Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Логарифмические уравнения и неравенства

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направление 44.04.01 – Педагогическое образование

механико-математического факультета

Таймановой Галии Консултановны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н. _______________ А.М. Захаров

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор _______________ Д.В. Прохоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Магистерская работа представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Логарифмические уравнения и неравенства». Данный образовательный курс предназначен для учащихся 11 классов основного общего образования и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой.

Электронный образовательный курс «Логарифмические уравнения и неравенства» – это электронный ресурс, который содержит полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы согласно учебному плану в рамках образовательной программы и обеспечивает все виды работы в соответствии с программой дисциплины, включая практикум, средства для контроля качества усвоения материала, методические рекомендации для обучающегося по изучению данной темы.

Выявленные противоречия обусловили **проблему** исследования, которая заключается в отсутствии дистанционных материалов контроля при изучении логарифмических уравнений и неравенств.

Цель исследования: разработка, обоснование дистанционных тестовых заданий различного уровня сложности по теме «Логарифмические уравнения и неравенства».

Исходя из проблемы и цели исследования, определены следующие его **задачи**:

– рассмотреть основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств;

– провести анализ учебно-методической литературы с целью выявления проблем изложения данной темы в школьном курсе математики и теоретически обосновать необходимость конструирования дистанционных тестовых заданий;

– разработать электронный образовательный курс по теме «Логарифмические уравнения и неравенства»;

– апробировать разработанный электронный образовательный курс «Логарифмические уравнения и неравенства» в системе основного общего образования.

Для решения поставленных задач использовались следующие методы: изучение литературы, анализ и синтез, наблюдение за работой учителей математики в период практики, экспериментальная апробация разработанного электронного образовательного курса в сфере основного общего образования процессе обучения математике в МОУ СОШ №10 г. Саратова.

Магистерская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников.

По результатам выполнения работы на сайте http://ipsilon-dev.sgu.ru/ выставлены:

– теоретический материал по теме «Логарифмические уравнения и неравенства»;

– контрольные вопросы по теории;

– набор тренировочных тестовых заданий трёх уровней сложности.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В школьном курсе алгебры и начала анализа тема «Логарифмические уравнения и неравенства» изучается в 10-11 классах.

В связи с этим, для успешной сдачи экзамена в форме ЕГЭ, перед учителем встает задача: спланировать изучение данной темы таким образом, чтобы учащиеся получили максимальный объем информации, успели закрепить навыки на достаточном количестве примеров. А осознав изученный материал, расширили набор упражнений, порой не вошедших в школьный учебник.

При посещении уроков математики был проведен логико-дидактический анализ данной темы в учебнике А. Ш. Алимова Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни), 10-11 класс.

На основе проведенного анализа был сделан вывод, что необходимо расширить банк заданий по теме «Логарифмические уравнения и неравенства» и составить блок задач для каждого уровня сложности задания.

Были разработаны тестовые задания различных уровней сложности в количестве 10 тестов по 10 вопросов в каждом тесте. В общей сложности, половина вопросов отводится на тему «Логарифмические уравнения» и половина вопросов отводится на тему «Логарифмические неравенства».

Рассмотрим методы решения логарифмических уравнений и неравенств в таблице 1:

Таблица 1 – Методы решения логарифмических уравнений и неравенств

Методы решения логарифмических уравнений	**Методы решения логарифмческих неравенств**
1. По определению логарифма	
2. Метод потенцирования	
3. Метод подстановки	
4. Метод приведения к одному основанию	
5. Метод логарифмирования	
6. Функционально-графический метод	

На основе методов была составлена таблица, отражающая уровни сложности заданий по теме «Логарифмические уравнения и неравенства»:

Таблица 2 – Уровни сложности заданий

Уровни сложности	**I**	**II**	**III**
Методы решения	Определение логарифма; Простейшие свойства логарифма	Метод потенцирования; Свойства логарифма	Метод подстановки; Метод приведения к новому основанию

Тестовые задания I уровня сложности (Вариант №1)

1. $\log_2(4-\mathrm{x}) = 7 \leftrightarrow 4-\mathrm{x} = 2^7 \leftrightarrow 4-\mathrm{x} = 128 \rightarrow \mathrm{x} = -124$

Ответ: $\mathrm{x} = -124$.

2. $\log_5(5-\mathrm{x}) = 2 \leftrightarrow 5-\mathrm{x} = 5^2 \leftrightarrow 5-\mathrm{x} = 25 \rightarrow \mathrm{x} = -20$

Ответ: $\mathrm{x} = -20$.

3. $\log_6(3-\mathrm{x}) = 2 \leftrightarrow 3-\mathrm{x} = 6^2 \leftrightarrow 3-\mathrm{x} = 36 \rightarrow \mathrm{x} = -33$

Ответ: $\mathrm{x} = -33$.

4. $\log_5(4+\mathrm{x}) = 2 \leftrightarrow 4+\mathrm{x} = 5^2 \leftrightarrow 4+\mathrm{x} = 25 \rightarrow \mathrm{x} = 21$

Ответ: $\mathrm{x} = 21$.

5. $\log_3(4-\mathrm{x}) = 2 \leftrightarrow 4-\mathrm{x} = 3^2 \leftrightarrow 4-\mathrm{x} = 9 \rightarrow \mathrm{x} = -5$

Ответ: $\mathrm{x} = -5$.

6. $\log_{11}(3x-1) > 1$. ОДЗ: $3x-1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{3}$

$$\log_{11}(3x-1) > \log_{11} 11$$

Так как основание логарифма больше 1, то знак неравенства сохраняем:

$$3x - 1 > 11 \rightarrow x > 4$$

Ответ: $x \in (4; +\infty)$.

7. $\log_{\frac{1}{3}}(7x-1) > 0$. ОДЗ: $\{7x-1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{7} \rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(7x-1) > \log_{\frac{1}{3}} 1$

Так как основание логарифма меньше 1, то знак неравенства меняем:

$$7x - 1 < 1 \rightarrow 7x < 2 \rightarrow x < \frac{2}{7}$$

Пересекаем решение и ОДЗ, имеем: $x \in \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

8. $\log_2 x \leq 2 \leftrightarrow \log_2 x \leq \log_2 4 \rightarrow x \leq 4$

Ответ: $x \in (-\infty; 4]$.

9. $\log_2 x \geq 2 \leftrightarrow \log_2 x \geq \log_2 4 \rightarrow x \geq 4 \rightarrow x \in [4; +\infty)$

Ответ: $x \in [4; +\infty)$.

10. $\log_3 x > 1 \leftrightarrow \log_3 x > \log_3 3 \rightarrow x > 3 \rightarrow x \in (3; +\infty)$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

Тестовые задания II уровня сложности (Вариант №1)

1. Решить уравнение $\log_2(x^2 + 5x + 2) = 3$

Используем метод - решение логарифмических уравнений непосредственно по определению.

Найдем область допустимых значений (ОДЗ) заданного уравнения. Для этого решим неравенство:

$$x^2 + 5x + 2 > 0$$

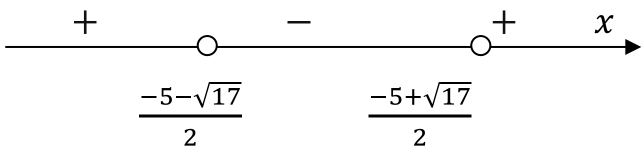
Раскладываем левую часть на множители, для этого находим корни квадратного уравнения:

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{17}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Отметим полученные корни на числовой прямой и определим знаки в полученных интервалах.



Учитывая знак неравенства, определим ОДЗ:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\ ;\ +\infty\right)$$

Перепишем уравнение, используя определение логарифма:

$$\log_2(x^2 + 5x + 2) = 3$$

$$x^2 + 5x + 2 = 2^3$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Решим полученное квадратное уравнение.

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \{-6; 1\}$$

Убеждаемся, что полученные корни принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x_1 = -6, x_2 = 1$.

2. Решить уравнение $\lg(3x - 11) + \lg(x - 27) = 3$

Найдем ОДЗ по определению логарифма. ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x - 11 > 0 \\ x - 27 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{11}{3} \\ x > 27 \end{cases} \leftrightarrow \ x > 27$$

Таким образом, $x \in (27; +\infty)$

Перепишем исходное уравнение, используя свойства суммы логарифмов и логарифма степени. Получим следующее уравнение:

$$\lg[(3x - 11) \cdot (x - 27)] = \lg 10^3$$

Приравняем подлогарифмические выражения:

$$(3x - 11)(x - 27) = 10^3$$

или после упрощения:

$$3x^2 - 92x - 703 = 0$$

Найдем корни полученного квадратного уравнения:

$$\sqrt{D} = \sqrt{16900} = 130$$

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{92 \pm 130}{2 \cdot 3} = \frac{92 \pm 130}{6} = \left\{37; -6\frac{1}{3}\right\}$$

Учитывая ОДЗ, корнем исходного логарифмического уравнения будет только $x = 37$.

Ответ: $x = 37$.

3. Решить уравнение $\lg(3 - x) - \lg(x + 2) = 2\lg 2$

Найдем ОДЗ по определению логарифма. ОДЗ:

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -2 \end{cases} \leftrightarrow x \in (-2; 3)$$

Перепишем уравнение, используя свойство разности логарифмов для левой части равенства, и внесем коэффициент в правой части как степень в подлогарифмическую функцию:

$$\lg(3-x)-\lg(x+2)=2\lg 2$$

Приравняем подлогарифмические выражения:

$$\frac{3-x}{x+2}=4$$

$$\frac{3-x-4(x+2)}{x+2}=0$$

$$\frac{3-x-4x-8}{x+2}=0$$

$$\frac{-5(x+1)}{x+2}=0$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен 0. Так как согласно ОДЗ выражение $x+2$ в нуль не обращается, то найдем значения, при которых числитель равен 0:

$$x+1=0 \leftrightarrow x=-1$$

Полученное значение принадлежит ОДЗ.

Ответ: $x=-1$.

4. $\log_3 x+\log_3(x+3)=\ \log_3(x+24)$

ОДЗ уравнения есть множество $x \in (0;+\infty)$ которое определяется из системы неравенств (условия существования логарифмов уравнения):

$$\begin{cases} x>0 \\ x+3>0 \\ x+24>0 \end{cases}$$

Используя свойство логарифма произведения положительных сомножителей и определения логарифма, получим

$$\log_3 x+\log_3(x+3)=\log_3 24 \leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+3)=\log_3(x+24) \\ x>0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(x+3)=x+24 \\ x>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-24=0 \\ x>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ x=4 \\ x>0 \end{cases} \leftrightarrow x=4$$

Ответ: $x=4$.

5. $\log_4(x^2 - 4x + 1) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2}$

Используя свойство логарифма частного двух положительных чисел, получим следствие исходного уравнения

$$\log_4 \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{2}$$

откуда, используя определение логарифма, получим

$$x^2 - 4x + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5)$$

откуда получаем уравнение

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

с решениями $x_1 = -1$ и $x = 3$. После проверки остается лишь $x = -1$

Ответ: $x = -1$.

6. Решить неравенство $\log_2(x^2 + 4x + 3) > 3$

По определению логарифма, область допустимых значений:

$$x^2 + 4x + 3 > 0$$

Решение данного неравенства найдем с помощью метода интервалов, для этого левую часть разложим на множители.

Решим квадратное уравнение $x^2 + 4x + 3 = 0$.

$$\sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$$

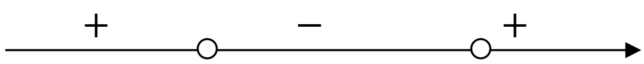
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \{-3; -1\}$$

Можете проверить решение и ответ в нашем сервисе – решение квадратных уравнений.

Таким образом, получили корни $x_1 = -3, x_2 = -1$. Значит, левую часть неравенства можно представить в виде:

$$1 \cdot \big(x - (-3)\big)\big(x - (-1)\big) > 0 \leftrightarrow (x + 3)(x + 1) > 0$$

Отметим нули каждого множителя (а это будут значения $x_1 = -3, x_2 = -1$) на числовой прямой и определим знаки неравенства в полученных интервалах:



$-3 \qquad\qquad -1$

ОДЗ определили, теперь приступим к решению исходного логарифмического неравенства:

$$\log_2(x^2 + 4x + 3) > 3$$

Представим правую часть неравенства как логарифм по основанию 2:

$$\log_2(x^2 + 4x + 3) > \log_2 2^3$$

Перейдем от неравенства относительно логарифмов к неравенству для подлогарифмических функций: так как основание логарифма больше единицы (2 > 1), то знак неравенства не изменится:

$$x^2 + 4x + 3 > 2^3$$

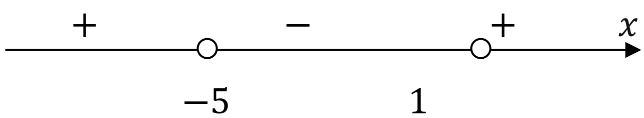
$$x^2 + 4x - 5 > 0$$

Приравняем к нулю левую часть неравенства и решим полученное квадратное уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$.

$$\sqrt{D} = \sqrt{36} = 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm 6}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \{-5; 1\}$$

Таким образом, получили корни $x_1 = -5, x_2 = 1$. Отметим точки на числовой оси и определим знаки неравенства в полученных интервалах.



Учитывая, что нас интересуют все значения x, при которых данное неравенство принимает положительные значения, то получаем следующие интервалы: $x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$. Это ответ, так как данные интервалы полностью принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.

Тестовые задания III уровня сложности (Вариант 3)

1. Решить уравнение $\log_3{}^2 x - 4\log_3 x = 0$

Используем метод – решение логарифмических уравнений заменой.

ОДЗ: $x > 0$

Введем замену $\log_3 x = y$, чтобы записать исходное уравнение в виде стандартного квадратного уравнения. Тогда уравнение примет вид:

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$y = 2$$

$$x = 3^2 \rightarrow x = 9 \ \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: $x = 9$.

2. Решить уравнение $\log_2 x + \log_x 16 = 5$

Используем метод – решение логарифмических уравнений, переходя к одному основанию.

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

К логарифму по основанию x (второе слагаемое) вначале применим свойство логарифма степени, а затем по формуле замены основания логарифма приведем его к основанию 2:

$$\log_2 x + \log_x 2^4 - 5 = 0$$

$$\frac{{\log_2}^2 x \ + 4 - 5\log_2 x}{\log_2 x} = 0$$

Так как $\log_2 x \neq 0$, то

$${\log_2}^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \{4{,}1\}$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 4 \\ \log_2 x = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2^4 \\ x = 2^1 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 16 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 16, \ x_2 = 2$.

3. Решить уравнение $\log_{3-x}(x - 2{,}5) = 0$

Используем метод – решение логарифмических уравнений по определению логарифма, когда основание логарифма - выражение с переменной.

Учитывая определение логарифма, запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} 3-x>0 \\ 3-x\neq 1 \\ x-2{,}5>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x\neq 2 \\ x>2{,}5 \end{cases} \leftrightarrow 2{,}5<x<3$$

$$x-2{,}5=(3-x)^0$$

$$x=3{,}5$$

Полученный корень не принадлежит области допустимых значений, поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ: Уравнение не имеет решений.

4. Решить уравнение $x^{\lg x-1}=100$

Используем метод – решение логарифмических уравнений логарифмированием.

ОДЗ: $x>0$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10:

$$\lg x^{\lg x-1}=\lg 100$$

$$\lg^2 x-\lg x=2$$

$$\lg^2 x-\lg x-2=0$$

$$y^2-y-2=0$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{9}=3$$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm 3}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}=\{2,-1\}$$

$$\left[\begin{array}{l} \lg x=2 \\ \lg x=-1 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=100 \\ x=0{,}1 \end{array}\right.$$

Оба значения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x_1=100,\ x_2=0{,}1$.

5. Решить уравнение $\log_5(5+3x)=\log_5 3\log_3(2x+10)$

Преобразуем $\log_5 3=\frac{1}{\log_3 5}$. Получим, что $\log_5(5+3x)=\frac{\log_3(2x+10)}{\log_3 5}$

$\log_5(5+3x) = \log_5(2x+10) \leftrightarrow 5+3x = 2x+10 \leftrightarrow 3x-2x = 10-5$

Ответ: $x = 5$.

6. Решить неравенство $\log_3 x + \log_x 9 > 2$

По определению логарифма, находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \leftrightarrow x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$$

Используя свойство логарифма и формулы замены основания, приведем второй логарифм к основанию 3

$$\log_3 x + \log_x 3^2 > 2$$

$$\log_3 x + \frac{2}{\log_3 x} > 2$$

$$y + \frac{2}{y} > 2, y \neq 0$$

$$y(y^2 - 2y + 2) > 0$$

Для решения полученного неравенства применим метод интервалов, для этого трехчлен $y^2 - 2y + 2$ разложим на множители. Приравняем его к нулю и решим полученное квадратное уравнение $y^2 - 2y + 2 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$

Перейдем к x, для этого делаем обратную замену:

$$\log_3 x > 0 \rightarrow x > 3^0 \rightarrow x > 1$$

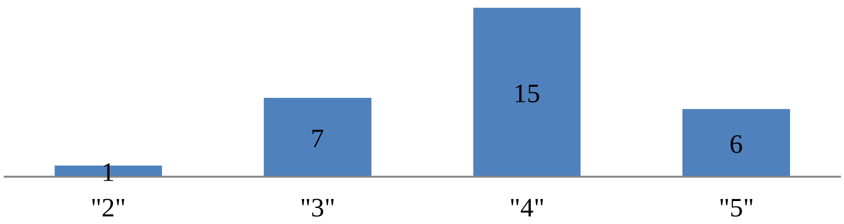
Ответ: $x \in (1;+\infty)$.

Апробация разработанных тестов проводилась в МОУ «Средняя общеобразовательная школа №10» г. Саратова в 11А, Б классах.

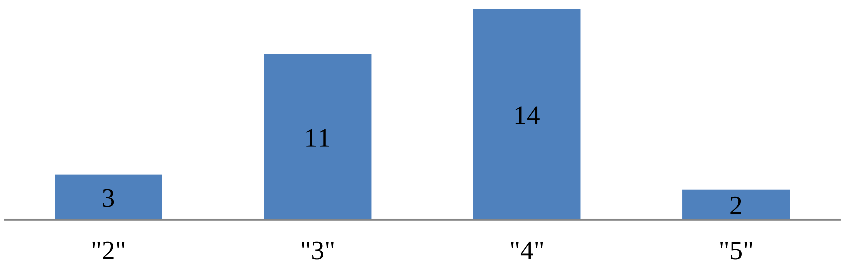
Учащимся были предложены тестовые задания, которые состоят из нескольких вариантов, в каждом варианте 10 заданий (5 уравнений и 5 неравенств соответственно). Учащимся было предложено выбрать задания в соответствии с уровнями сложности и умениями, необходимыми для решения логарифмических уравнений и неравенств.

Результаты выполнения тестов приведены в диаграммах:

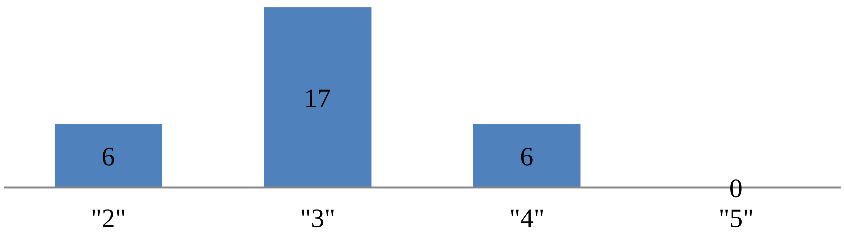
I уровень



II уровень



III уровень



По результатам тестирования был сделан вывод, что учащиеся 11 классов хорошо справляются с заданиями, решаемыми простейшими методами, используемыми и практикуемыми на уроках математики.

Результаты тестирования доказали необходимость внедрения и использования на уроках математики дополнительного банка заданий по теме «Логарифмические уравнения и неравенства», в том числе разработанный электронный образовательный курс, включающий в себя тестовые задания базового и профильного уровней единого государственного экзамена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы рассмотрели основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств. Исходя из методов, разработали классификацию методов решения логарифмических уравнений по уровням сложности, а также раскрыли их многими различными примерами. На основе данной классификации разработали электронный образовательный курс «Логарифмические уравнения и неравенства», в том числе, тестовые задания трех уровней сложности для самостоятельного изучения данной темы и подготовки учащихся к единому государственному экзамену.

В настоящее время дистанционное образование имеет особое место, значение и статус. Разрабатываемый учителем электронный образовательный курс должен наиболее полно объяснить учащимся методы решения логарифмических уравнений и неравенств. Также учащимся будет интересно узнать, что одну и ту же задачу можно решать различными способами и находить ответ. Курс направлен на то, чтобы помочь ученику, выпускнику при подготовке и успешной сдаче единого государственного экзамена и при обучении в вузах.

Разработка электронного образовательного курса «Логарифмические уравнения и неравенства» позволила реализовать следующие задачи:

– изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме, новизна и значимость данного материала для подготовки к текущему контролю и экзаменам;

– определены методические особенности данной темы, методику её преподавания каждый учитель подбирает для себя самостоятельно, учитывая способности учащихся;

– разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности;

– расширен кругозор учащихся, ограниченный информацией учебника.

Цели и задачи, поставленные при выполнении выпускной квалификационной работы, достигнуты, а для подтверждения гипотезы проведена апробация тестовых заданий электронного образовательного курса.