Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

# МЕТОДЫ СЕЧЕНИЙ И ОБЪЕМЫ В ЗАДАЧАХ СТЕРЕОМЕТРИИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки курса 3 группы 322
направление 44.04.01 – Педагогическое образование

механико-математического факультета

Курандовой Наталии Александровны

Научный руководитель
к.ф.-м. н., доцент ____________________ Л.В. Сахно

Зав.кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________ Д.В. Прохоров

Саратов 2017

# ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей российского образования является повышение качества, эффективности и его доступности. Что предполагает собой правильный подход ко всему образовательному процессу. Многие учащиеся в дальнейшей в своей профессиональной деятельности будут пользоваться математикой. Поэтому важнейшая задача становится обеспечение гарантированного уровня подготовки всех школьников в независимости от их будущей профессии.

В современном информационном мире требуется достаточно сильная базовая подготовка, поэтому изучение темы «Методы сечений и объемы» очень актуально, так как она необходима для изучения смежных дисциплин.

Курс стереометрии общеобразовательной школы по программе, рассчитанной на два урока в неделю, страдает в своей практической части недостаточной преемственностью курса планиметрии, слабой взаимосвязью с другими учебными предметами и не является в полной мере составной частью базы знаний, необходимых учащимся для продолжения образования в высших учебных заведениях.

Метод сечений, известный своей универсальностью, применяется в некоторых разделах физики, в теоретической механике, сопротивлении материалов, гидравлике, в некоторых разделах высшей математики и других естественных науках и технических дисциплинах высшего образования. Этот метод оказывает большое влияние на развитие у школьников пространственных представлений и мышления. Тема «Объемы» - одна из центральных тем в курсе стереометрии средней школы. Отсюда мы можем сделать вывод, что если педагог не знает особенностей и методики проведения уроков, то и не может идти речи об усвоении материала по математике.

Ни один предмет учащиеся не готовы воспринимать так, как геометрию, где можно все увидеть наглядно. Но в тоже время геометрия в школе изучается с огромным опозданием. Шестилетний провал геометрического образования трудно восполним для детей, как с точки зрения умственного развития ребенка, так и с точки зрения эмоционального.

Именно при изучении многогранников, их объемов и сечений решение задачи наиболее ярко, их рассмотрению должно уделяться больше внимания, так как именно многогранники дают более богатый материал для развития пространственных представлений.

Объектом работы является процесс обучения стереометрии в средней школе.

Предмет исследования – изучение объемов и сечений многогранников в курсе стереометрии.

Основная цель работы – разработать методические рекомендации по изучению темы «Методы сечений и объемы в задачах стереометрии».

Изучение данной темы в курсе средней школы будет более эффективна, если:

- Формировать понятия объема и сечений наглядно, опираясь на жизненный опыт учащихся;
- Целенаправленно работать по формированию данных понятий начиная с 5 – 6 класса;
- Часто обращаться к задачам на объемы в старших классах;

# ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Объем треугольной пирамиды можно посчитать несколькими разными способами. Метод объемов – приравнивание двух подходящих выражений для объема, в результате чего удается вычислить искомую величину (угол или расстояние).

Данный метод можно использовать для вычисления:

- расстояние от точки до плоскости;
- угол между прямой и плоскостью;
- угол между плоскостями;
- расстояние между скрещивающимися прямыми.

## 1.1. Расстояние от точки до плоскости

При вычислении объема треугольной пирамиды можно в качестве основания взять любую грань. Это используется при нахождении расстояния от точки до плоскости, нужно лишь представить искомое расстояние как высоту подходящей пирамиды.

Предположим, что нам нужно найти расстояние от некоторой точки $C$ до плоскости $ABD$. Будем рассматривать треугольную пирамиду $ABCD$. Искомое расстояние – это высота $d$ данной пирамиды, проведенная из вершины $C$.

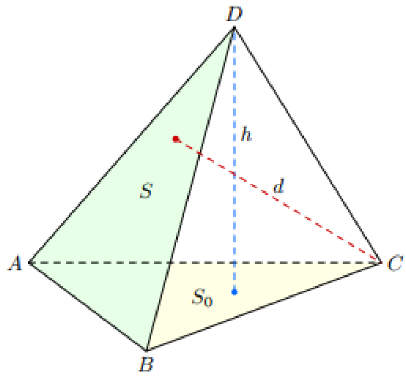


Рис. 1. $S_0h = Sd$

Пусть $S_0$ — площадь грани $ABC$, $h$ — высота, опущенная на эту грань, $S$ — площадь грани $ABD$. С одной стороны, объем пирамиды $ABCD$ может быть найден по формуле:

$$V = \frac{1}{3}S_0 h\,.$$

С другой стороны, за основание можно принять грань $ABD$, и тогда

$$V = \frac{1}{3}Sd\,.$$

Приравнивая правые части формул, получим:

$$S_0 h = Sd\,.$$

Из этого соотношения мы можем найти искомую величину $d$.

Теперь остается посмотреть, как это работает на конкретной задаче.

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ (с вершиной $P$) сторона основания равна 2 и высота равна 1. Найдите расстояние от точки $D$ до плоскости $BCP$.

Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду $BCDP$. Искомое расстояние $d$ есть высота этой пирамиды, проведенная из вершины $D$.

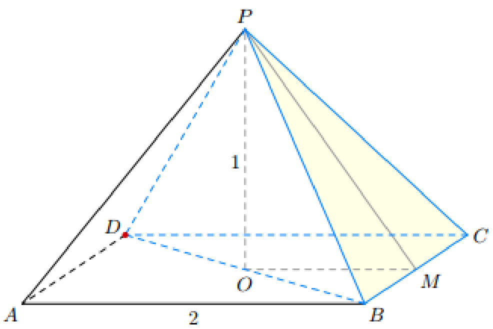


Рис. 2

Высота пирамиды $BCDP$, проведенная из вершины $P$, совпадает с высотой $PO$ исходной пирамиды. Согласно формуле $S_0 h = Sd$ имеем:

$$S_{BCD} \cdot PO = S_{BCP} \cdot d\,.$$

По условию $PO = 1$. легко находим $S_{BCD} = 2$. остается вычислить площадь треугольника $BCP$. его высоту $PM$ найдем из треугольника $POM$ : $PM = \sqrt{2}$, и тогда

$$S_{BCP} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PM = \sqrt{2}\,.$$

Подставляем найденные величины в $S_{BCD} \cdot PO = S_{BCP} \cdot d$ :

$$2 \cdot 1 = \sqrt{2} \cdot d\,,$$

откуда

$$d = \sqrt{2}\,.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Метод объемов достаточно легко справляется с задачами, решить которые другими методами было бы затруднительно.

### 1.2. Угол между прямой плоскостью

Сама идея вычисления угла между прямой и плоскостью очень проста и основана на вычислении расстояния от точки до плоскости. Мы это можем увидеть на рисунке, представленном ниже

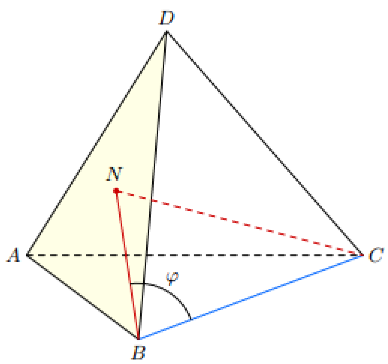


Рис. 3. Угол между прямой и плоскостью

Предположим, что нам нужно найти угол $\varphi$ между прямой $BC$ и плоскостью $ABD$. Вычисляем сначала высоту $CN$, после этого находим:

$$\sin\varphi = \frac{CN}{BC}.$$

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите угол между прямой $BB_1$ и плоскостью $AB_1C$.

Решение. Ситуация представлена на рисунке ниже

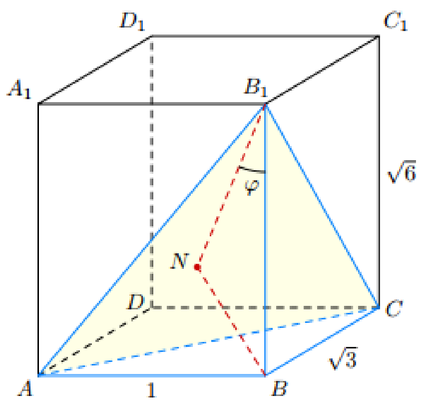


Рис. 4.

Расстояние от точки $B$ до плоскости $AB_1C$ равно

$$BN = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Остается найти искомый угол $\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{BN}{BB_1} = \frac{\sqrt{6}/3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}$.

### 1.3. Угол между плоскостями

При вычислении угла между плоскостями может оказаться полезной следующая формула:

$$V = \frac{2}{3}\frac{S_1 S_2}{a}\sin\varphi .$$

Здесь $S_1$ и $S_2$ — площади двух граней пирамиды, $a$ — общее ребро этих граней, $\varphi$ — угол между плоскостями этих граней.

Вывести эту формулу несложно. Давайте рассмотрим рисунок ниже

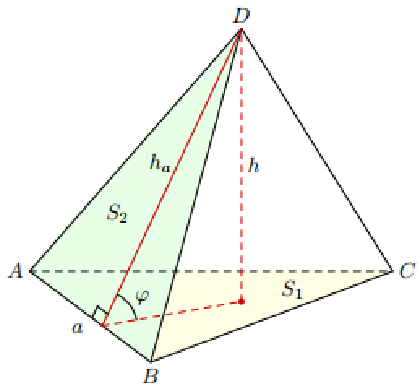


Рис. 5.

Пусть $S_1$ и $S_2$ — площади треугольников $ABC$ и $ABD$ соответственно. Пусть также $a = AB$ и $\varphi$ — угол между плоскостями $ABC$ и $ABD$. Из вершины $D$ проведем высоту $h$ пирамиды и высоту $h_a$ грани $ABD$.

Легко видеть, что $h = h_a \sin\varphi$ . Тогда для объема пирамиды мы имеем:

$$V = \frac{1}{3}S_1 h = \frac{1}{3}S_1 h_a \sin\varphi .$$

С другой стороны, запишем формулу для площади $S_2$:

$$S_2 = \frac{a h_a}{2},$$

откуда

$$h_a = \frac{2S_2}{a}.$$

Это выражение надо подставить в $V = \frac{1}{3}S_1 h_a \sin\varphi$:

$$V = \frac{1}{3}S_1\frac{2S_2}{a}\sin\varphi = \frac{2}{3}\frac{S_1S_2}{a}\sin\varphi\,,$$

что нам и хотелось получить.

Задача 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите угол между плоскостями $AB_1D_1$ и $CB_1D_1$.

Решение. Делаем чертеж. Искомый угол $\varphi$ будем вычислять с помощью треугольной пирамиды $AB_1CD_1$.

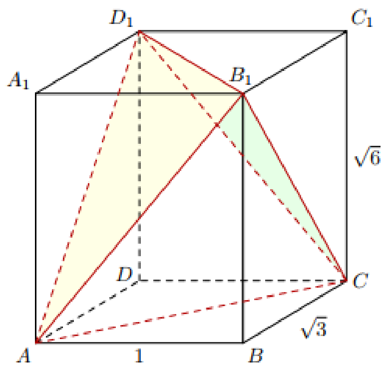


Рис. 6.

Согласно формуле $V = \frac{2}{3}\frac{S_1S_2}{a}\sin\varphi$ имеем:

$$V_{AB_1CD_1} = \frac{2}{3}\frac{S_{AB_1D_1}S_{CB_1D_1}}{B_1D_1}\sin\varphi.$$

Объем тетраэдра $AB_1CD_1$ мы найдем, «отрезая» от исходного параллелепипеда четыре равнообъемных «куска»:

$$V_{AB_1CD_1} = V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} - V_{AA_1B_1D_1} - V_{ABCB_1} - V_{CB_1C_1D_1} - V_{ACDD_1}.$$

Объем параллелепипеда равен $1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$, а объем каждого «куска»:

$$V_{AA_1B_1D_1} = V_{ABCB_1} = V_{CB_1C_1D_1} = V_{ACDD_1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$V_{AB_1CD_1} = 3\sqrt{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Теперь найдем площади граней $AB_1D_1$ и $CB_1D_1$. Имеем:

$$AB_1 = CD_1 = \sqrt{7}, \qquad AD_1 = CB_1 = 3, \qquad B_1D_1 = 2.$$

Таким образом, треугольники $AB_1D_1$ и $CB_1D_1$ имеют стороны $2, 3$ и $\sqrt{7}$. Площадь такого треугольника равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$:

$$S_{AB_1D_1} = S_{CB_1D_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляем найденный величины в формулу $V_{AB_1CD_1} = \frac{2}{3}\frac{S_{AB_1D_1}S_{CB_1D_1}}{B_1D_1}\sin\varphi$:

$$\sqrt{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}\sin\varphi,$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

## 1.4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

При нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми может помочь следующая формула для объема тетраэдра:

$$V = \frac{1}{6} abd \sin\varphi.$$

Здесь $a$ и $b$ — скрещивающиеся ребра, $d$ $\varphi$ — соответственно расстояние и угол между ними.

Дадим вывод этой формулы.

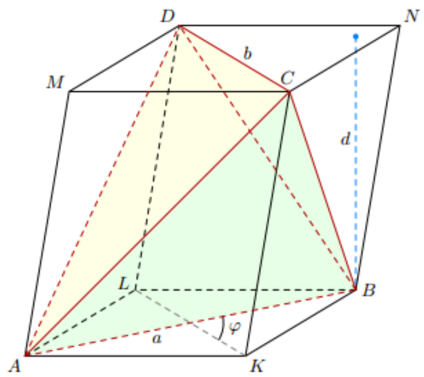


Рис. 7.

На данном рисунке мы видим тетраэдр $ABCD$, достроенный до параллелепипеда $AKBLMCND$ следующим образом: через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная ребру, скрещивающемуся с данным ребром. Покажем, что объем $V$ тетраэдра $ABCD$ равен одной трети объема $V_0$ получившегося параллелепипеда.

Как и в предыдущей задаче, отрезаем от параллелепипеда четыре тетраэдра:

$$V = V_0 - V_{AKBC} - V_{BCND} - V_{ALBD} - V_{ACMD}.$$

Все эти тетраэдры имеют одинаковый объем. В самом деле, если $S$ и $d$ — соответственно площадь основания и высота, то

$$V_{AKBC} = V_{BCND} = V_{ALBD} = V_{ACMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot d = \frac{1}{6} Sd = \frac{V_0}{6}.$$

Тогда

$$V = V_0 - 4 \cdot \frac{V_0}{6} = \frac{V_0}{3}.$$

Пусть $a = AB,\ b = CD$. Расстояние между прямыми, проходящими через ребра $a$ и $b$, является расстоянием между параллельными плоскостями $AKB$ и $MCN$, то есть высотой $d$ нашего параллелепипеда. Угол между ребрами $a$ и $b$ – это угол $\varphi$ между прямыми $AB$ и $KL$.

Для площади основания параллелепипеда имеем:

$$S = \frac{1}{2} \cdot\ AB \cdot KL \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} ab \sin\varphi.$$

Объем параллелепипеда равен:

$$V_0 = S_0 d = \frac{1}{2} abd \sin\varphi.$$

Объем тетраэдра $ABCD$, как было показано выше, меньше в три раза, и тем самым мы приходим к нужной формуле

$$V = \frac{1}{6} abd \sin\varphi.$$

Задача 4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми $A_1B$ и $B_1C$. Ребро куба равно 3.

Решение. Делаем чертеж. Искомое расстояние $d$ будем вычислять при помощи тетраэдра $A_1BCB_1$.

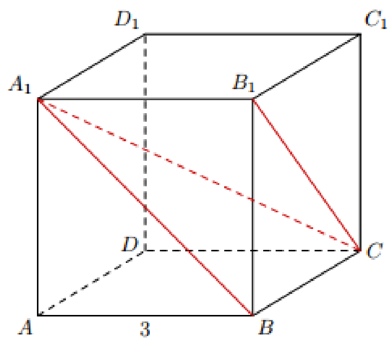

Рис. 8.

Объем $V$ этого тетраэдра легко найти, приняв за основание грань $BCB_1$. Тогда:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

С другой стороны, согласно формуле $V = \frac{1}{6} abd \sin\varphi$ имеем:

$$V = \frac{1}{6} \cdot A_1B \cdot B_1C \cdot d \cdot \sin\varphi.$$

Здесь $A_1B = B_1C = 3\sqrt{2}$, угол $\varphi$ между прямыми $A_1B$ и $B_1C$ равен $60°$, так что

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Остается приравнять выражения для объема:

$$\frac{9}{2} = \frac{3d\sqrt{3}}{2}.$$

и найти требуемое расстояние:

$$d = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главной целью данной дипломной работы является рассмотрение и исследование методов сечений и объемов в задаче стереометрии. С помощью научных исследований необходимо выяснить, как устроены  данные методы, разобрать примеры заданий этой темы.

Полученные в результате исследования сведения станут незаменимым инструментом в понимании данной темы. Для достижения этой цели необходимо поставить задачи, которые помогут тщательно изучить данный вопрос:

1) Понятие объема и сечения

Изначально следует определить что они из себя представляют для дальнейшего углубления в тему.

2) рассмотреть подробно метод объемов на решении конкретных задач

На основе изученного материала мы должны разобрать задачи по теме. С подробным решением. Чтобы в дальнейшем, при решении задач, у учащихся был перед глазами пример решения того или иного задания.

Методы сечений и объемов широко распространены в стереометрии. Особенно метод объемов облегчает решение задач на  нахождение расстояния от точки до плоскости; на определение угла между прямой и плоскостью; также для нахождения угла между плоскостями; и для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

На первоначальном этапе удалось представить основные понятия, формулы и теоремы с доказательствами. Чтобы переходя к изучению достаточно сложной темы, были представления о нахождениях площадей поверхности, объемов многогранников, теорем о построении сечений и привести подробный разбор построения сечений. Далее были рассмотрены основные методы применения «Метода объема». В конце работы представлены варианты заданий базового, среднего и профильного уровня для самостоятельной работы.

Следует понимать, что данная тема достаточно сложная, объемная. И в курсе школьной математики ее изучение должно занимать долгое время. Так как задачи на эту тему в основном находятся во второй части заданий Единого Государственного Экзамена.