МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Полугруппы отношений

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ВОЛОДИНА ДМИТРИЯ АНДРЕЕВИЧА
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к. физ-мат. н., доцент ________________ В.Е. НОВИКОВ
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ.-мат.н., профессор ________________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. Теория групп — раздел общей алгебры, изучающий алгебраические структуры, называемые группами, и их свойства. Группа является центральным понятием в общей алгебре, так как многие важные алгебраические структуры, такие как кольца, поля, векторные пространства, являются группами с расширенным набором операций и аксиом. Группы возникают во всех областях математики, и методы теории групп оказывают сильное влияние на многие разделы алгебры. В процессе развития теории групп построен мощный инструментарий, во многом определивший специфику общей алгебры в целом, сформирован собственный глоссарий, элементы которого активно заимствуются смежными разделами математики и приложениями. Наиболее развитые ветви теории групп — линейные алгебраические группы и группы Ли — стали самостоятельными областями математики.

Различные физические системы, такие как кристаллы или атом водорода, обладают симметриями, которые можно смоделировать группами симметрии, таким образом находя важные применения теории групп и тесно связанной с ней теории представлений в физике и химии.

Одним из наиболее значительных математических прорывов XX века стала полная классификация простых конечных групп — результат совместных усилий многих математиков, занимающий более 10 тыс. печатных страниц, основной массив которых опубликован с 1960 по 1980 годы.

Работа состоит из трех глав: операции на множествах, полугруппы, приложения полугрупп в биологии и социологии.

Целью исследования является рассмотрение понятий, связанных с понятием полугруппы, теста ассоциативности Лайта и приложений полугрупп в биологии и социологии.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие основные задачи:

1. Изучить основные определения и результаты, связанные с понятием полугруппы.

2. Разобрать тест ассоциативности Лайта и реализовать его в программном приложении.

3. Изучить возможные приложения полугрупп в биологии и социологии.

Основное содержание работы.

Определение 1. Пусть A, B – произвольные множества. *Отображением множества A в множество B* называют всякое правило f, по которому каждому элементу множества A сопоставляют вполне определенный (единственный) элемент множества B.

Тот факт, что f есть отображение A в B кратко записывают в виде:

$$f : A \to B.$$

Если при этом элементу a из A сопоставлен элемент b из B, то b называют *образом элемента a*, а a – *прообразом элемента b* при отображении f, что записывается в виде $f(a) = b$.

В зависимости от свойств образов и прообразов различают отображения сюръективные, инъективные и биективные.

Определение 2. Отображение $f : A \to B$ называется:

1) *сюръективным*, если каждый элемент из B является образом хотя бы одного элемента из A, то есть $f(A) = B$.

2) *инъективным*, если оно отображает разные элементы множества A в разные элементы множества B. Инъективные отображения называют также вложениями.

3) *биективным*, или *взаимно однозначным*, если оно сюръективно и инъективно.

Определение 6. Пусть A^n есть n-я степень непустого множества A и $n \geqslant 1$. Отображение множества A^n в A называется *n-арной операцией на множестве A*, а число n – *рангом* операции. Отображение из множества A^n в A называется *частичной n-арной операцией на A*, если область определения отображения не совпадает с A^n. Операции ранга 0, 1, 2 называют также *нульарной, унарной и бинарной* соответственно. Унарную опурацию называют также *оператором.* Если $f : A^n \to A$, то получаем $f(x_1, ..., x_n)$ – результат этой операции над элементами $x_1, ..., x_n$.

Примеры. 1. Обозначим $P(M)$ множество всех подмножеств множества M. Отображение, ставящее в соответствие каждому множеству A из $P(M)$ его дополнение $M \backslash A$, есть унарная операция на множестве $P(M)$.

2. В области натуральных чисел вычитание не всегда возможно. Поэтому вычитание на множестве натуральных чисел есть частичная бинарная операция.

3. Операция деления рациональных чисел есть частичная бинарная операция на множестве рациональных чисел.

Рассмотрим некоторые стандартные свойства бинарных операций.

Пусть $f : A^2 \to A$. Если $f(x, y) = f(y, x)$, то операция называется *коммутативной*, а если $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)$, то операция называется *ассоциативной*.

Например:

1. Сложение и умножение рациональных чисел являются коммутативными и ассоциативными бинарными операциями. Для любого $a, b \in \mathbb{Q}$

$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$

$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$

Однако, операция вычитания на множестве рациональных чисел не коммутативна и не ассоциативна.

$a - b \neq b - a \qquad (a - b) - c \neq a - (b - c)$

2. Произведение матриц AB не коммутативно ($AB \neq BA$), но ассоциативно ($A(BC) = (AB)C$). Также $A+B = B+A$ и $A+(B+C) = (A+B)+C$, то есть операция сложения матриц и коммутативна, и ассоциативна.

3. Операция векторного произведения не является коммутативной $[\overline{a}\overline{b}] = -[\overline{b}\overline{a}] \neq [\overline{b}\overline{a}]$, но является ассоциативной $[\overline{a}[\overline{b}\overline{c}]] = [[\overline{a}\overline{b}]\overline{c}]$.

Определение 12. Пусть A и B – два множества. *Декартовым произведением* множеств A и B называют множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар, где $a \in A, b \in B$. *Бинарным отношением* между элементами множеств A и B называется любое подмножество ρ множества $A \times B$, то есть $\rho \subset A \times B$.

Определение 14. Бинарное отношение ρ на множестве A называется *рефлексивным на* A, если для каждого x из A $x\rho x$.

В качестве примеров рефлексивных отношений можно указать отношение подобия фигур, отношение равенства на каком-либо множестве чисел, отношение нестрогого неравенства ($\leq, \geq$).

Бинарное отношение ρ (на A) называется *транзитивным* (на A), если для любых $x, y, z \in A$ из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует $x\rho z$.

Например, отношение строгого неравенства ($>$, $<$), нестрогого неравенства ($\leq, \geq$), включения подмножества ($\subset$), равенства, подобия фигур являются транзитивными отношениями.

Бинарное отношение ρ (на A) называется *симметричным* (на A), если для любых $x, y \in A$ из $x\rho y$ следует $y\rho x$.

Отношение равенства чисел является симметричным. Отношение подобия геометрических фигур также будет симметричным отношением.

Определение 15. Бинарное отношение на множестве A называется *отношением эквивалентности* на A, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно (на A).

Примеры. 1. Пусть A – непустое множество и $i_A = \{\langle x, x\rangle \,|x \in A\}$ – отношение тождества на множестве A. Отношение i_A есть отношение эквивалентности на A.

2. Пусть A – множество прямых на плоскости и

$$\rho = \{\langle x, y\rangle \,|x, y \in A \text{ и } x \text{ параллельно } y\}$$

– отношение параллельности. Предполагая, что каждая прямая параллельна самой себе, отношение параллельности на A есть отношение эквивалентности.

3. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел и m – целое число, отличное от нуля. Отношение

$$\rho = \{\langle x, y\rangle \,|x, y \in \mathbb{Z} \text{ и } x - y \text{ делится на } m\}$$

называется отношением *сравнения по модулю m*. Это отношение является отношением эквивалентности на $\mathbb{Z}$.

4. Отношение подобия фигур данной плоскости есть отношение эквивалентности.

5. Отношение равномощности на любой данной совокупности множеств является отношением эквивалентности.

Определение 19. Множество G с одной бинарной операцией $*$ называют *группоидом* и обозначают через $(G, *)$

Из этого определения видно, что для задания группоида можно задать множество G и то правило, по которому можно найти значение операции $*$ для любых двух элементов из G. В том случае, когда множество G конечно, всю эту информацию можно записать таблицей, в которой входной строкой и входным столбцом является список элементов множества G, а на пересечении строки с входом a и столбца с входом b располагается значение операции $a*b$.

Такая таблица называется таблицей Кэли для группоида $(G,*)$ в честь английского математика А. Кэли (1821 - 1895). Если $G=\{a_1,...,a_n\}$ то таблица Кэли для группоида $(G,*)$ имеет следующий вид:

$*$	a_1	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1		$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
a_i		$\cdots$	$a_i * a_j$	$\cdots$	
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
a_n		$\cdots$		$\cdots$	

Таблица 1 — Таблица Кэли

Исходя из такого задания группоида, легко подсчитать, сколько различных операций можно определить на множестве G порядка n. В каждую из n^2 клеток таблицы Кэли можно записать любой из n элементов множества G. Отсюда видно, что таблицу Кэли можно составить в n^{n^2} вариантах, то есть на множестве G из n элементов существует n^{n^2} различных группоидов.

Определение 24. *Полугруппой* $(S,*)$ называется непустое множество S вместе с бинарной операцией $*$, удовлетворяющей ассоциативному закону: $x*(y*z)=(x*y)*z$ для любых $x,y,z\in S$. Другими словами, полугруппа есть группоид с ассоциативной операцией. Полугруппа S называется *коммутативной*, если $x\cdot y=y\cdot x$ для любых $x,y\in S$.

Примеры. 1. Пусть $+$ есть операция сложения на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Множество $(\mathbb{N},+)$ есть полугруппа, так как операция сложения ассоциативна. Эта полугруппа называется *аддитивной полугруппой натуральных чисел.*

2. Пусть M – непустое множество и A – совокупность всех отображений множества M в себя с законом композиции отображений $\circ$ в качестве бинарной операции. Множество $(A, \circ)$ есть полугруппа, так как композиция отображений ассоциативна. Эта полугруппа называется *полугруппой отображений множества M в себя.*

3. Пусть на множестве $B(A)$ всех бинарных отношений на A определена операция $\circ$: для любых $\rho, \sigma \in B(A)$

$\rho \circ \sigma = \{(x, y) \in A \times A : (x, z) \in \rho$ и $(z, y) \in \sigma$ для некоторого $z \in A\}$.
Множество $B(A)$ вместе с этой операцией является полугруппой.

4. Полугруппой всех преобразований (полной полугруппой преобразований) на множестве A называется подполугруппа $T_r(A)$ полугруппы $B(A)$, состоящая из всех бинарных отношений f, удовлетворяющих условиям

(1) для любого $x \in A$ существует такой $y \in A$, что $(x, y) \in f$;
(2) если $(x, y) \in f$ и $(x, y') \in f$, то $y = y'$.

Определение 25. Элемент $1 \in S$ называется *единицей*, если $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для любого $x \in S$. Элемент $0 \in S$ называется *нулем*, если $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ для любого $x \in S$. Элемент $z \in S$ есть *правый нуль*, если $x \cdot z = z$ для любого $x \in S$. Элемент $z \in S$ есть *левый нуль*, если $z \cdot x = z$ для любого $x \in S$. *Идемпотентом* называется такой элемент $e \in S$, что $e \cdot e = e$.

Определение 26. Полугруппы, в которых для каждого элемента a среди его степеней $a, a^2, ..., a^n, ...$ имеется лишь конечное число различных, называются *периодическими.*

Теорема 7. В периодической полугруппе некоторая степень любого элемента является идемпотентом.

Определение 29. *Моноид* $(M, \cdot, 1)$ – это множество M с бинарной операцией $(\cdot)$ и выделенным элементом 1, относительно которых $(M, \cdot)$ есть полугруппа с единицей 1. Полугруппа $(M, \cdot)$ называется полугруппой моноида $(M, \cdot, 1)$.

Для произвольной полугруппы $(S, \cdot)$ следующим образом определим моноид этой полугруппы:

$$M(S) = \begin{cases} (S, \cdot, 1), \textit{ если } S \textit{ имеет единицу } 1; \\ (S \cup \{1\}, *, 1), \textit{ где } 1 \notin S, \; x * y = x \cdot y, \\ x * 1 = 1 * x = x, \; 1 * 1 = 1 \textit{ для всех } x, \\ y \in S, \textit{ если } S \textit{ не имеет единицы.} \end{cases}$$

Примеры. 1. Пусть $+$ есть операция сложения на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Множество $(\mathbb{N}, +, 0)$ есть моноид, так как сложение ассоциативно и 0 является нейтральным элементом относительно сложения. Этот моноид называется *аддитивным моноидом натуральных чисел.*

2. Пусть $\cdot$ есть операция умножения на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Множество $(\mathbb{N}, +, 1)$ есть моноид, так как умножение ассоциативно и 1 есть нейтральный элемент относительно умножения. Этот моноид называется *мультипликативным моноидом натуральных чисел.*

3. Пусть n – фиксированное натуральное число, отличное от нуля, A – совокупность всех отображений множества $\{1, ..., n\}$ в себя и ε – тождественное отображение этого множества. Множество $(A, \circ, \varepsilon)$, где $\circ$ есть бинарная операция – композиция отображений, является моноидом, так как композиция отображений ассоциативна и ε есть нейтральный элемент относительно операции $\circ$. Этот моноид называется *моноидом отображений множества {1, ... , n} в себя.*

Теорема 10. Пусть A – множество с ассоциативной бинарной операцией * и $a_1, ..., a_n$ – последовательность элементов из A. Пусть
$1 < n_1 < n_2 < ... < n_k \leq n$, где $n_1, ..., n_k$ – натуральные числа, и

$$b_0 = a_1 * ... * a_{n_1 - 1}, b_1 = a_{n_1} * ... * a_{n_2 - 1}, ..., b_k = a_{n_k} * ... * a_n,$$

тогда $a_1 * ... * a_n = b_0 * ... * b_k$.

Следующая процедура была предложена Лайтом в 1949 г.

Эту процедуру нужно проделать для каждого элемента a группоида M. Однако, ниже покажем, что ее достаточно проделать лишь для каждого элемента a из некоторого порождающего множества группоида M.

Рассмотрим две бинарные операции * и $\circ$, определенные в M следующим образом:

$$x * y = x \cdot (a \cdot y), x \circ y = (x \cdot a) \cdot y.$$

Ассоциативность выполняется в $(M, \cdot)$ тогда и только тогда, когда для каждого фиксированного элемента $a \in M$ эти две бинарные операции совпадают. Основная идея по существу состоит в построении таблиц Кэли для операций $*$ и $\circ$ и в проверке их совпадения.

$(*)$ - таблица получается из первоначальной $(\cdot)$ - таблицы заменой y - столбца для каждого $y \in M$ на $(a \cdot y)$ - столбец. Аналогично, для получения $(\circ)$ - таблицы нам нужно в x - строку записать $(x \cdot a)$ - строку $(\cdot)$ - таблицы.

Для удобства выполнения проверки заменяем верхнюю строку индексов $(*)$ - таблицы на a - строку $(\cdot)$ - таблицы, а левый столбец индексов – на a - столбец $(\cdot)$ - таблицы. Каждое вхождение $a \cdot y$ в a - строку $(\cdot)$ - таблицы показывает, какой из столбцов $(\cdot)$ - таблицы записать в качестве y - столбца $(*)$ - таблицы, а каждое вхождение $x \cdot a$ в a - столбец $(\cdot)$ - таблицы показывает, какую строку $(\cdot)$ - таблицы нужно сравнить с x - строкой $(*)$ - таблицы.

Тест ассоциативности Лайта также может быть реализован в программном коде при помощи различных языков программирования. В приложении А дан код соответствующей программы, написанной на языке C++.

На рисунке представлен результат работы программы, где слева входные, а справа выходные данные.

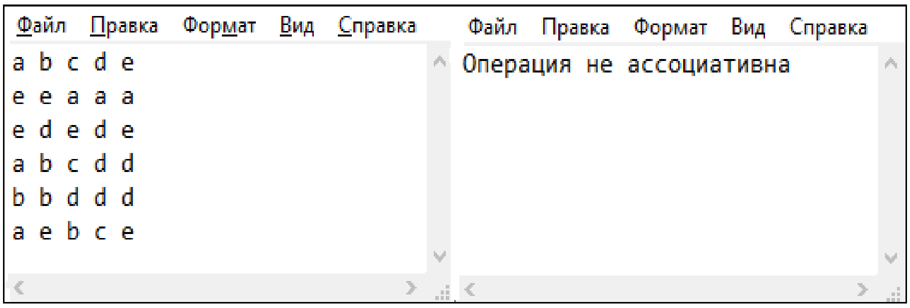

Рисунок 1 — Результат работы программы

Полугруппой преобразований на множестве A называется произвольная подполугруппа из $T_r(A)$. Аналогично, моноид преобразований на A определяется как подмоноид моноида $T_r(A)$.

Важность полугрупп и моноидов преобразований подчеркивается следующим результатом, аналогичным известной в теории групп теореме Кэли.

Теорема 11. Любая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований. Аналогично, любой моноид изоморфен моноиду преобразований.

Пусть A – непустое множество, называемое *алфавитом*, элементы которого будем называть *буквами*. Определим *слово* в алфавите A как непустую конечную последовательность $x_1x_2...x_n$ элементов из A. Таким образом, два слова $x_1x_2...x_m$ и $y_1y_2...y_n$ равны тогда и только тогда, когда они совпадают как последовательности, то есть когда $m = n$ и $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_m = y_m$. На множестве A^+ всех слов определим бинарную операцию:

$$x_1x_2...x_m \cdot y_1y_2...y_n = x_1x_2...x_my_1y_2...y_n.$$

Эта операция на A^+, называемая иногда конкатенацией, очевидно, ассоциативна, и A^+ называется свободной *полугруппой* на множестве A.
Теорема 12. Для любого отображения ϕ множества A в полугруппу S существует единственный гомоморфизм $\hat{\phi}$ свободной полугруппы A^+ в S, такой, что $\hat{\phi}(x) = \phi(x)$ для всех $x \in A$. Далее, гомоморфизм $\hat{\phi}$ сюръективен тогда и только тогда, когда $\phi(A)$ есть множество образующих полугруппы S.
Следствие 6. Любая полугруппа S является гомоморфным образом свободной полугруппы A^+ на произвольном множестве A, порождающем S.

Полугруппы могут быть использованы в биологии, чтобы описать определенные аспекты в скрещивании организмов, в генетике и в обмене веществ.

Пример. В разведении скота, отдельные особи в котором может быть черными или коричневыми, одноцветными или пятнистыми, известно, что черный цвет – это доминантный признак, коричневый – рецессивный, а одноцветность доминирует над пятнистостью. Таким образом, есть четыре возможных типа скота в этом стаде:

а) черный, одноцветный, в) коричневый, одноцветный,
б) черный, пятнистый, г) коричневый, пятнистый.

При скрещивании черной пятнистой особи и коричневой одноцветной мы ожидаем, что получится черная одноцветная особь, из-за доминантности. Это скрещивание может быть обозначено как $b * c = a$. Операция * может быть рассмотрена для всех возможных пар. Таким образом, получаем таблицу:

*	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

Таблица 2

Проверяя ассоциативность, видим, что $S = ([a, b, c, d], *)$ – полугруппа. Более того, таблица симметрична относительно главной диагонали, что означает, что операция * коммутативна, d – нейтральный элемент, а a – нулевой элемент. Ясно, что S не может быть группой. Таким образом, S – это коммутативный моноид с нулевым элементом a.

Определение 33. *Система родственных отношений* есть полугруппа $S = (X, R)$, где:

1) X есть множество "элементарных родственных отношений"
2) R есть отношение на X, выражающее равенство родственных отношений.

Произведение в S всегда определяется как продукт отношений.

Пример 1. Пусть X ={"отец" , "мать"} и $R = \varnothing$. Тогда система родственных отношений S есть полугруппа {"отец" , "мать" , "дед по отцовской линии" , . . .}.

Заключение. Главный результат представленной работы заключается в исследовании полугрупп и их применения в различных областях науки.

Наряду с этим, в работе были получены следующие основные результаты:

1. Изучены основные определения и результаты, связанные с понятием полугруппы.

2. Тест ассоциативности Лайта разобран и реализован в программном приложении.

3. Изучены возможные приложения полугрупп в биологии и социологии.