Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ВНЕВПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направления ***44.04.01 – Педагогическое образование***

механико-математического факультета

ЗОЛКИНОЙ СВЕТЛАНЫ ВЛАДИМИРОВНЫ

Научный руководитель

Доцент, кан. ф. – м. наук ____________________ Е. В. Разумовская

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор __________________________ Д. В. Прохоров

Саратов 2018

Введение

Разработанный элективный курс рассчитан на учащихся 8-9 классов с углубленным изучением математики и для повторения курса планиметрии в 11 классе при подготовке к ЕГЭ.

Структура курса представляет собой 4 логически законченных и содержательно взаимосвязанных блока, изучение которых обеспечит системность и практическую направленность знаний и умений учеников. Разнообразный дидактический материал дает возможность отбирать дополнительные задания для учащихся различной степени подготовки. Содержание курса можно варьировать с учетом склонностей, интересов и уровня подготовленности учеников. В организации процесса обучения в рамках рассматриваемого курса используются две взаимодополняющие формы: урочная форма и внеурочная форма, в которой учащиеся дома выполняют практические задания для самостоятельного решения. Основной тип занятий - практикум. Для наиболее успешного усвоения материала планируются различные формы работы с учащимися: *лекционные занятия, беседа, практикум, консультация, групповые, индивидуальные формы работы.*

Планирование учебного материала целесообразно произвести следующим образом:

Блок 1(теоретический) Задачи, приводящие к понятию вневписанной окружности. Определение вневписанной окружности, базовые теоремы. Основные формулы.

Блок 2(практический) Задачи на вычисление радиусов вневписанных окружностей. Связь радиуса вневписанной окружности с площадью треугольника. Прямоугольный треугольник как частный случай.

Блок 3(теоретический)Связь вписанной и вневписанной окружностей. Решение сложных задач, в том числе задач с двумя вариантами ответа.

Блок 4 (практикум) Решение задач повышенной сложности.

Блок 5(зачет)

В каждом блоке проводится 2-4 занятия, в зависимости от уровня подготовки учащихся. Продолжительность занятия – 2 часа.

Цель курса - создание условий для формирования и развития у обучающихся навыков анализа и систематизации полученных ранее знаний, подготовка к итоговой аттестации и ОРТ.

Основная часть. Теоретические основы курса

Рассмотрим несколько задач, приводящих к понятию вневписанной окружности.

В курсе геометрии 10 класса рассматривается вопрос о расстоянии от точки до прямой. Рассмотрим следующую задачу.

Точка М одинаково удалена от всех сторон треугольника АВС, у которого АВ=13 см, ВС = 14 см, АС = 15 см. Расстояние от точки М до плоскости треугольника равно 3 см. Найдите расстояния от точки М до сторон треугольника.

Решение.

Если расстояния от точки М до сторон треугольника одинаковы, то точка М проектируется в центр вписанной в треугольник АВС окружности. Найдем радиус этой окружности, разделив площадь треугольника (84 см^2) на полупериметр (21 см), получим 4 см. Затем по теореме Пифагора найдем искомое расстояние (5 см)

Задача несложная. Но если немного изменить условие, заменив слова «стороны треугольника» на «прямые, содержащие стороны треугольника», как мы увидим, что задача имеет не одно, а ЧЕТЫРЕ решения! Три новых решения будут связаны с понятием вневписанной окружности.

В одной из тренировочных работ по математике в 9 классе задача №26 также приводила к понятию вневписанной окружности.

Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 16 и 48, вписаны в угол с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K , пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение.

Обозначим центры окружностей O и O_1, проведем BO и BO_1 – биссектрисы углов ABC и CBM (см. рис.). Так как биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то треугольник OBO_1 – прямоугольный, BK – высота, равная $16\sqrt{3}$ см ($\sqrt{48 \cdot 16}$). Тогда в треугольнике OBK угол OBK равен 30°, а угол B в треугольнике ABC равен 60°, то есть треугольник ABC равносторонний. Тогда радиус описанной около него окружности вычисляется как $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, где а=$32\sqrt{3}$.

Ответ: 32 см

Еще одну интересную задачу можно найти в статье А. Д. Блинкова в журнале «Квант».

Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Построить точку (точки), равноудаленные от заданных точек.

При анализе задачи можно увидеть, что речь идет о центрах вписанной и трех вневписанных окружностей. Возникает еще одна задача – где лежат центры вневписанных окружностей, как рассчитать их радиусы, какими свойствами эти окружности обладают?

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и проведем его биссектрису AA_1. Затем продолжим эту биссектрису за точку A_1 до пересечения в точке O_a с биссектрисой внешнего угла при вершине B.

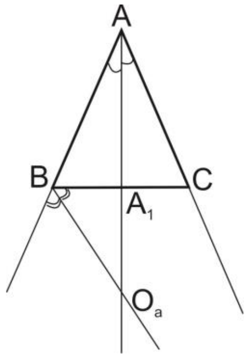

Рис.1

Поскольку точка O_a лежит на биссектрисе угла A, то она равноудалена от прямых AB и AC. По аналогичной причине она равноудалена от прямых AB и BC. Следовательно, она равноудалена и от прямых AC и BC, а значит, лежит на биссектрисе внешнего угла при вершине C. Итак,

продолжение биссектрисы треугольника, проведенной из одной из вершин, пересекается с биссектрисами внешних углов при двух других вершинах в одной точке.

Поскольку точка O_a равноудалена от сторон внешних углов при вершинах B и C, то окружность с центром O_a, касающаяся стороны BC, касается также и продолжений сторон AB и AC.

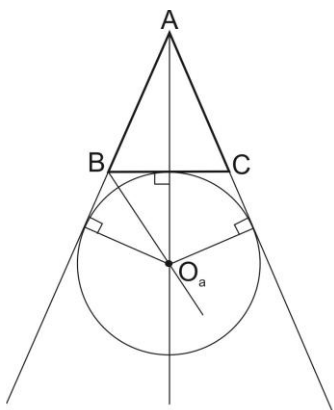

Рис.2

Эта окружность называется *вневписанной окружностью* треугольника ABC. Ясно, что любой треугольник имеет три вневписанные окружности.

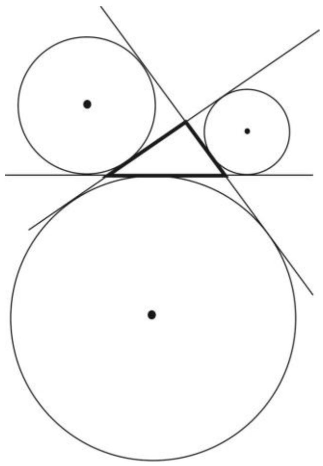

Рис.3

Положение центра O_a вневписанной окружности можно охарактеризовать так: это точка пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C. Можно охарактеризовать его и совершенно иначе, если заметить, что точки O_a, B, C и центр O вписанной в треугольник ABC окружности лежат на одной окружности с диаметром OO_a — это следует из того, что углы OBO_a и OCO_a прямые. Можно сказать, таким образом, что точка O представляет собой точку пересечения прямой AA_1 и окружности, описанной около треугольника BOC.

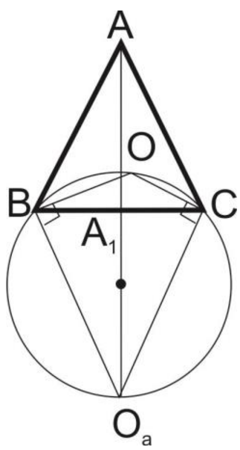

Рис.4

точки, в которых вписанная и вневписанная окружности касаются стороны треугольника, симметричны относительно середины этой стороны.

В самом деле, пусть D — точка пересечения продолжения биссектрисы AA_1 с описанной около треугольника ABC окружностью.

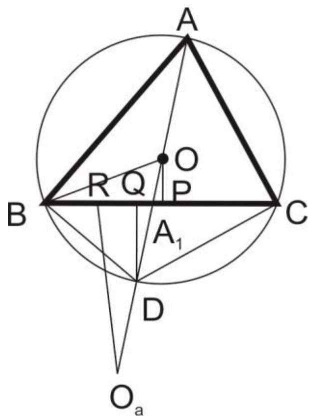

Рис.5

Тогда согласно упомянутому замечанию $DB = DC = DO$. Следовательно, D — центр окружности, описанной около четырехугольника $BOCO_a$. Проведем из точек O, D и O_a перпендикуляры к стороне BC и обозначим их основания буквами P, Q и R соответственно.

Точки P и R являются, очевидно, точками касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC, а точка Q — середина этой стороны. Но $OD = DO_a$, значит, и $PQ = QR$, т. е. точки P и R симметричны относительно точки Q. Точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника обладает еще одним замечательным свойством:

прямая, проведенная через вершину треугольника и точку, в которой вневписанная окружность касается противоположной стороны, делит периметр треугольника пополам.

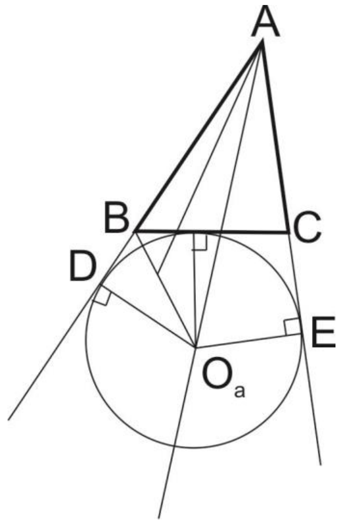

Рис. 6

При решении задач, связанных с нахождением площади S треугольника, часто полезной бывает следующая формула. Пусть R — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны треугольника, равной a, p — полупериметр треугольника. Тогда

$$S = R_a(p - a). \qquad (1)$$

Действительно, если две другие стороны данного треугольника равны b и c, то

$$S = S_{ACO_a} + S_{ABO_a} - S_{BCO_a} = \frac{1}{2} b\, R_a + \frac{1}{2} c\, R_a - \frac{1}{2} a\, R_a = R_a(p - a).$$

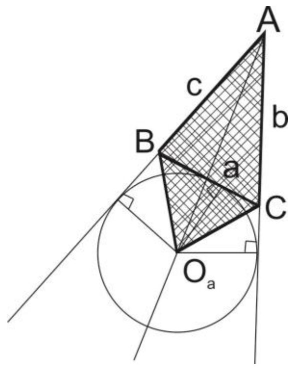

Рис.7

Рекомендуется начать решение задач с построения центров вневписанных окружностей для треугольников различных видов (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный) и расчетов радиусов этих окружностей, а также задач на доказательство.

1. Докажите, что радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы прямоугольного треугольника, равен полупериметру этого треугольника.

Решение (см. рис. 10)

Окружность является вневписанной для треугольника ABC. Пусть R – радиус вневписанной окружности с центром O_1. Тогда $BK = BN$ и $NA = AM$, как отрезки касательных к окружнсти, проведенные из одной точки. Учитывая, что CKO_1M – квадрат, получим

$$2R = KC + CM = BC + BN + AN + AC = p_{ABC}$$

2. Пусть окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

Решение

Рассмотрим треугольник ABC и окружность, касающуюся стороны BC в точке P, продолжения стороны AB – в точке M, продолжения стороны AC – в точке H. Тогда по свойству отрезков касательных AB +BM = AC +CH, BP = BM, PC = CH. Периметр треугольника равен AB + BC +AC = AB +BM +AC +CH = 2(AB +BM), что и требовалось доказать.

3. Найдите радиусы вписанной и трех вневписанных окружностей для треугольников со сторонами :

1) 12 см, 5 см, 13 см
2) 13 м, 14 м, 15 м
3) 10 дм, 10 дм, 16 дм
4) 5 см, 6 см, 7 см

Теперь можно перейти к решению более сложных задач.

Пример 1. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найти радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

Решение. Пусть $AC = 3$, $BC = 4$, тогда $AB = 5$. Возможны два случая расположения центра указанной окружности относительно прямой (отрезка) AB.

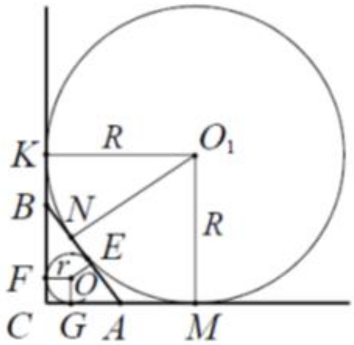

Рис. 8

Отсюда получаем два вида окружностей для треугольника ABC: вписанная и вневписанная.

1. Окружность вписана в треугольник.

   1-ый способ. Пусть r – радиус вписанной окружности с центром в O. Так как $FOGC$ – квадрат и отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то $AG = AE = b - r$, $BF = BE = a - r$.

   Тогда $c = AB = AE + BE = b - r + a - r$.

   Отсюда $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{4+3-5}{2} = 1$.

   2-ой способ. Выразим площадь прямоугольного треугольника двумя способами: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} 4 \cdot 3 = 6$,

   $S_{ABC} = pr$, где $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$.

   Тогда из равенства площадей получаем
$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{6}{6} = 1.$$

2. Окружность является вневписанной для треугольника ABC. Пусть R – радиус вневписанной окружности с центром O_1. Тогда $BK = BN$ и $NA = AM$, как отрезки касательных к окружнсти, проведенные из одной точки. Учитывая, что CKO_1M – квадрат, получим

$2R = KC + CM = BC + BN + AN + AC = p_{ABC} = 12.$

Отсюда $R = p_{ABC} = 6.$

Ответ: 1 или 6.

Теперь получим соотношения, связывающие радиусы вписанной и вневписанной окружностей. Для этого (временно убрав обозначения некоторых точек) дополним рисунок 3, отметив центры вписанной и вневписанной окружностей – точки I и Q соответственно – и проведя радиусы $IL = r$ и $QP = r_a$ этих окружностей.

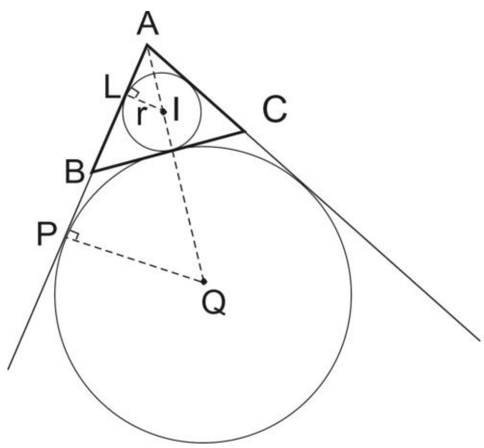

Рис. 9

Тогда прямоугольные треугольники AIL и AQP подобны (так как у них общий острый угол), поэтому $\frac{IL}{QP} = \frac{AL}{AP} = \frac{AI}{AQ}$. Учитывая, что $AL = p - a$ и $AP = p$, получим, что $\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$. Из этого соотношения, в частности, можно получить формулу, выражающую площадь треугольника через радиус вневписанной окружности. Действительно, так как $S_{ABC} = pr$, то

$$S_{ABC} = (p - a)r_a.$$

Тем самым мы доказали еще два полезных равенства:

$$\frac{r}{r_a} = \frac{p - a}{p}, S_{ABC} = (p - a)r_a.$$

Пример 2. Постройте треугольник ABC, зная положение трех точек A_1, B_1, C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

Решение. Пусть искомый треугольник ABC построен. Центр каждой его вневписанной окружности лежит на пересечении соответствующих биссектрис внутреннего и внешнего углов. Проведя их, получим точки A_1, B_1 и C_1.

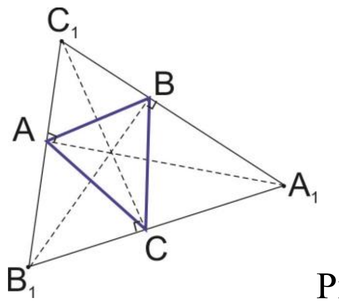

Рис. 10

Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, то вершины A, B и C искомого треугольника лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, так как биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла, проведенной из той же вершины, то $A_1A \perp B_1C_1, B_1B \perp A_1C_1$, $C_1C \perp A_1B_1$. Таким образом, решение задачи сводится к построению треугольника $A_1B_1C_1$ и его высот.

Заключение

В данной магистерской работе рассмотрены вопросы, связанные с обучением учащихся 8-9 классов решению задач на занятиях элективного курса по геометрии. Разработана программа элективного курса «Вневписанные окружности», целью которого является обучение учащихся решению ряда геометрических задач. Приведено содержание всех 4 блоков из 2-4 занятий. Предлагаемый курс рассчитан на 14 лекционно-практических занятий и заканчивается контрольной аттестацией. Занятия рекомендуем проводить во втором полугодии 8 класса или первом полугодии 9 классах по 2 часа в неделю.