

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направление 44.04.01 – Педагогическое образование

Механико-математического факультета

Емелькиной Надежды Васильевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор _____ Д.В.Прохоров

Зав.кафедрой

д.ф.-м.н., профессор _____ Д.В.Прохоров

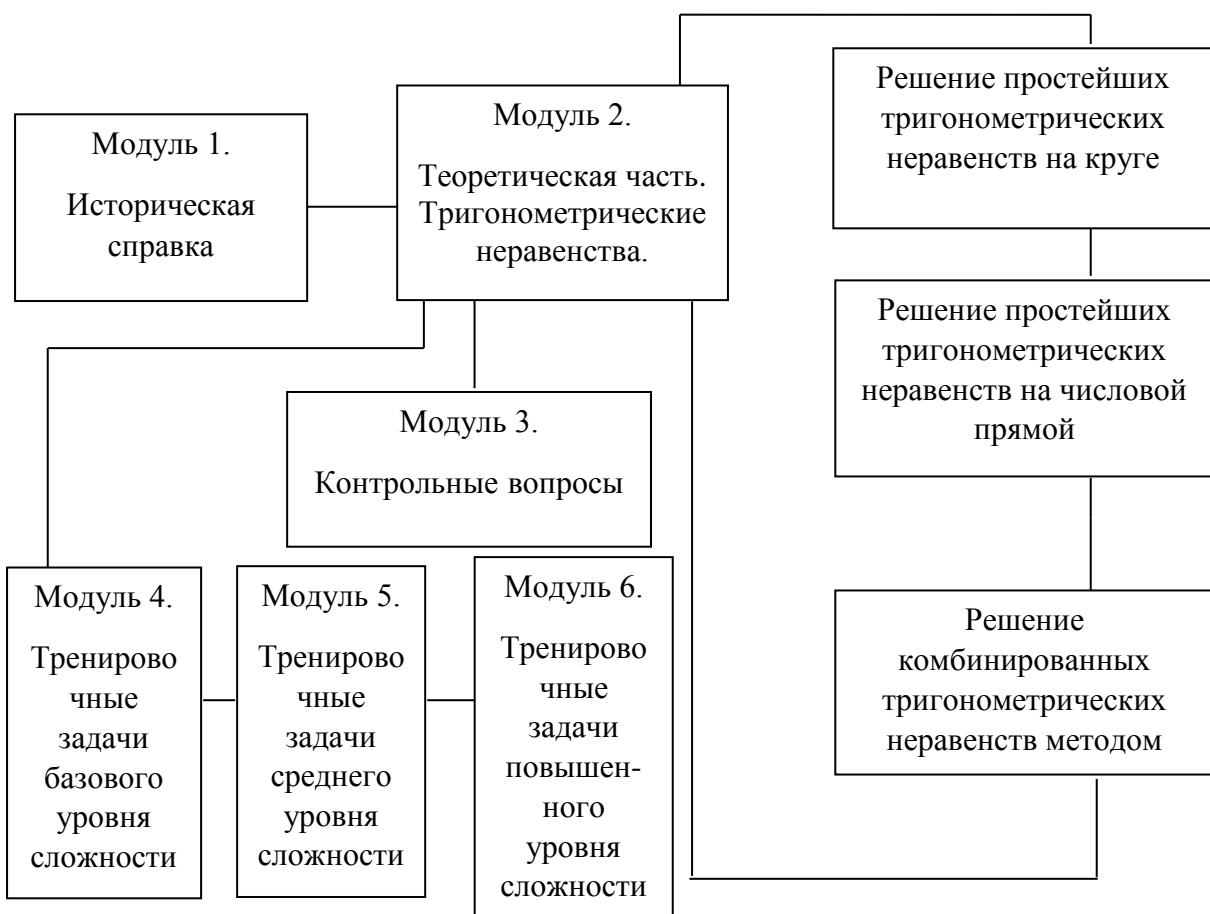
Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Магистерская работа представляет собой материалы для разработки элективного курса «Методы решения тригонометрических неравенств». Данный образовательный курс предназначен для учащихся 10-го класса основного общего образования, и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой.

Электронный образовательный курс «Методы решения тригонометрических неравенств» – это электронный ресурс, который содержит полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы согласно учебному плану в рамках образовательной программы, и обеспечивает все виды работы в соответствии с программой дисциплины, включая практикум, средства для контроля качества усвоения материала, методические рекомендации для обучающегося по изучению данной темы.

Структура электронного образовательного курса



Основное содержание работы

Решение простейших тригонометрических неравенств на круге

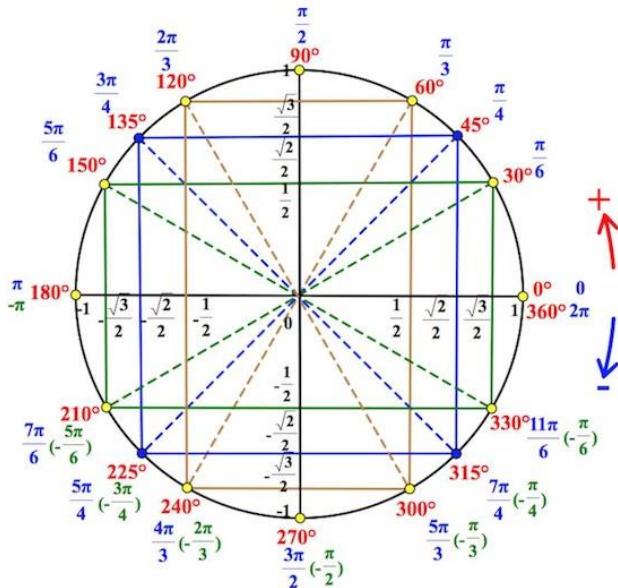


Рисунок 1 – Тригонометрический круг со значениями

Разберём алгоритм их решения:

- 1) На оси ординат (абсцисс) отметить точку **a** и провести прямую $y=a(x=a)$, перпендикулярную соответствующей оси.
- 2) Отметить на окружности дугу, состоящую из точек окружности, удовлетворяющих данному неравенству (эти точки расположены по одну сторону от построенной прямой).
- 3) Записать числовой промежуток, точки которого заполняют отмеченную дугу и к обеим частям неравенства прибавить период функции (для $y=\sin x$ и $y=\cos x$ $T=2\pi k$).

Решение простейших тригонометрических неравенств графическим методом на числовой прямой

Запишем алгоритм решения для неравенств вида:

$$\sin x \geq a, \cos x \geq a, \tan x \geq a, \cot x \geq a, \quad (10)$$

Где $a \in \mathbb{R}$, символ "V" означает знак сравнения и заменяет любой из знаков

">", ">=", "<", "<="

1. Если аргумент-сложный (отличен от x), то заменяем его на t.

2. Строим в одной координатной плоскости tOy графики функции $y=\sin t$ и $y=a$
3. Находим такие две соседние точки пересечения графиков (поближе к оси Oy , между которыми синусоида располагается ниже прямой $y=a$). Находим абсциссы этих точек.
4. Записываем двойное неравенство для аргумента t , учитывая период синуса (t будет между найденными абсциссами).
5. Делаем обратную замену (возвращаемся к первоначальному аргументу) и выражаем значение x из двойного неравенства, записываем в виде числового промежутка.

Решение комбинированных тригонометрических неравенств методом интервалов

Запишем алгоритм решения:

1. С помощью преобразований привести неравенство к виду $f(t)>0$ ($f(t)<0$ (если это необходимо)).
2. Найти основной период T функции f (T равен наименьшему общему кратному периодов, входящих в неравенство тригонометрических функций).
3. Найти нули функции $f(t)$ на промежутке $[0;T]$, решив уравнение $f(t)=0$.
4. Найти точки разрыва функции $f(t)$ на этом промежутке.
5. Найденными точками разделить отрезок $[0;T]$ на части, в каждой из которых функция $f(t)$ имеет постоянный знак.
6. Определить знак функции в каждой части методом пробных точек (результат удобно оформить в виде таблицы).
7. Выбрать те части, в которых выполняется исходное неравенство.
8. Учитывая периодичность функции, записать решение исходного неравенства.

Тренировочные задачи

Тренировочные задачи базового уровня сложности

№ 1. Решите неравенство: $\sin x > 0$

Варианты ответов:

1) $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z;$

2) $(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}), k \in Z;$

3) $(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}), k \in Z;$

4) $(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}; \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}), k \in Z.$

№ 2. Решите неравенство: $\operatorname{tg} x > 1$

Варианты ответов:

1) $[2\pi n + \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n], n \in Z;$

2) $[4\pi n + \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} + 4\pi n], n \in Z;$

3) $[2\pi n; \frac{5\pi}{12} + 2\pi n], n \in Z;$

4) среди указанных ответов нет верного.

№ 3. Решите неравенство: $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Варианты ответов:

1) $(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n), n \in Z;$

2) $(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n), n \in Z;$

3) $(-\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}), n \in Z;$

4) $(-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{5}), n \in Z.$

№ 4 Решите неравенство: $\cos x < \frac{1}{2}$.

Варианты ответов:

1) $[-\frac{\pi}{6} + \pi m; \frac{7\pi}{6} + \pi m], m \in Z;$

2) $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi m; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m], m \in Z;$

3) $[-\frac{\pi}{3} + \pi m; \frac{4\pi}{3} + \pi m], m \in Z;$

4) $[\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \frac{5\pi}{3} + 2\pi m], m \in Z.$

№ 5. Решите неравенство: $\sin x < 1$

Варианты ответов:

1) $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z;$

2) $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in Z;$

$$3) [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}; \quad 4) [-\pi + 2\pi n; 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

№ 6. Решите неравенство: $\sin x > 0.5$

Варианты ответов:

$$1) [-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}; \quad 2) [\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k], k \in \mathbb{Z};$$

$$3) [-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}; \quad 4) [\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}.$$

№ 7 Решите неравенство: $\cos x < -1$.

Варианты ответов:

$$1) (-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3}; \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3}), m \in \mathbb{Z}; \quad 2) (-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3}), m \in \mathbb{Z};$$

$$3) (\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3}; \frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3}), m \in \mathbb{Z}; \quad 4) \text{Среди указанных ответов нет верного.}$$

№ 8. Решите неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$.

Варианты ответов:

$$1) (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}; \quad 2) (-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z};$$

$$3) (-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}; \quad 4) (-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{5}), k \in \mathbb{Z}.$$

Тренировочные задачи среднего уровня сложности

№1. Решите неравенство: $2\cos 4x < -1$.

$$1) (-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}; \quad 2) (-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}), k \in \mathbb{Z};$$

$$3) (\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}), k \in \mathbb{Z}; \quad 4) (\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}; \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}), k \in \mathbb{Z}.$$

№2. Решите неравенство: $4\cos^2 0,5x \leq 3$.

- 1) $[2\pi n + \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n], n \in Z$; 2) $[4\pi n + \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} + 4\pi n], n \in Z$;
- 3) $[2\pi n + \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} + 2\pi n], n \in Z$; 4) среди указанных ответов нет верного.

№3. Решите неравенство: $2 \sin 5x < -\sqrt{2}$.

- 1) $(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n), n \in Z$; 2) $(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n), n \in Z$;
- 3) $(-\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}), n \in Z$; 4) $(-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{5}), n \in Z$.

№4. Решите неравенство: $\sqrt{3} + 2 \sin x \geq 0$.

- 1) $[-\frac{\pi}{6} + \pi m; \frac{7\pi}{6} + \pi m], m \in Z$; 2) $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi m; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m], m \in Z$;
- 3) $[-\frac{\pi}{3} + \pi m; \frac{4\pi}{3} + \pi m], m \in Z$; 4) $[-\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \frac{4\pi}{3} + 2\pi m], m \in Z$.

№5. Решите неравенство: $2 \sin 3x < 1$.

- 1) $(-\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi m}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi m}{3}), m \in Z$; 2) $(-\frac{7\pi m}{18} + 2\pi m; \frac{\pi}{18} + 2\pi m), m \in Z$
- 3) $(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi m; \frac{\pi}{6} + 2\pi m), m \in Z$; 4) $(-\frac{7\pi}{2} + 6\pi m; \frac{\pi}{2} + 6\pi m), m \in Z$.

№6. Решите неравенство: $2 \sin^2 0,5x \leq 1$

- 1) $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$; 2) $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in Z$;
- 3) $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n], n \in Z$; 4) $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n], n \in Z$.

№7. Решите неравенство: $\sqrt{3} - 2 \cos x \geq 0$

- 1) $(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k], k \in Z$; 2) $[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k], k \in Z$;

$$3) \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}; \quad 4) \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}.$$

№8 Решите неравенство: $2 \cos 3x > -\sqrt{2}$.

$$1) \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3}; \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3} \right), m \in \mathbb{Z}; \quad 2) \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3} \right), m \in \mathbb{Z};$$

$$3) \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3}; \frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi m}{3} \right), m \in \mathbb{Z}; \quad 4). \text{ Среди указанных ответов нет верного.}$$

Тренировочные задачи повышенного уровня сложности

№1. Решить неравенство: $\sqrt{2} (\sin 2x - \cos x) + 2 \sin x > 1$

Варианты ответов:

$$1. \left(\frac{\pi}{6} + 4\pi n; \frac{3\pi}{4} + 4\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 4\pi n; \frac{5\pi}{4} + 4\pi n \right); n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right); n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right); n \in \mathbb{Z}.$$

4. Среди указанных ответов нет верного

№2. Решить неравенство: $\frac{2 \sin x + 1}{2 \cos \frac{x}{2} - 1} \geq 0$

Варианты ответов:

$$1. x \in \left[2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right) \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \right] \cup \left[\frac{19\pi}{6} + 2\pi k; \frac{10\pi}{3} + 2\pi k \right) \cup \left[\frac{23\pi}{6} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \left(\frac{\pi}{6} + 4\pi k; \frac{3\pi}{4} + 4\pi k \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 4\pi k; \frac{5\pi}{4} + 4\pi k \right); k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \right); k \in \mathbb{Z}.$$

4. $x \in \left[4\pi k; \frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right) \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 4\pi k; \frac{11\pi}{6} + 4\pi k\right] \cup \left[\frac{19\pi}{6} + 4\pi k; \frac{10\pi}{3} + 4\pi k\right) \cup \left[\frac{23\pi}{6} + 4\pi k; 4\pi + 4\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

№3. Решить неравенство: $\sin 2x - \sin 3x > 0$.

Варианты ответов:

1. $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 4\pi k; \frac{3\pi}{4} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 4\pi k; \frac{5\pi}{4} + 4\pi k\right); k \in \mathbb{Z}$

2. $x \in \left[4\pi k; \frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right) \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 4\pi k; \frac{11\pi}{6} + 4\pi k\right] \cup \left[\frac{19\pi}{6} + 4\pi k; \frac{10\pi}{3} + 4\pi k\right) \cup \left[\frac{23\pi}{6} + 4\pi k; 4\pi + 4\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

3. $x \in \left(\frac{\pi}{5} + 2\pi k; \frac{3\pi}{5} + 2\pi k\right) \cup \left(\pi + 2\pi k; \frac{7\pi}{5} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{9\pi}{5} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k\right); k \in \mathbb{Z}$

4. Среди указанных ответов нет верного

№4. Решить неравенство: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{3} > 0$.

Варианты ответов:

1. $x \in \left(\frac{\pi}{5} + 2\pi n; \frac{3\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{7\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{9\pi}{5} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right); n \in \mathbb{Z}$

2. $x \in (6\pi n; \pi + 6\pi n) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 6\pi n; 3\pi + 6\pi n\right) \cup \left(\frac{9\pi}{2} + 6\pi n; 5\pi + 6\pi n\right); n \in \mathbb{Z}$

3. $\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi n; \frac{3\pi}{4} + 4\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 4\pi n; \frac{5\pi}{4} + 4\pi n\right); n \in \mathbb{Z}$

4. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right); n \in \mathbb{Z}$

№5. Решить неравенство: $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.

Варианты ответов:

1. $x \in \left(\frac{\pi}{5} + 2\pi n; \frac{3\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{7\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{9\pi}{5} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right); n \in \mathbb{Z}$

2. $x \in \left[\pi n; \frac{\pi}{10} + \pi n\right) \cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{10} + \pi n\right] \cup \left[\frac{9\pi}{10} + \pi n; \pi + \pi n\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\}, n \in \mathbb{Z}$

3. $x \in \left(\frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{3\pi}{8} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{5\pi}{8} + \pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8} + \pi n; \pi + \pi n\right); n \in \mathbb{Z}$

4. Среди указанных вариантов нет верного

№6. Решить неравенство: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x \geq 2$

Варианты ответов:

1. $x \in \left[2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{19\pi}{6} + 2\pi k; \frac{10\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left[\frac{23\pi}{6} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

2. $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 4\pi k; \frac{3\pi}{4} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 4\pi k; \frac{5\pi}{4} + 4\pi k\right); k \in \mathbb{Z}$

3. $x \in \left[\pi k; \frac{\pi}{10} + \pi k\right) \cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{10} + \pi k\right] \cup \left[\frac{9\pi}{10} + \pi k; \pi + \pi k\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}, k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \left[4\pi k; \frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right) \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 4\pi k; \frac{11\pi}{6} + 4\pi k\right] \cup \left[\frac{19\pi}{6} + 4\pi k; \frac{10\pi}{3} + 4\pi k\right) \cup \left[\frac{23\pi}{6} + 4\pi k; 4\pi + 4\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

Заключение

В работе приведена историческая справка, в которой рассказывается история возникновения тригонометрии и основных тригонометрических функций.

Приведены методы решения простейших тригонометрических неравенств на круге и числовой прямой, также рассмотрены примеры решения неравенств.

Рассмотрен метод решения комбинированных тригонометрических неравенств методом интервалов с примером решения. Приведены контрольные вопросы с ключами. Приведены задачи трёх уровней сложности: базового, среднего и повышенного. Рассмотрено решение задач трёх уровней сложности.