Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

МОНОТОННОСТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы
направление 44.04.01 – Педагогическое образование
механико-математического факультета
Сычевой Светланы Владимировны

Научный руководитель
д.ф.- м. н., доцент ________________ В.Г. Тимофеев

Зав.кафедрой
д.ф.- м. н .,профессор ________________ Д.В. Прохоров

Саратов 2017

Введение. Выпускная квалификационная работа магистра представляет собой материалы элективного курса по теме «Монотонность при решении задач». Данный элективный курс предназначен для учащихся 10-11 классов основного общего образования, и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой.

Основные цели создания элективного курса:

- познакомить учащихся с некоторыми приёмами решения уравнений и неравенств с использованием свойств монотонности функций, показать применение производной при решении уравнений или неравенств;
- развитие умения решать задачи с параметрами с применением понятий монотонности функции, наибольшего и наименьшего значения функции;
- обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений;
- подготовка учащихся к итоговой аттестации и к обучению в вузе.

Задачи создания элективного курса:

- изучение теоретического материала по данной теме;
- научить применять свойства монотонных функций при решении уравнений и неравенств;
- подбор заданий трех уровней сложности.

Умение правильно применять свойства монотонности позволяет решить задачи не прибегая к каким-либо большим преобразованиям, которыми не всегда удобно пользоваться. Применение свойств монотонности при решении уравнений и неравенств с параметрами вызывает у учащихся значительные затруднения. В материалах ЕГЭ предлагаются задания, содержащие параметр. Появление таких заданий на экзаменах далеко не случайно, так как с их помощью проверяется техника владения формулами элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, умение выстраивать логическую цепочку рассуждений, уровень логического мышления учащегося и их математической культуры.

По результатам выполнения магистерской работы на сайте http://ipsilon-dev.sgu.ru/ выставлены:

- теоретический материал по теме «Монотонность при решении задач»;
- контрольные вопросы по теории;
- тренировочные задачи трёх уровней сложности.

Основное содержание работы. Введём понятие монотонной функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) > f(x_2)$.

Как правило, термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием - *монотонная функция*, а исследование функции на возрастание или убывание называют исследованием функции на монотонность.

Свойства монотонных функций:

1. Если функции f и g возрастают (убывают) на интервале (a, b), то сумма функций $f + g$ также возрастает (убывает) на этом интервале.
2. Если функция f возрастает (убывает) на интервале (a, b), то противоположная функция $-f$ убывает (возрастает) на этом интервале.
3. Если функция f возрастает (убывает) на интервале (a, b), то обратная функция $\frac{1}{f}$ убывает (возрастает) на этом интервале.
4. Если функции f и g возрастают (убывают) на интервале (a, b) и, кроме того, $f \geq 0$, $g \geq 0$, то произведение функций f и g также возрастает (убывает) на этом интервале.

5. Если функция g возрастает (убывает) на интервале (a, b), а функция f возрастает (убывает) на интервале (c, d), где $g: (a, b) \to (c, d)$, то композиция функций $f * g$ (то есть сложная функция $y = f(g(x))$ также возрастает (убывает) на интервале (a, b).

Сформулируем признаки монотонности функции [5]:

Теорема 1 *(необходимое условие монотонности функции).* Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), тогда:

1) если функция $f(x)$ монотонно возрастает на интервале (a, b), то $f'(x) > 0$ на (a, b).

2) если функция $f(x)$ монотонно убывает на интервале (a, b), то $f'(x) < 0$ на (a, b).

Теорема 2 *(достаточное условие монотонности функции).* Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), тогда:

1) если для любой точки x интервала (a, b) $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ – возрастающая на интервале (a, b) функция.

2) если для любой точки x интервала (a, b) $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ – убывающая на интервале (a, b) функция.

При изучении школьного курса алгебры и начал математического анализа часто приходится выяснять, возрастает или убывает та или иная функция. В данной главе покажем, что использование монотонности функций, входящих в уравнение позволяет учащимся существенно упростить техническую часть решения, а иногда без него невозможно решить задачу.

Решение уравнений и неравенств с использованием свойства монотонности основывается на следующих утверждениях [7].

1. Пусть $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке D, тогда уравнение $f(x) = \mathrm{C}$, где С – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке D.
2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на промежутке D функции, $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает на этом промежутке, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке D.

Монотонность функции на множестве R при решении уравнений

Если функция $f(t)$ строго возрастает на R, то $f\big(h(x)\big) = f\big(g(x)\big)$ равносильно уравнению $h(x) = g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго убывает на R, то $f\big(h(x)\big) = f\big(g(x)\big)$ равносильно уравнению $h(x) = g(x)$.

Монотонность функции на промежутке при решении уравнений

Если функция $f(t)$ строго монотонна на своей области существования – промежутке D, то уравнение $f\big(h(x)\big) = f\big(g(x)\big)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) = g(x), \\ E(h) \subset D, \\ E(g) \subset D. \end{cases}$$

Функции разной монотонности при решении уравнений

Уравнение $u(x) = v(x)$, где $u(x)$ – возрастающая, а $v(x)$ – убывающая функции, либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Задача вида $f\big(f(x)\big) = x$

Если функция строго возрастает на некотором промежутке, то уравнения $f(x) = x$ и $f\big(f(x)\big) = x$ равносильны на этом промежутке.

Рассмотрим способы решения различных типов неравенств на основе монотонности и непрерывности функций, входящих в неравенства.

Монотонность функции на множестве R при решении неравенств

Если функция $f(t)$ строго возрастает на R, то $f\big(h(x)\big) > f\big(g(x)\big)$ равносильно уравнению $h(x) > g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго убывает на R, то $f\big(h(x)\big) > f\big(g(x)\big)$ равносильно уравнению $h(x) < g(x)$.

Монотонность функции на промежутке при решении неравенств

Если функция $f(t)$ определена и является возрастающей на своей области определения – промежутке M, то неравенство $f(h(x)) > f\big(g(x)\big)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) > g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Если функция $f(t)$ строго убывает на своей области определения – промежутке M, то неравенство $f(h(x)) < f\big(g(x)\big)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) < g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Функции разной монотонности при решении неравенств

Пусть на промежутке $(a; b)$ заданы возрастающая функция $f(x)$ и убывающая функция $g(x)$, причем x_0 – корень уравнения $f(x) = g(x)$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > g(x)$ – все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < g(x)$ – промежуток $(a; x_0)$.

Пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $f(x)$ и x_0 – корень уравнения $f(x) = с$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > с$ – все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < с$ – промежуток $(a; x_0)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что значит исследовать функцию на монотонность?

а) это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает;

б) это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция убывает;

в) это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких убывает.

2. Сформулируйте достаточное условие монотонности функции.

3. При каком условии функция $y = log_a x, a > 0$ возрастает?

а) при $a > 1$;

б) при $a < -1$;

в) при $-1 < a < 1$.

4. Если функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ строго убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$:

а) не имеет решений;

б) имеет множество решений;

в) имеет не более одного решения.

Какие из следующих утверждений верны:

5. Если функции f и g возрастают (убывают) на интервале (a, b), то сумма функций $f + g$ также возрастает (убывает) на этом интервале.

6. Если функция $f(t)$ строго убывает на R, то $f\big(h(x)\big) > f\big(g(x)\big)$ равносильно уравнению $h(x) \geq g(x)$.

7. Функция $y = sinx$ возрастает на $[\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{2} + \pi n]$,

убывает на $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in Z$.

Тренировочные задачи базового уровня сложности

Вариант 1

1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-2;12). Запишите промежутки возрастания функции $f(x)$.

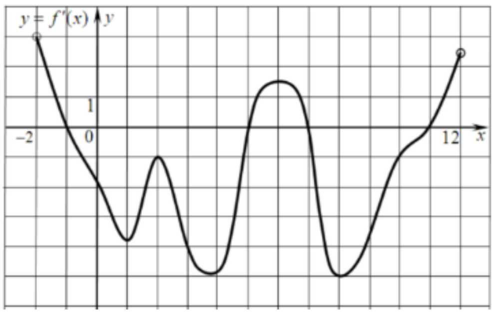

Рисунок 1 – График производной функции $f(x)$.

2. Запишите промежутки, на которых функция $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ убывает.

3. Какая из перечисленных функций убывает на промежутке $(0; 2)$.

4. Исследовать на монотонность функцию $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

5. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

6. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 12x.$$

7. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 5$.

Вариант 2

1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-10;2). Найдите промежутки, на которых функция $f(x)$ убывает.

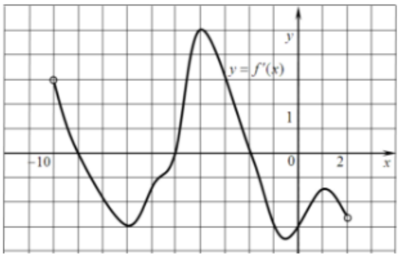

Рисунок 2 – График производной функции $f(x)$.

2. Запишите промежутки возрастания функции $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$.

3. Какая из перечисленных функций убывает на промежутке $(-1; 0)$.

4. Исследовать на монотонность функцию $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

5. Найдите интервалы монотонности функции $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

6. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \frac{-x^2+6x-18}{x^2}$.

7. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

   $f(x) = -x^2 + 10x + 7$.

Вариант 3

1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 11)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$.

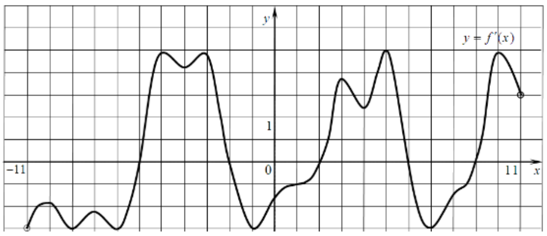

Рисунок 3 – График производной функции $f(x)$.

2. Запишите промежутки, на которых функция $f(x) = x^3 - 3x^2$ убывает.

3. Какая из перечисленных функций убывает на промежутках $[-3; 0) \cup (0; 3)$.

4. Исследовать на монотонность функцию $f(x) = 2\ln x - x^2$.

5. Найдите интервалы монотонности функции $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}, x \geq 0$.

6. Исследовать на монотонность функцию $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

7. Найдите интервалы монотонности функции $f(x) = x^3 - 12x + 5$.

Тренировочные задачи среднего уровня сложности

Вариант 1.

1. При каком условии логарифмическая функция $y = log_a x$ возрастает?

2. Определите, какие из перечисленных ниже функций являются убывающими?

3. Решите уравнение $3^x + 4^x = 7^x$[11].

4. Решите уравнение $\sqrt{37x + 12} - \sqrt{31 - 6x} = 2$ [11].

5. Решите уравнение $2 + sin^2 \frac{\pi x}{2} = 3 \cdot 2^{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$ [12].

6. Решите неравенство $\sqrt{7 + x} \geq 7 - 2x$.

7. Решите неравенство $(log_{3x-1}(2x) - 1)(log_x(3 - x) - 1) > 0$.

8. Решите неравенство $(x + 1) \cdot 3^{x-2} > 45$.

Вариант 2.

1. При каком условии логарифмическая функция $y = log_a x$ убывает?

2. Определите, какие из перечисленных ниже функций являются возрастающими?

3. Решите уравнение $x + 4 = 3^{-x}$.

4. Решите уравнение $\sqrt[3]{4x - 1} + \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[9]{x - 6} = 6$.

5. Решите уравнение $arcco\,s(x^2 - 3) = arccos(x + 3)$.

6. Решите неравенство $\sqrt{2-x} < x+4$ [13].

7. Решите неравенство $\frac{log_{0,2}\frac{1}{2x-1}+log_5(2-x)}{log_5(2x-1)+log_{0,2}\frac{1}{3-2x}} \geq 0$.

8. Решите неравенство $2^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}+1}+4^{\sqrt{x}+2} > 20$.

Вариант 3.

1. При каком условии показательная функция $y=a^x$ возрастает?

2. Определите, какие из перечисленных ниже функций являются возрастающими?

3. Решите уравнение $3^x+4^x=5^x$.

4. Решите уравнение $\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[8]{x-2}=2$.

5. Решите уравнение $arccosx = arcsin2x$.

6. Решите неравенство $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x} \leq 2$ [7].

7. Решите неравенство $\frac{(\,log_2(2x+1)-log_2(x+2))(|x|-|x-2|)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}} \leq 0$.

8. Решите неравенство $(2x^2+1)^5-(3x)^5 > 3x-2x^2-1$.

Тренировочные задачи повышенного уровня сложности

Вариант 1.

1. При каждом значении параметра a исследовать на монотонность функцию $f(x)=2x^3+(9-3a)x^2-18ax+5$.

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$8x^6+(a-|x|)^3+2x^2-|x|+a=0$$

имеет более трех различных решений.

3. Определите число корней уравнения $\sqrt{3x-5}=a-\sqrt{3x+11}$ [14].

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$sin(x-3a)+\sin\left(\frac{x^2-6x+7a}{2}\right)=4x-x^2-a$$

не имеет действительных решений.

5. Найдите все положительные значения параметра a, при котором уравнение

$5\left((ax-2)^3-(x^2-2)^3+3e^{x^2}\right)=6e^{x^2}\cdot sin2x^2-6e^{ax}\cdot sin2ax+3e^{x^2}\cdot$ $cos2x^2-3e^{ax}\cdot cos2ax$

имеет как минимум два решения.

6. При каких значениях параметра a неравенство

$$log_5(a\cos 2x+\ (1+5a^2-sin^2x)\cos x+4+a)\leq 1$$

справедливо при всех значениях x?

Вариант 2.

1. При каких значениях параметра a функция $f(x)=sinx-ax$ убывает на всей числовой прямой.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left||x-a|+2x\right|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

3. Определите число корней уравнения $\sqrt{2x+8}-a=\sqrt{2x+3}$ [14].

4. Укажите все значения параметра a, при котором уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$$

имеет решение.

5. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $3x^2-12x+3a+9=4sin\frac{4x-x^2-a-3}{2}\cdot cos\frac{x^2-2x-a-1}{2}$

имеет ровно два различных решения.

6. При каких значениях параметра a неравенство

$$log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)log_5(x^2+ax+6)+log_a 3 \geq 0$$

имеет единственное решение?

Вариант 3.

1. При каких значениях параметра a функция $f(x)=x^3+ax^2-(2a-3)x+5$ возрастает на $[2;+\infty)$.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+13|x|+5\sqrt{4x^2+9}=3a+3|4x-3a|$

имеет хотя бы один корень.

3. Решите уравнение $\sqrt[7]{x}-\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[7]{a}.$

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^6+(5a-8x)^3+3x^2+15a=24x$ не имеет корней [15].

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $sin(x+4a)+\sin\left(\frac{x^2-6x-7a}{2}\right)=4x-x^2-a$

не имеет действительных решений.

6. При каких значениях параметра а неравенство

$$log_5(a\,cos\,2x+\ (1+5a^2-sin^2x)\,cos\,x+4+a)\leq 1$$

справедливо при всех значениях x?

Заключение. В данном дистанционном проекте реализована тема «Монотонность при решении задач».

В основу образовательного процесса при дистанционном обучении положена целенаправленная и контролируемая интенсивная самостоятельная работа обучаемого, который мог бы учиться в удобном для себя месте, по индивидуальному расписанию, имея при себе комплект специальных средств обучения и согласованную возможность контакта с преподавателем в процессе обучения.

Электронный образовательный курс «Монотонность при решении задач» был апробирован в средней общеобразовательной школе, в результате чего реализованы следующие задачи:

- изучен и проанализирован теоретический материала по данной теме;

- определены методические особенности данной темы, методику её преподавания каждый учитель подбирает для себя самостоятельно, учитывая способности учащихся;
- разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности.

Таким образом, практическое значение данной темы заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели. Теоретическая и практическая часть пособия включает в себя материал, который отсутствует в школьной программе.