Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического анализа

Метод рационализации при решении неравенств

АВТОРЕФЕРАТ К МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЕ

студентки 2 курса 222 группы

направление 44.04.01 – Педагогическое образование

механико-математического факультета

Полыновой Александры Валерьевны

Научный руководитель

Старший преподаватель ________________ Осипцев М.А.

зав. кафедрой,

профессор, д. ф.-м.н. ________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Неравенства занимают важное место в содержательно-методической линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики. Задания данного типа присутствуют так же в ЕГЭ (профиль)[3].

В виду того, что традиционным методом решением неравенств не всегда можно быстро и компактно найти верный ответ, в данной работе рассматривается тема «Метод рационализации при решении неравенств». Это обуславливает актуальность магистрской работы.

Линия уравнений и неравенств тесно связана с функциональной линией. Одна из важнейших таких связей приложения методов, разрабатываемых в линии уравнений и неравенств, к исследованию функции (например, к заданиям на нахождение области определения некоторых функций, их корней, промежутков знакопостоянства и т.д.). С другой стороны, функциональная линия оказывает существенное влияние как на содержание линии уравнений и неравенств, так и на стиль ее изучения. В частности, функциональные представления служат основой привлечения графической наглядности к решению и исследованию уравнений, неравенств и их систем [8].

Цель магистрской работы – изучить и описать метод рационализации при решении логарифмических и показательных неравенств.

Задачи магистрской работы:

– создать тестовые задания трех ровней сложности;

– провести анализ КИМов по ЕГЭ в печатном формате и online форумах, ЕГЭ 2017 года на предмет применяемости данного метода.

В первой главе работы представлена теоретическая часть темы, а именно: теоремы, отрывки занятий и примеры. Во второй – тестовые задания и решения к ним. В третьей – Анализ и апробации теоретического и практического материала за время работы в ППК СГТУ им. Ю.А. Гагарина и СКМиЭ СГТУ им. Ю.А. Гагарина.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В работе проанализированы учебники по математике за 10-11 класс под редакцией Никольского С.М.[11], Мордковича А.Г.[9] и Виленкина Н.Я.[1], а так же популярные образовательные ресурсы: «Решу ЕГЭ»[15], «Незнайка» [14] и «Самообразование[16]. Знания в доступной форме».

Так же в работе представлены четыре теоремы и одно следствие по теме: «Метод рационализации при решении неравенств».

Теорема 1. *Логарифмическое неравенство.*

На области допустимых значений знак выражения

$$\log_{f(x)} g(x) - \log_{f(x)} h(x) \qquad (1)$$

где $f(x), g(x), h(x)$ - некоторые функции, совпадает со знаком выражения $(f(x)-1)(g(x)-f(x))$.

Иначе говоря, выражение $\log_{f(x)} g(x) - \log_{f(x)} h(x)\ \Delta\ 0$, где Δ – один из знаков $<, >, \leq, \geq$, р*авносильно следующей системе неравенств*:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ (f(x)-1)\big(g(x)-h(x)\big)\Delta 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Доказательство.

Первые четыре неравенства системы (2) задают множество допустимых значений исходного логарифмического неравенства.

1) Если $0 < f(x) < 1$, то $f(x) - 1 < 0 \ => $ знак неравенства изменится на противоположный: $g(x)\nabla h(x)$.
2) Если $f(x) > 1$, то $f(x) - 1 > 0$ и, следовательно, $g(x)\Delta h(x)$.

Терема доказана.

Следствие. Выражение вида на области допустимых значений $\log_{f(x)} g(x)\Delta 0$ равносильно $(f(x)-1)(g(x)-1)\Delta 0$.

Теорема 2. *Показательное неравенство*

На области допустимых значений знак выражения

$$f(x)^{g(x)} - f(x)^{hg(x)} \quad (3)$$

где $f(x), g(x), h(x)$ - некоторые функции, совпадает со знаком выражения

$$(f(x) - 1)(g(x) - f(x)) \quad (4).$$

Иначе говоря, выражение $f(x)^{g(x)} - f(x)^{hg(x)}\ \Delta\ 0$, где $\Delta -$ один из знаков $<, >, \leq, \geq$, р*авносильно следующей системе неравенств*:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ (f(x) - 1)\big(g(x) - h(x)\big)\Delta 0 \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство аналогично Теореме 1.

Теорема 3. *Неравенства с модулем*

Для любых функций $f(x), g(x)$ множество решений $|f(x)| - |g(x)|V0$ (6) эквивалентно $\big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big)V0.$

где $f(x), g(x)$ - некоторые функции.

Доказательство.

Из (6) рассмотрим неравенство:

$$|f(x)|V|g(x)|;$$

Возведем обе части данного неравенства в квадрат;

$$f^2(x)Vg^2(x)\ ;$$

$$f^2(x) - g^2(x)V0;$$

$$\big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Иррациональные неравенства*

На области допустимых значений знак выражения

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\ (10)$$

где $f(x), g(x)$ - некоторые функции, совпадает со знаком выражения $(f(x) - g(x))$ (11).

Доказательство.

Учитывая область допустимых значений для выражения $\sqrt{f(x)}V\sqrt{g(x)}$, можно утверждать, что при возведении в квадрат знак неравенства сохраняется:

$$f(x)Vg(x), \forall\, f(x) \geq 0, g(x) \geq 0.$$

Перенесем обе части в левую сторону: $f(x) - g(x)V0$.

Что и требовалось доказать.

Примеры:

$$1)\ \ (x^2-8)^{\sqrt{x^2+x-12}} \geq (x^2-8)^{\sqrt{x^2-4x-5}}$$

$$\begin{cases} x^2-8>0 \\ x^2-8 \neq 1 \\ (x^2-8-1)\left(\sqrt{x^2+x-12}-\sqrt{x^2-4x-5}\right) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right) > 0 \\ x \neq \pm 3 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ \sqrt{x^2+x-12}-\sqrt{x^2-4x-5} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-9 \leq 0 \\ \sqrt{x^2+x-12}-\sqrt{x^2-4x-5} \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+x-12}-\sqrt{x^2-4x-5}=0$$

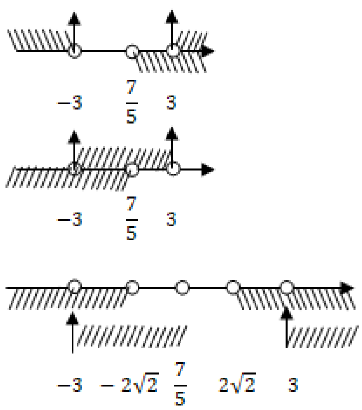
$$\sqrt{x^2+x-12}=\sqrt{x^2+x-12}$$

$$x^2+x-12=x^2+x-12$$

$$x^2+x-12-x^2+4x+5=0$$

$$5x-7=0$$

$$x=\frac{7}{5}$$



Ответ: $\left(-3;-2\sqrt{2}\right) \cup (3;+\infty)$

$$2)\ \ log_{x^2-5x+7}|2x| > log_{x^2-5x+7}|x-1|$$

$$\begin{cases} x^2-5x+7>0 \\ x^2-5x+7\neq 1 \\ |2x|>0 \\ |x-1|>0 \\ (x^2-5x+7-1)(|2x|-|x-1|)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\neq 2; x\neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ |2x|-|x-1|>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-5x+6<0 \\ |2x|-|x-1|<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$x^2-5x+6>0>0$$

$$D=25-4*7<0$$

$$(-\infty;+\infty)$$

$$x^2-5x+6>0\neq 0$$

$$(x-2)(x-3)\neq 0$$

$$x\neq 2$$

$$x\neq 3$$

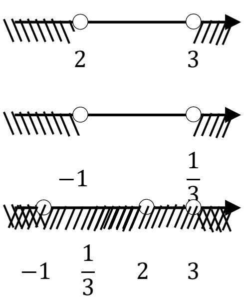
$$|2x|>0$$

$$\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1>0 \\ -(x-1)>0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ |2x|-|x-1|>0 \end{cases}$$



$$\left(\frac{1}{3};2\right)\cup(3;+\infty)$$

Таким образом, были разобраны некоторые примеры из тестовых заданий разных уровней сложности. Все задания были апробированы и доработаны в ходе учебной и производственной практик в колледжах при СГТУ им. Ю.А. Гагарина на занятиях по математике. Также проведен анализ заданий ЕГЭ-2017 по теме «Неравенства». Данные задания были также разобраны с сильнейшей группой, апробировавшей практические материалы магистрской работы.

По результатам апробаций тестовые задания дорабатывались, меняли уровень сложности в соответствии с результатами студентов. После проведения занятий по теме «Метод рационализации при решении неравенств» в каждой группе исправлялись ошибки и недочеты , проводился анализ и рефлексия занятий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При написании данной работы были проанализированы учебники для учащихся 10-11 классов, сборники по подготовке к ЕГЭ по математике, методические пособия для студентов техникумов и учебники для школ и колледжей, освещающие данную тему, а также электронные ресурсы по теме. Были посещены занятия по математике учителей старшей школы и преподавателей колледжа машиностроения и экономики СГТУ во время изучения темы «Метод рационализации при решении неравенств».

Пятнадцатое задание единого государственного экзамена содержат неравенства, содержащие неизвестное, решение которых требует громоздких выкладок и больших затрат времени. Метод рационализации позволяет сократить время при решении такого типа неравенств.

Была написана теоретическая часть, включающая четыре теоремы и следствия по теме, удобная таблица для использования учащихся, помогающая при решении данным методом и существенно облегчающая запоминание теорем. Разработаны тесты трех уровней, апробированы на учащихся первых и вторых курсов колледжей при политехническом университете имени Ю. А. Гагарина, а также описаны некоторые решений заданий к ним.

Эта работа может быть использована в качестве методического пособия при подготовке учащихся к ЕГЭ, так как включает в себя достаточное количество дидактических материалов, решенных неравенств, а также тестовых заданий.

Также теоретическая и практическая части могут быть использованы на занятиях по математике и математическом анализе техникумах и колледжах для студентов первого курса при изучении темы Неравенства.