоящее время широко развивается направление в геометрической теории функций комплеусного переменного, связанное с достаточными условиями однолистности аналитических функций. По методам исследований и по богатству приложений эта область геометрической теории функции является весьма перспективной.

Цель магистерской работы - рассмотрение достаточных условий однолистности специального вида.

В работе решаются задачи:

1) Изучение критериев однолистности, связанных с построением цепей Левнера;

2) Рассмотрение достаточных условий однолистности, получаемых на основе скобок Шварца.

Для решения поставленных задач изучалась соответствующая литература, проводился анализ и восстановление полноты доказательств, проводились вычислительные эксперименты.

Магистерская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников.

Во введении обоснована актуальность работы, перечислены цели и задачи.

В первой главе рассмотрены критерии однолистности в интегральной форме.

Теоретической основой этой части послужила статья Хорианы Тюдор и Шигеоши Овы[6].

Рассмотрено большое количество достаточных условий однолистности, частных случаев и примеров. Восстановлена полнота математических доказательств и подробно изложено получение частных случаев основной теоремы. Методами, схожими с работой [6] получено новое условие однолистности, его следствие и иллюстрирующий пример.

С помощью вычислительного эксперимента построены области изменения параметров некоторых достаточных условий однолистности.

Во второй главе рассмотрены двупараметрические достаточные условия однолистности, использующие скобки Шварца. Основой является статья Ахаронова и Элиаса[7].

Основываясь на теоремах Нехари [8,9], авторы получают новое условие однолистности. В работе подробно изложены доказательства утверждений.

Получены примеры представления однолистных функций с помощью пакетов математических программ.

В заключении приведены основные выводы.

Список использованных источников состоит из 26 наименований.

Научной новизной работы являются новые условия однолистности, сформулированные в Теореме 1.2.5 и Следствии 1.2.8.

1 Интегральные функционалы в достаточных условиях однолистности

1.1 Цепи Левнера в достаточных условиях однолистности

Пусть $U_r = \{z \in C : |z| < r, 0 < r \leq 1\}$ есть открытый круг радиуса r с центром в начале, $U = U_1$, и $I = [0; \infty)$.

Обозначим A как класс функций f, аналитических в U, удовлетворяющих нормировке $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и S как подкласс однолистных функций в A.

Известный подкласс S состоящий из звездообразных функций будем обозначать через S^* - это функции $f \in S$ удовлетворяющие условию

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \ \forall z \in U.$$

Пусть P обозначает класс функций p, аналитических в U с $p(0) = 1$, с положительной действительной частью в U.

Пусть $B(a, g, h)$ - это класс функций $F \in A$, таких что

$$F(z) = \left(\alpha \int\limits_0^z g^a(u)h(u)u^{ib-1}du\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\alpha = a + ib, a > 0$, $b \in \Re, g \in S^*$, и $u \in P$. Это класс функций Базилевича, который также является подклассом S.

Мы рассмотрим достаточные условия однолистности функций, имеющих интегральное представление, опирающееся на построение цепей Левнера.

Приведем определение цепей Левнера.

Функция $L(z, t) : U\text{x}I \to C$ называется цепью Левнера или цепью подчинения, если:

1. $L(z, t)$ аналитическая и однолистна в U $\forall t \in I$;

2. $L(z, t) \prec L(z, s) \forall 0 \leq t \leq s < \infty$, где "$\prec$" обозначает подчинение.

Следующую теорему Pommerenke[10,11], часто используют для получения некоторых критериев однолистности.

Теорема 1.1 Пусть $L(z,t) = a_1(t)z + ...$ аналитическая в $U_r(0 < r \leq 1$ $\forall t \in I)$.

Предположим что

1. $L(z,t)$ локально абсолютно непрерывная функция $\forall t \in I$, $z \in U$;

2. $a_1(t)$ непрерывная комплексная функция в I, такая что $a_1(t) \neq 0, \lim\limits_{t\to\infty} |a_1(t)| = \infty$ и семейство
$$\left\{\frac{L(z,t)}{a_1(t)}\right\}$$
есть нормальное семейство функций в U_r;

3. Существует аналитическая функция $p : U_r \text{x} I \to C$ удовлетворяющая $\Re p(z,t) > 0\ \forall (z,t) \in U \text{x} I$ и
$$z\frac{\partial L(z,t)}{\partial z} = p(z,t)\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}, z \in U_r, t \geq 0. \qquad (1.1)$$

Тогда, для каждого $t \in I$, функция $L(z,t)$ имеет аналитическое и однолистное продолжение до полного круга U, то есть $L(z,t)$ это цепь Левнера.

В следующем критерии, используя теорему 1.1, получают основу для подходящей цепи Левнера.

Теорема 1.2 Пусть α, β, и γ комплексные числа такие что $\Re\alpha > 0, |\beta| < \Re(\alpha+\beta), \gamma \neq 1$ и
$$\left|\frac{1}{(1-\gamma)(\beta+1)} - 1\right| < 1, \left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha(1-\gamma)(\beta+1)} - 1\right| \leq 1. \qquad (1.2)$$

Если для $f \in A$, существует $g(z)$ - аналитическая функция в U с разложением в U $g(z) = 1 + a_1 z + ...$ и такая что выполняются два условия
$$\left|\frac{f'(z)}{g(z)-\gamma} - (\beta+1)\right| < |\beta+1| \qquad (1.3)$$

и
$$\left|\frac{1}{\beta+1}\left(\frac{f'(z)}{g(z)\gamma} - (\beta+1)\right)|z|^{2(\alpha+\beta)} + \frac{1-|z|^{2(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)-\gamma} - \beta\right)\right| \leq 1 \quad (1.4)$$

$\forall z \in U \setminus \{0\}$, тогда функция

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int\limits_0^z u^{\alpha-1} f'(u)du\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1.5}$$

(упомянута главная ветвь) является аналитической и однолистной в U.

1.2 Специальные случаи и примеры

Из основного результата вытекает большое количество частных случаев, примеров, теорема 1.2.1 и три ее следствия, теорема 1.2.2 и два ее следствия, теорема 1.2.3 и теорема 1.2.4, два следствия для теоремы 1.2.4.

Каждая из теорем проиллюстрирована примерами функций, подходящих под данные признаки.

Подходящий выбор функции $g(z)$ и значения параметра γ содержит различные варианты критерия однолистности. Так, если в Теореме 1.2 мы возьмем $\gamma = 0$ и $g(z) \equiv \frac{f(z)}{z}$, мы получим следующий результат:

Теорема 1.2.1 Пусть α и β есть комплексные числа, такие что $\Re\alpha \geq \frac{1}{2}$, $|\beta| < \Re(\alpha + \beta)$ и пусть $f \in A$. Если неравенства

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - (\beta + 1)\right| < |\beta + 1| \tag{1.2.1}$$

и

$$\left|\frac{1}{\beta+1}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-(\beta+1)\right)|z|^{2(\alpha+\beta)}+\frac{1-|z|^{2(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-(\beta+1)\right)\right| \leq 1 \tag{1.2.2}$$

справедливы $\forall z \in U \setminus \{0\}$, то функция F_α определена выражением:

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int\limits_0^z u^{\alpha-1} f'(u) du\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

и является аналитической и однолистной в U.

Следствие 1.2.1

Пусть α и β комплексные числа, такие что $\Re\alpha \geq 1$, $|\beta + 1| \leq \Re(\alpha + \beta)$ и пусть $f \in A$. Если неравенство

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - (\beta + 1)\right| < |\beta + 1| \tag{1.2.3}$$

справедливо $\forall z \in U$, тогда функция

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int\limits_0^z u^{\alpha-1} f'(u)du\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1.2.4}$$

аналитическая и однолистная в U.

Следствие 1.2.2

Если $f \in A$ удовлетворяет

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - (\beta+1)\right| < \beta+1, z \in U$$

для некоторых $\beta > 0$, тогда

$$F_2(z) = \left(2 \int\limits_0^z uf'(u)du\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.5}$$

аналитическая и однолистная в U.

Следствие 1.2.3 Если $f \in A$ удовлетворяет

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - (\beta+1)\right| < |\beta+1|, z \in U \tag{1.2.6}$$

для некоторого комплексного β: $|\beta| < \Re(1+\beta)$, тогда функция $F_1(z) = f$ является спиралевидной в U.

Теорема 1.2.2

Пусть α и β комплексные числа, такие что $\Re\alpha \geq \frac{1}{2}$, $|\beta| < \Re(\alpha+\beta)$ и пусть $f \in A$. Если неравенство

$$|f'(z) - (\beta+1)| < |\beta+1| \tag{1.2.7}$$

справедливо $\forall z \in U$, тогда функция F_α определяемая:

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int\limits_0^z u^{\alpha-1} f'(u)du\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

аналитическая и однолистная в U.

Следствие 1.2.4

Если $f \in A$ удовлетворяет

$$|f'(z) - (\beta + 1)| < \beta + 1, (z \in U),$$

для некоторых $\beta > 0$, тогда

$$F_{1/2}(z) = \left(\int\limits_0^z \frac{f'(u)}{2\sqrt{u}} du \right)^2 \tag{1.2.8}$$

аналитическая и однолистная в U.

Теорема 1.2.3

Пусть α и β комплексные числа, такие что $\Re\alpha \geq \frac{1}{2}$, $|\beta| < \Re(\alpha+\beta)$ и пусть $f \in A$. Если неравенство

$$\left| \frac{\beta}{\beta+1} |z|^{2(\alpha+\beta)} - \frac{1 - |z|^{2(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta} \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \beta \right) \right| \leq 1$$

справедливо для всех $z \in U \backslash \{0\}$, тогда функция F_α определенная (1.2.4) аналитическая и однолистная в U.

Теорема 1.2.4

Пусть $\alpha \in C$, $\Re\alpha > 0$, $\gamma < 0$ и $\beta > 0$ такие что

$$\left| \alpha + \frac{\beta(\upsilon - 1)}{2\upsilon - 1} \right| \leq \frac{\beta\upsilon}{2\upsilon - 1}, \tag{1.2.10}$$

где $\upsilon = (1 - \gamma)(\beta + 1)$.

Для $f \in A$, если неравенства

$$\left| \frac{\gamma}{f'(z) - \gamma} - \beta \right| < \beta + 1 \tag{1.2.11}$$

и

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z) - \gamma} \right| \leq \beta + \Re\alpha \tag{1.2.12}$$

справедливы $\forall z \in U$, тогда функция F_α определенная (1.2.4) аналитическая и однолистная в U.

Следствие 1.2.6

Пусть $f \in A$ и пусть числа $\alpha \in C$, $\Re\alpha \leq 1/2$, $\gamma < 0$ и $\beta > 0$. Если

$$\Re f'(z) > \frac{2\beta+1}{2\gamma(\beta+1)}|f'(z)|^2 \tag{1.2.13}$$

и

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)-\gamma} - \beta\right| \leq \beta + \Re\alpha \tag{1.2.14}$$

справедливы $\forall z \in U$, тогда функция F_α, определенная (1.5) аналитическая и однолистная в U.

Элементарными вычислениями, мы получаем, что неравенство (1.2.11), эквивалентно неравенству (1.2.13).

Замечание 1.2.6

Если мы возьмем $\alpha = 1$ в Следствии 1.2.6, тогда мы получим результат из работы [11].

Следствие 1.2.7

Пусть $f \in A$ и пусть $\alpha \in C$, $\Re\alpha \geq 1/2$. Если

$$\Re f'(z) > 0 \tag{1.2.15}$$

$\forall z \in U$, тогда функция F_α, определенная (1.2.4) аналитическая и однолистная в U, где выбрана главная ветвь.

Теорема 1.2.5

Пусть α и β комплексные числа, такие что $\Re\alpha \geq 1$, $\Re\beta > 0$, $\Re(\alpha+\beta) \geq 3|\beta+1|$ и $f \in A$. Если неравенство

$$\left|\frac{2zf'(z)}{f(z)} - (\beta+1)\right| < |\beta+1| \tag{1.2.16}$$

справедливо $\forall z \in U \backslash \{0\}$, то функция F_α определенная (1.2.4):

$$F_\alpha = \left(\alpha \int_0^z u^{\alpha-1} f'(u)du\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

является аналитической и однолистной в U.

Следствие 1.2.8

Пусть α - комплексное число, такое что $\Re\alpha \geq 4$. Пусть $f \in A$. Если неравенство

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{3}{2}$$

справедливо $\forall z \in U/\{0\}$, тогда функция

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int_0^z u^{\alpha-1} f'(u) du\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

является аналитической и однолистной в U.

2 Использование производной Шварца в достаточных условиях однолистности

Пусть $f(z)$ является регулярной функцией в некоторой области D, за исключением конечного или бесконечного числа полюсов. Такую функцию будем называть мероморфной. Известно, что отношение двух линейно независимых частных решений уравнения

$$w'' + \frac{1}{2}\{f, z\}w = 0 \tag{2.1}$$

в предположении регулярности шварциана функции $f(z)$

$$\{f, z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

равно функции $f(z)$ с точностью до дробно-линейного преобразования. Это видно из общего решения уравнения (2.1)

$$w = \frac{(C_1 f(z) + C_2)}{\sqrt{f'(z)}} \tag{2.2}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, которое легко получить после преобразования $w = \frac{\tilde{w}}{\sqrt{f'(z)}}$. По схеме можно обосновать что $f'(z) \neq 0$ в силу регулярности шварциана, а полюсы $f(z)$ могут быть только простыми. Поэтому функция $w(z)$ в (2.2) является регулярной.

Возьмем двупараметрическое семейство функций, которое обобщает (2.2), а именно

$$w = w(z; C_1, C_2) = \frac{(C_1 f(z) + C_2)}{\sqrt{f'(z)}} \exp\left(- \frac{1}{2}\int P(z)dz\right) \tag{2.3}$$

где $P(z)$ регулярная в D функция. Простыми вычислениями можно составить обыкновенное дифференциальное уравнение. общим решением которого оказывается (2.3). Это будет дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее вид

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0, z \in D, \tag{2.4}$$

где коэффициент $Q(z)$ определяется из соотношения

$$-P'(z) - \frac{P^2(z)}{2} + 2Q(z) = \{f, z\}.$$

Естественно, что уравнение (2.1) получается как частный случай уравнения (2.4) при $P(z) = 0$. Однако свойство отношения двух частных решений уравнения (2.1) сохраняется и для уравнения (2.4): это отношение равно дробно-линейной функции от $f(z)$.

Из представления (2.3) следует, что однолистность функции $f(z)$ в области D равносильна неколеблемости решений дифференциального уравнения (2.4). Действительно, если $f(z_1) = f(z_2) = \omega \neq \infty$, то $w(z_1; C_1 - C_1\omega) = w(z_2; C_1 - C_1\omega) = 0$. Обратно, если $w(z_1; C_1 - C_1\omega) = w(z_2; C_1 - C_1\omega) = 0, C_1 \neq 0$, то $f(z_1) = f(z_2) = \omega$.

Связь однолистности функции $f(z)$ с неколеблемостью решения уравнения (2.4) используется при выводе достаточных условий однолистности по следующей схеме. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в области D и удовлетворяет некоторым условиям (N). В предположении, что $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in d$, составляется тождество (2.4) с $w = w_0(z), w_0(z_1) = w_0(z_2) = 0$. С использованием этого тождества показывается, что условия (N) и равенства $w_0(z_1) = w_2(z_2) = 0$ несовместимы. Из полученного противоречия вытекает однолистность функции $f(z)$.

Такой метод часто называют методом Нехари.

Нехари исследовал однолистность аналитических функций в единичном круге $U = \{z : |z| < 1\}$, определяемую в терминах скобки Шварца

$$Sf = \left(\frac{f''}{f'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right).$$

Теорема А [16]

Если $Sf \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}$, или если $|Sf| \leq \frac{\pi}{2}$, тогда f однолистна в единичном круге U.

Хилле заметил что неравенство $Sf \leq 2(1 - |z|^2)^{-2}$ строгое. В частности, если

$$p(z) = (1 + \gamma^2)(1 - z^2)^{-2}, \gamma > 0, \tag{2.5}$$

то для двух решений $u(z)$,$v(z)$ уравнения $u^{(n)}(z) + p(z)u(z) = 0$ функция, определяемая равенством

$$f(z) = \frac{u(z)}{v(z)} = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{i\gamma}$$

удовлетворяет

$$|Sf(z)| \leq 2(1+\gamma^2)(1-|z|^2)^{-2}$$

однако принимает значение 1 бесконечно часто в U.

Для $p(z) = \frac{\pi^2}{4} + \delta, \delta > 0$, $f(z)$ как частное решение соответствующих дифференциальных уравнений $u''+p(z)u = 0$, удовлетворяет $\left|Sf(z)\right| \leq \frac{\pi^2}{2}+\delta$ и конечнолистна в U. Более общий результат, как известно в [17, Теорема 2], что если $\left|Sf(z)\right| \leq \frac{2C}{(1-|z|^2)}$ с константой $C > 2$, тогда $f(z)$ конечнолистна в U, причем её "листность"$N(C) < AC \log C$, где A - точная константа.

Позднее Нехари получил следующее обобщение для Теоремы А:

Теорема В (Нехари, [8]):

Предположим, что

1. $p(x)$ положительная непрерывная четная функция на $-1 < x < 1$,
2. $p(x)(1-x^2)^2$ невозрастающая на $0 < x < 1$,
3. действительное дифференциальное уравнение

$$y''(x) + p(x)y(x) = 0, \tag{2.6}$$

имеет решение, которое не равно 0 на $-1 < x < 1$.

Тогда любая аналитическая функция $f(z)$, удовлетворяющая

$$\left|Sf(z)\right| \leq 2p(|z|) \tag{2.7}$$

в единичном круге U однолистна в U.

Функции

$$p(x) = (1-x^2)^{-2}, p(x) = \frac{\pi^2}{4} \tag{2.8}$$

и соответствующие им решения $y(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $y(x) = \cos(\frac{\pi x}{2})$ уравнения (2.6) удовлетворяют всем условиям Теоремы В, необходимым для того чтобы показать достаточность условий для однолистности в U. Следовательно результаты полученные в Теореме А - частный случай Теоремы В. Функция $p(x) = \frac{2}{1-x^2}$ и соответственное решение $y(x) = 1 - x^2$ ведет к критерию однолистности Покорного[18]: $|Sf| \leq 4(1-|z|^2)^{-1}$.

Первые работы Нехари использовали наблюдение, что если $u(z)$, $v(z)$ это две любые аналитические функции в области D и каждая линейная комбинация $c_1u(z)+c_2v(z)$ имеет максимум один нуль в D, то их отношение $f(z) = \frac{v(z)}{u(z)}$ является однолистной в D функцией. В частности, это срабатывает в случае если $u(z)$ и $v(z)$ два линейно-независимых решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в области D.

Широко известный дифференциальный оператор Шварца появляется в работе Нехари в ходе доказательства. Предположим, что нам дано линейное дифференциальное уравнение

$$u''(z) + p(z)u(z) = 0, \tag{2.9}$$

где p(z) аналитическая функция в единичном круге U. Пусть $u(z)$, $v(z)$ - два линейно-независимых решения (2.9). Тогда производная Шварца удовлетворяет уравнению

$$S\left(\frac{v}{u}\right)(z) = 2p(z). \tag{2.10}$$

Годы спустя Nehari доказал другую теорему [9] относительно критерия однолистности. В [9] он также открыл строгость его условий однолистности.

Теорема C. (Нехари, [9])

Пусть f непостоянная аналитическая функция в единичном круге U, и пусть $F(t)$ будет действительно-определенной на $[0, 1)$, обладающей следующими свойствами:

1. F имеет непрерывную производную второго порядка и $F'(t) > 0$, $F''(0) = 0$;

2. Производная Шварца SF непрерывна,

3. Выражение $SF(t)(1-t^2)^2$ невозрастающая функция.

Если

$$\left|Sf(z)\right| \leq SF(|z|), z \in U, \tag{2.11}$$

то f однолистна в U.

Теорема D(Штеинметц [20])

Если $p(z)$ самомажоранта и $\int^1 y^{-2}(x)dx = \infty$ у положительного решения $y(x)$ из (2.6), то критерий однолистности (2.7) строгий. И наоборот, если $\int^1 y^{-2}(x)dx < \infty$, то критерий однолистности (2.7) нестрогий.

Теорема 2.1

(А)Пусть есть $p(z)$, определенная (2.20) и пусть a, b удовлетворяют условиям:

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1, \frac{-(5+4a)+\sqrt{25+48a}}{4} \leq b \leq a - \frac{1}{2}. \tag{2.21}$$

Если $f(z)$ аналитическая функция в U удовлетворяющая

$$|Sf(z)| \leq 2p(|z|), z \in U, \tag{2.22}$$

значит $f(z)$ однолистна в U.

(В) Пусть $p(x)$ будет определена (2.20) и мы имеем более строгие условия:

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1, max\left\{a-1, \frac{-(5+4a)+\sqrt{25+48a}}{4}\right\} \leq b \leq$$

$$\leq min\left\{a-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+4a(1-a)}}{2}\right\}, \tag{2.23}$$

тогда $p(z)$ есть самомажоранта и функция

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{dt}{u^2(t)} = \int_0^z \frac{(1+t^2)^{2b}}{(1-t^2)^{2a}}dt \tag{2.24}$$

есть нечетная однолистная функция в U. Более того, условие (2.22) строгое.

Пример 2.1

При выбранных значениях параметров a=0.5, b=0, функция $f_0(z)$ принимает вид:

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{(1+t^2)^{2b}}{(1-t^2)^{2a}}dt = \frac{1}{2}(log(x+1) - log(1-x))$$

Пример 2.2

При выбранных значениях параметров $a = 0.6$ и $b = 0.033$ функция $f_0(z)$ принимает вид:

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{(1+t^2)^{2b}}{(1-t^2)^{2a}}dt = tF_1(0.5; 0.066, -0,2; 1.5; t^2, -t^2),$$

где $F_1(a;\ b1, b2;\ c;\ x, y)$ - это гипергеометрическая функция от двух переменных.

Пример 2.3

При выбранных значениях параметров $a = 0.6$ и $b = 0.083$ функция $f_0(z)$ принимает вид:

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{(1+t^2)^{2b}}{(1-t^2)^{2a}}dt = tF_1(0.5; -0.166, -0,2; 1.5; t^2, -t^2),$$

где $F_1(a;\ b1, b2;\ c;\ x, y)$ - это гипергеометрическая функция от двух переменных.

Приведем еще одну выборку значений, в данном случае выберем $a = 0.7$, а шаг для выбора $b = 0.05$, оставим прежним

Таблица 2.1: Значения параметров b при выбранном значении параметра a=0.7.

Значение a	Границы max и min для параметра b
0.7	$max = -0.03, min = 0.17$
Значения параметра b при выбранном параметре a	
a=0.7	b=-0.036
a=0.7	b=0.013
a=0.7	b=0.063
a=0.7	b=0.113
a=0.7	b=0.163

Пример 2.4

При выбранных значениях параметров $a = 0.7$ и $b = -0.036$ функция

$f_0(z)$ принимает вид:

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{(1+t^2)^{2b}}{(1-t^2)^{2a}} dt = tF_1(0.5; 1.4, 0.072; 1.5; t^2, -t^2),$$

где $F_1(a;\ b1, b2;\ c;\ x, y)$ - это гипергеометрическая функция от двух переменных.

Пример 2.5

При выбранных значениях параметров $a = 0.6$ и $b = 0.013$ функция $f_0(z)$ принимает вид:

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{(1+t^2)^{2b}}{(1-t^2)^{2a}} dt = tF_1(0.5; 1.4, -0.026; 1.5; t^2, -t^2),$$

где $F_1(a;\ b1, b2;\ c;\ x, y)$ - это гипергеометрическая функция от двух переменных.

Пример 2.6

При выбранных значениях параметров $a = 0.7$ и $b = 0.063$ функция $f_0(z)$ принимает вид:

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{(1+t^2)^{2b}}{(1-t^2)^{2a}} dt = tF_1(0.5; 1.4, -0.126; 1.5; t^2, -t^2),$$

где $F_1(a;\ b1, b2;\ c;\ x, y)$ - это гипергеометрическая функция от двух переменных.

Пример 2.7

При выбранных значениях параметров $a = 0.7$ и $b = 0.113$ функция $f_0(z)$ принимает вид:

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{(1+t^2)^{2b}}{(1-t^2)^{2a}} dt = tF_1(0.5; 1.4, -0.226; 1.5; t^2, -t^2),$$

где $F_1(a;\ b1, b2;\ c;\ x, y)$ - это гипергеометрическая функция от двух переменных.

Пример 2.8

При выбранных значениях параметров $a = 0.7$ и $b = 0.163$ функция $f_0(z)$

принимает вид:

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{(1+t^2)^{2b}}{(1-t^2)^{2a}} dt = tF_1(0.5; 1.4, -0.326; 1.5; t^2, -t^2),$$

где $F_1(a;\ b1, b2;\ c;\ x, y)$ - это гипергеометрическая функция от двух переменных.

Заключение

В магистерской работе был произведен анализ и рассмотрены критерии однолистности в интегральной форме. Теоретическая часть опирается на работу [6].

Рассмотрение достаточных условий однолистности, частных случаев и примеров потребовало восстановление математических доказательств, а также получено новое условие однолистности, следствие, и иллюстрирующий пример.

При помощи пакетов математических программ построены примеры представления однолистных функций, зависящих от двух параметров, с использованием гипергеометрических функций. Для подбора значений для вычисления функций и примеров предоставлен код программы на языке программирования C++.

Список использованных источников

1. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций. В 2 т. / А. И. Маркушевич. - М.: «Наука»., 1968., Т. 1: Начала теории. - 491 с.

2. Гурса, Э. Курс математического анализа. В 2 т. / Э. Гурса. - М.—Л., ОНТИ, 1936., Т. 2: Теория аналитических функций. - 271 с.

3. L. Spacek, Prispevek k teorii funkci prostych (contribution a la theorie des fonctions univalentes), Casopis pro pestovani matematikya fysiky 62 (1932), 12—19.

4. E. Study , Vorlesungen tiber ausgewalte Gegenstande der Geometrie, Zweiter Heft, konforme Abbildung einfachzusammenhangender Bereiche, Leipzig und Berlin, 1913.

5. I.W.A1exander, Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of Math. 17 (1915—1916), 12—22.

6. H.Tudor, S.Owa Univalence Criteria Concerned with Lowner Chains of Certain Analytic Functions, PanAmerican Mathematical Journal, Volume 22(2012), Number 4, 81–95.

7. D.Aharonov, U.Elias, Sufficient conditions for univalence of analytic functions, J. Analysys, Volume 22 (2014), 1-11.

8. Z. Nehari, Some criteria of univalence, Proc. Amer. Math. Soc., 5(1954), 700-704.

9. Z. Nehari, Univalence criteria depending on the Schwarzian derivative, Illinois J, Math., 23 (1979), 345-351.

10. Ch. Pommerenke, Uber die Subordination analytisher Funktionen, J. Reine Angew Math. 218(1965), 159-173.

11. Ch. Pommerenke, Univalent Functions, Vandenboeck Ruprecht in Gottingen, 1975.

12. H. Ovesea-Tudor, A condition for univalency. Mathematica (Cluj) 47(70)(2005), 101-104.

13. N. N. Pascu, On a univalence criterion II, Preprint (Cluj) 6(1985), 153-154.

14. N. N. Pascu, An improvement of Becker's univalence Criterion, Commemorative Session Simion Stoilow Univ. of Brasov, Preprint(1987), 43-48.

15. J. Becker, Lownershe differential gleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte functionen. J. Reine Angew. Math. 255(1972), 23-43.

16. Z. Nehari, The Schwarzian derivative and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 545-551.

17. M. Chuaqui, P.Duren and B.Osgoodm Scwarzian derivatives and uniform local univalence, Comput. Methods Funcht. Theory, 8 (2008), 21-34.

18. Покорный, В.В. О некоторых достаточных условиях однолистности. / В. В. Покорный. // ДАН СССР. - 1951. - Т. 79, № 5. - С. 743-746.

19. B. Schwarz, On two univalence criteria of Nehari, Illinois, J. Math., 27 (1983), 346-351.

20. N. Steinmetz, Homeomorphic extensions of univalence functions, Complex Variables, 6 (1986), 1-9.

21. I. E. Bazilevic, On a case of integrability in quadratures of the Lowner-Kufarev equation, Mat. Sb. 37(1955), 471-476.

22. S. Kanas and H. M. Srivastava, Some criteria for univalence related to Rusheweyh and Salagean derivative, Complex Variables Theory Appl. 38(1999), 263-275.

23. K. Noshiro, On the theory of schlicht functions, J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Jap. 2(1) (1934-1935), 129-155.

24. D. Raducanu, H. Orhan, E. Deniz, On some sufficient conditions for univalence, An. St, Univ, Ovidius, 18(2) (2010), 217-222.

25. S. E. Warschawski, The higher derivatives at the boundary in conformal mapping, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935), 310-340.

26. D. Aharonov, U. Elias, Suddicient conditions for inivalence of certain analytic functions, J. Analysis, Volume 22 (2014), 1-11.