

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра _____ математического анализа _____

Многочлены Бернштейна и метод конечных элементов

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента _____ 2 _____ курса _____ 219 _____ группы

направления (специальности) _____ 01.04.02 прикладная математика и информатика _____

_____ механико-математического факультета _____

_____ Потапова Романа Владимировича _____

Научный руководитель

_____ доцент, к.ф.-м.н. _____

_____ Ю.В. Матвеева _____

Зав. кафедрой

_____ д.ф.-м.н., профессор _____

_____ Д.В. Прохоров _____

Саратов 2019

Введение. Потребности метода конечных элементов (МКЭ) приводят к задачам интерполяции на треугольных сетках. Ввиду локальности метода рассматривают обычно интерполяцию на одном треугольнике, а затем решение применяют на каждом треугольнике сетки. В работе будем рассматривать задачу интерполяции на треугольнике в контексте многочленов Бернштейна и многочленов Эрмита третьей степени.

Достаточно популярным в МКЭ является кубический элемент, который интерполирует функцию в вершинах треугольника и в его центре тяжести (в точке пересечения медиан), а его производные первого порядка по x и по y совпадают с соответствующими производными функции в вершинах треугольника. В двумерном случае оценки погрешности аппроксимации i -х производных $k + 1$ раз дифференцируемых функций i -ми производными интерполяционных кусочно-полиномиальных функций степени k по совокупности переменных (сумма степеней любого монома не превосходит k) имеют вид $Cd^{k+1-i} \sin^{-i} \alpha$, где d – диаметр триангуляции, α – наименьший из углов треугольников триангуляции ($0 \leq i \leq k$). Таким образом, говорят, что для найденной функции условие «синуса наименьшего угла» триангуляции является существенным. Показано, что при $k = 3$ существует функция, для которой оценки погрешности классического кубического элемента неулучшаемы. Закономерно возникает вопрос о существовании кубического элемента с кратной интерполяцией, для которого условие «синуса наименьшего угла» триангуляции можно заменить на условие «синуса наибольшего угла» триангуляции.

Для решения этого вопроса Ю. Н. Субботиным было предложено рассмотреть кубический элемент, отличный от классического.

Первая глава работы посвящена изучению элемента, представленного в статье Ю. Н. Субботина. Многочлены Эрмита позволяют единственным образом приблизить конкретную функцию на заданном треугольнике.

Как альтернатива такому подходу выступают многочлены Бернштейна, с помощью которых строятся поверхности Безье. При кусочном моделировании для задания и изменения формы куска, представляющего собой пространственную решетку из сплайнов или многоугольников, применяется сеть контрольных точек. Эти точки управления, также известные как контроль-

ные вершины оказывают на гибкую поверхность куска подобное магнитному влияние, при котором поверхность растягивается в том или ином направлении. Таким образом, многочлены Бернштейна позволяют изменять итоговую поверхность при одном и том же наборе опорных точек (при одной и той же информации о принимаемых значениях функции в конкретных точках области).

Целью данной работы является изучение подходов к интерполяции функций на треугольнике на примере многочленов Эрмита и многочленов Бернштейна.

В связи с поставленной целью в работе решаются следующие задачи:

- 1) дать основные определения, в частности, определения интерполяционного многочлена Эрмита, базисного многочлена Бернштейна, поверхности Безье
- 2) сформулировать и доказать свойства многочленов Эрмита и многочленов Безье
- 3) сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса о наилучшем приближении для функции двух переменных
- 4) указать методы построения многочленов Эрмита и Бернштейна
- 5) решить практическую задачу построения на произвольном треугольнике интерполяционной функции, удовлетворяющей условиям Ю.Н. Субботина.

Работа состоит из введения; основной части, она состоит из 4 разделов, часть из которых имеют разделения на пункты и подпункты; заключения; списка использованных литературных источников; приложения.

Основное содержание работы. В качестве элемента предлагается выбирать невырожденный треугольник, обозначим его Δ , интерполируемая функция $f(x, y)$ на нём должна быть непрерывна вместе с частными производными до четвёртого порядка включительно. Предполагается также, что равномерные нормы на треугольнике любых четвёртых производных функции не превосходят некоторого заданного числа M . Без ограничения общности можно считать, что треугольник расположен так, как показано на рисунке 1.

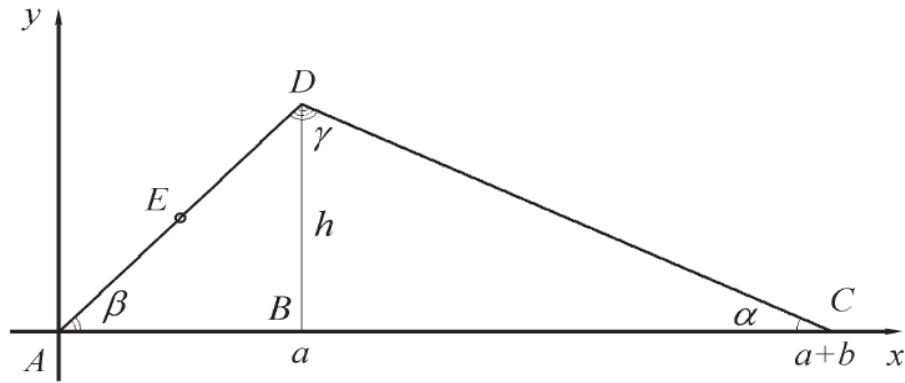


Рисунок 1

Здесь BD – перпендикуляр, опущенный из вершины D на наибольшую сторону AC треугольника; h – длина отрезка BD ; AD – наименьшая сторона треугольника; E – середина AD . Соответственно, α – наименьший, β – средний, γ – наибольший угол треугольника; $AB = a$; $BC = b$; $d = a + b$ – длина наибольшей стороны треугольника, $0 < a \leq b$.

На интерполяционный полином

$$H(x, y) = H(f; x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3$$

налагаются следующие условия:

- 1) Значения полинома в точках A, C, D совпадают со значениями функции $f(x, y)$ в этих точках.
- 2) Значения первых производных полинома по x и y в точках A, C, D совпадают со значениями соответствующих производных функции в тех же точках.
- 3) Значения производных по x полинома и функции в точке E совпадают.

Дадим определение для многочленов Эрмита третьей степени для функции двух переменных на треугольнике.

Определение 1.2. Пусть $f(x, y)$ имеет на треугольнике Δ с вершинами A, C, D по крайней мере первые частные непрерывные производные по x и

по y . Многочлен третьей степени $H(x, y)$, удовлетворяющий равенствам

$$\begin{aligned} H(A) &= f(A), H(C) = f(C), H(D) = f(D), \\ \frac{\partial}{\partial x} H(A) &= \frac{\partial}{\partial x} f(A), \frac{\partial}{\partial x} H(C) = \frac{\partial}{\partial x} f(D), \frac{\partial}{\partial x} H(D) = \frac{\partial}{\partial x} f(D), \\ \frac{\partial}{\partial y} H(A) &= \frac{\partial}{\partial y} f(A), \frac{\partial}{\partial y} H(C) = \frac{\partial}{\partial y} f(D), \frac{\partial}{\partial y} H(D) = \frac{\partial}{\partial y} f(D), \end{aligned}$$

называется интерполяционным многочленом Эрмита для функции $f(x, y)$.

Из определения видно, что многочлен $H(x, y)$ – это многочлен Эрмита. В работе для него доказывается справедливость соответствующей теоремы о существовании и единственности.

Теорема 1.3. Для любой функции $f(x, y)$, имеющей на невырожденном треугольнике Δ непрерывные производные до четвёртого порядка включительно, существует единственный интерполяционный многочлен Эрмита $H(x, y)$, удовлетворяющий условиям выше.

Оценки приближения функций многочленами $H(x, y)$ получаются непосредственно из ряда лемм, которые доказаны в работе.

Положим $r_{i,j}(x, y) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} [f(x, y) - H(x, y)]$.

Теорема 1.4. Справедливы следующие неравенства:

$$\|r_{k,0}(x, y)\|_{C(\Delta)} \leq KMd^{4-k} \quad (0 \leq k \leq 3), \quad (1)$$

$$\|r_{k-1,1}(x, y)\|_{C(\Delta)} \leq KM \sin^{-1} \gamma d^{4-k} \quad (1 \leq k \leq 3), \quad (2)$$

$$\|r_{k-2,2}(x, y)\|_{C(\Delta)} \leq KM \sin^{-2} \gamma d^{4-k} \quad (2 \leq k \leq 3), \quad (3)$$

$$\|r_{0,3}(x, y)\|_{C(\Delta)} \leq KM \sin^{-3} \gamma d, \quad (4)$$

где K – константы, не зависящие от f и Δ .

Следующая глава посвящена многочленам Бернштейна на треугольнике. Базисными полиномами Бернштейна от одной и двух переменных называются, соответственно, полиномы

$$b_k^n(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

и

$$b_{ks}^n(x, y) = C_n^{k,s} x^k y^s (1 - x - y)^{n-k-s},$$

$$k \in \{0, \dots, n\}, \quad s \in \{0, \dots, n - k\}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $C_n^{k,s} = \frac{n!}{k!s!(n-k-s)!}$ – так называемые *триномиальные* коэффициенты.

В частности,

$$\begin{aligned} b_{00}^0(x, y) &\equiv 1, \quad b_{n0}^n(x, y) = x^n, \quad b_{0n}^n(x, y) = y^n, \quad b_{00}^n(x, y) = (1 - x - y)^n; \\ b_{k0}^n(x, 0) &= b_k^n(x), \quad k \in \{0, \dots, n\}; \quad b_{ks}^n(x, 0) = 0, \quad s \in \{1, \dots, n\}, \quad k \in \{0, \dots, n - s\}; \\ b_{0s}^n(0, y) &= b_s^n(y), \quad s \in \{0, \dots, n\}; \quad b_{ks}^n(0, y) = 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad s \in \{0, \dots, n - k\}. \end{aligned}$$

Полином Бернштейна от двух переменных записывается в виде

$$B(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks} b_{ks}^n(x, y).$$

Этот полином определяет поверхность, которая называется *поверхностью Безье на треугольнике*. a_{ks} в общем случае – это треугольный массив чисел. Он содержит информацию об интерполируемой функции, нередко предполагают $a_{ks} = f\left(\frac{k}{n}, \frac{s}{n}\right)$.

Рассмотрим свойства полиномов Бернштейна, которые доказаны в работе.

Введём конечные разности на треугольном массиве коэффициентов

$$\begin{aligned} (\Delta^j a)_{*,s} &= \sum_{\beta=0}^j (-1)^{j-\beta} C_j^\beta a_{*,s+\beta}, \\ (\Delta^{i,j} a)_{ks} &= (\Delta^i (\Delta^j a)_{*,s})_k = \sum_{\alpha=0}^i (-1)^{i-\alpha} C_i^\alpha \left(\sum_{\beta=0}^j (-1)^{j-\beta} C_j^\beta a_{k+\alpha,s+\beta} \right) = \\ &= \sum_{\alpha=0}^i \sum_{\beta=0}^j (-1)^{i+j-\alpha-\beta} C_i^\alpha C_j^\beta a_{k+\alpha,s+\beta}. \end{aligned}$$

Предложение 2.1. Полином $B(x, y)$ допускает представление

$$B(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} C_n^{i,j} (\Delta^{i,j} a)_{00} x^i y^j. \quad (5)$$

Зафиксируем два целых неотрицательных числа α, β и положим $r = \alpha + \beta$.

Предложение 2.2. Для частной производной $\frac{\partial^r B(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ полинома в форме Бернштейна при $r \in \{1, \dots, n\}$ справедлива формула

$$\frac{\partial^r B(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = A_n^r \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r-k} (\Delta^{\alpha,\beta} a)_{ks} b_{ks}^{n-r}(x,y), \quad (6)$$

где $A_n^r = n(n-1)\dots(n-r+1)$.

Рассмотрим теперь $n+1$ треугольных массивов базисных полиномов Бернштейна

$$b_{ks}^i(x,y), \quad k \in \{0, \dots, i\}, \quad s \in \{0, \dots, i-k\}, \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

Для удобства положим

$$\begin{aligned} b_{k,-1}^i(x,y) &\equiv b_{-1,s}^i(x,y) \equiv 0, \quad k, s \in \{0, \dots, i+1\}; \\ b_{ks}^i(x,y) &\equiv 0, \quad k, s \geq 0, \quad k+s = i+1, \quad i = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Например, при $i = 3$ получим 15 искусственно добавленных полиномов.

Предложение 2.3. При любых вещественных x, y справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} b_{00}^0 &\equiv 1; \\ b_{ks}^i &= (1-x-y)b_{ks}^{i-1} + xb_{k-1,s}^{i-1} + yb_{k,s-1}^{i-1}, \\ k &\in \{0, \dots, i\}, \quad s \in \{0, \dots, i-k\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Зафиксируем произвольные вещественные x, y . Для вычисления значения $B(x,y)$ введём $n+1$ треугольных массивов $\{a_{ks}^i\}$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} a_{ks}^0 &= a_{ks}, \quad k \in \{0, \dots, n\}, \quad s \in \{0, \dots, n-k\}; \\ a_{ks}^i &= (1-x-y)a_{ks}^{i-1} + xa_{k+1,s}^{i-1} + ya_{k,s+1}^{i-1}, \\ k &\in \{0, \dots, n-i\}, \quad s \in \{0, \dots, n-i-k\}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Этот быстрый алгоритм известен как *алгоритм де Кастельжо* построения точки на поверхности Безье [17].

Предложение 2.4. Справедливо равенство $B(x, y) = a_{00}^n$.

Предложение 2.5. При фиксированных x, y частные производные полинома в форме Бернштейна можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial^r B(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = A_n^r (\Delta^{\alpha, \beta} a^{n-r})_{00}.$$

Здесь $\alpha + \beta = r, r \in \{1, \dots, n\}$.

Как итог, $n + 1$ треугольных массивов a_{ks}^i , построенных по формуле (20), дают возможность вычислить как значение полинома $B(x, y)$, так и значения всех его частных производных в фиксированной точке (x, y) .

В пункте с доказательством теоремы Вейерштрасса для функции двух переменных в качестве области выступит треугольник $\Delta = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, а вместо треугольного массива $\{a_{k,s}\}$, как и при доказательстве одномерного случая, будут использоваться значения функции в соответствующих точках:

$$B_n^f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n}, \frac{s}{n}\right) b_{ks}^n(x, y).$$

Запишем теорему Вейерштрасса сразу в терминах многочленов Бернштейна, её доказательство можно найти в работе.

Теорема 2.2. (Теорема Вейерштрасса для $f(x, y)$) Если $f(x, y)$ ограничена на Δ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^f(x, y) = f(x, y)$$

во всех точках $(x, y) \in \Delta$, где $f(x, y)$ непрерывна.

Отметим, что функция, задающая кривую Безье, может быть представлена в виде линейной комбинации базисных полиномов Бернштейна, а полином Бернштейна от двух переменных определяет поверхность Безье на треугольнике.

Практическое задание основывалось на первой главе работы и заключалось в реализации соответствующего алгоритма построения интерполяционного полинома $H(x, y)$ для произвольной функции $f(x, y)$, удовлетворяющей условиям метода.

С реализацией алгоритмов можно ознакомиться в приложении работы.

Заключение. В ходе выполнения работы были реализованы поставленные цели и задачи: даны основные определения, сформулированы и доказаны основные свойства многочленов Эрмита и многочленов Бернштейна; показано, что интерполяционный многочлен из статьи Ю.Н. Субботина является Эрмитовым многочленом; для такого интерполяционного многочлена доказана соответствующая теорема о существовании и единственности; сформулирована и доказана теорема об оценке погрешности аппроксимации функции Эрмитовыми многочленами из статьи; указан быстрый алгоритм де Кастельжо получения значения многочлена Бернштейна в точке; сформулирована и доказана теорема Вейерштрасса о наилучшем приближении для функции двух переменных; решена практическая задача построения на произвольном треугольнике интерполяционной функции, удовлетворяющей условиям Ю.Н. Субботина, с использованием среды Wolfram Mathematica.

Рассмотренная в работе тема интерполяции функций на треугольнике важна, так как она направлена на решение класса задач, часто встречающихся в математике и её приложениях.