Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

кафедра математического анализа

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 3 курса 322 группы

направление 44.04.01 – Педагогическое образование

механико-математического факультета

Бракаданска Златы Стойчовны

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент _______________ Тимофеев В.Г.

Зав.кафедрой

д.ф.-м.н., профессор _______________ Прохоров Д.В.

Саратов 2017

Введение

Магистерская работа представляет собой материалы для разработки специального курса на тему: «Методы решения планиметрических задач».

Данный спецкурс направлен на развитие познавательного интереса, расширение знаний по математике, развитие креативных способностей учащихся и более качественной отработке математических умений и навыков, при этом сложность изучаемого материала варьируется.

Цели курса:

1. Развитие потенциальных творческих способностей учащихся;
2. Формирование устойчивого интереса учащихся к предмету;
3. Подготовка к дальнейшему обучению в других учебных заведениях.

Исходя из изложенных целей, спецкурс «Методы решения задач по планиметрии» решает следующие задачи:

– Создать условия для систематизации знаний, умений, навыков по планиметрии;
– Способствовать дальнейшему развитию, умению анализировать планиметрический чертёж, а так же самостоятельно выбирать метод решения задачи (геометрический, метод опорных задач , векторный метод.);
– Способствовать отработке навыка по решению планиметрических задач;
– Способствовать развитию интереса и положительной мотивации изучения геометрии;
– создать условия для формирования представлений об идеях и методах математики.

Структура курса представляет собой три логически законченных и содержательно взаимосвязанных метода, изучение которых обеспечит системность и практическую направленность знаний и умений .

1.Геометрический метод;

2.Метод опорных задач;

3.Векторный метод.

Содержание курса составляют как правило задачи, при решении которых нужно применить небольшое количество геометрических фактов из школьного курса в изменённой ситуации, а вычисления не содержат длинных выкладок. Решая эти задачи, в первую очередь требуется проанализировать предложенную в задачах конфигурацию и увидеть те свойства геометрических фигур, которые необходимы при решении.

Выходом из создавшегося положения может служить рассмотрение в рамках соответствующего спецкурса некоторых вопросов, которые достаточно часто встречаются в заданиях на экзаменах и которые вызывают затруднения.

Основные требования к знаниям и умениям учащихся:

Цель практических занятий – закрепить у учащихся теоретические знания и развить практические навыки и умения в области геометрии.

1. Знать свойства геометрических фигур и уметь применять их при решении планиметрических задач;
2. Знать формулы вычисления площадей геометрических фигур и уметь применять их при решении задач;
3. Знать свойства геометрических тел и уметь применять их при решении задач;
4. Знать формулы вычисления площадей поверхностей геометрических тел и уметь применять их при решении задач;
5. Знать формулы вычисления объемов геометрических тел и уметь применять их при решении задач;
6. Уметь по условию задачи грамотно построить чертеж.

Содержание курса

Теоретические основы большинства тем этой части относится к программе 9-летней школы. Однако глубина их проработки, идейная насыщенность предполагает более высокий уровень математического развития . В работе рассматриваются следующие темы: «Треугольники», «Четырехугольники», «Многоугольники», «Окружность, круг».

Треугольники, признаки равенства и подобия треугольников, свойства биссектрис, медиан, высот треугольника, свойства окружности, вписанной и описанной около треугольника; формулы площади треугольника.

Рассматриваются задачи повышенного уровня сложности. Используются векторный и координатный методы. Четырехугольники, характеристические свойства параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата, трапеции. Рассматриваются задачи повышенного уровня сложности, используются векторный метод. Особое внимание уделяется опорным задачам. Окружность, круг. Характеристические свойства окружности. Общие касательные к двум окружностям.

Основное содержание работы

1 .Геометрические методы решения задач

Говоря о методах решения геометрических задач , следует отметить некоторые специфические особенности этих методов :большое разнообразие , взаимозаменяемость, трудность формального описания , отсутствие четких границ области применения . Кроме того, очень часто при решении некоторых достаточно сложных задач приходится прибегать к использованию комбинаций методов и приемов.

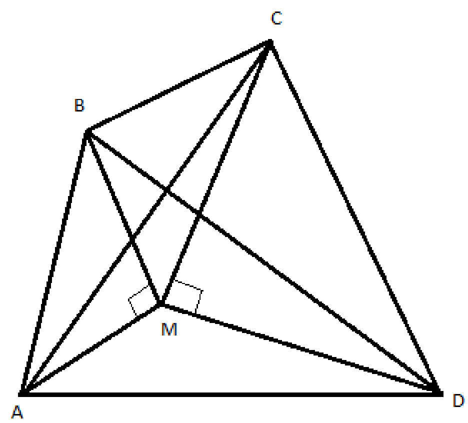
Уже на первом этапе – построение чертежа – можно говорить о наличии некоторых специальных приемов . При решении задач, в которых фигурирует одна или несколько окружностей , очень часто сами эти окружности не следует изображать ,ограничиваясь указанием их центров , точек касания или пересечения с прямыми и друг с другом и проведением соответствующих отрезков прямых. Факт касания окружности с прямой означает равенство соответствующего угла 90°. Касание окружностей друг с другом означает , что расстояние между их центрами равно сумме радиусов окружностей в случае внешнего касания и равно разности радиусов окружностей в случае касания внутреннего. Такого рода чертежи без окружностей к задачам про окружности обычно называют «скелетными».

Примеры задач:

Задача 1.

Условие:

Два равнобедренных прямоугольных треугольника ABM и CDM с гипотенузой AB и CD расположены так ,что ABCD – четырехугольник. Одна диагональ этого четырехугольника равна d . Найти его площадь.



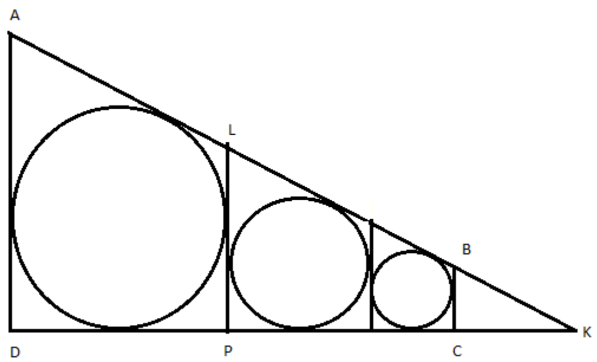
Решение : Рис.1. 1.

Повернем треугольник AMC вокруг точки M в соответствующем направлении на 90° . При этом точка A перейдет в точку B, а C – в D, т.е. AC перейдет в BD. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ диагонали равны и перпендикулярны. Его площадь равна $\frac{1}{2}d^2$ (использовалась формула, выражающая площадь четырезугольника через его диагонали и угол между ними).

Задача 2.

Условие:

Трапеция разделена на три трапеции прямыми , параллельными основаниям. Известно, что в каждую из трех получившихся трапеции можно вписать окружность. Найти радиус окружности, вписанной в среднюю трапецию, если радиусы окружностей, вписанных в две оставшиеся , равны R и r.



Решение:

Рис.1. 2.

Пусть радиус средней окружности равен x . Рассмотрим два подобных между собой треугольника AKD и LKP. Любые пары сходственных линейных величин в подобных треугольниках относятся одинаково. Паре окружностей с радиусом R и x в треугольнике AKD соответствует в треугольнике LKP пара окружностей с радиусами x и r .

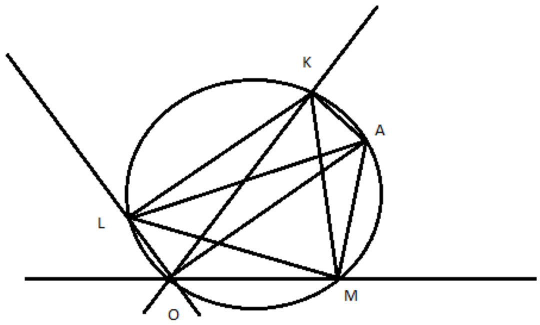
$$\frac{x}{R} = \frac{r}{x}$$

$$x = \sqrt{Rr}$$

Ответ: $x = \sqrt{Rr}$.

Задача 3.

Через точку O проведены три прямые ,попарные углы между которыми равны 60° . Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки A на эти прямые , служат вершинами правильного треугольника.



Решение: Рис.1.24.

Пусть K, L, M - основания перпендикуляров . Заметим ,что точки O , A, K, L, M лежат на одной окружности с диаметром OA .

Значит $\angle KLM = \angle KOM = 60^{\circ}$, $\angle KML = \angle KOL = 60^{\circ}$,

т.е. треугольник $KLM - равносторонний$.

2.Метод опорных задач.

Теоретическая часть школьного курса содержит в основном теоремы, которые будут необходимы в дальнейшем для развития этой теории. Из нее исключены многие факты, стоящие как бы сами по себе, не работающие на теорию. Искусство же решать задачи основывается на хорошем знании теоретической части курса, знании достаточного количества геометрических фактов, не вошедших в этот курс , и владении определенным арсеналом приемов и методов решения геометрических задач. Поэтому представляется полезным выделить некоторое множество задач (будем называть их опорными) , в которых формулируется некий факт достаточно часто используемый в задачах, либо иллюстрируется какой-либо метод или прием решения задач. Соответственно мы будем различать две разновидности опорных задач: задача-факт (задача-теорема) и задача - метод.

В качестве примеров, иллюстрирующих понятие «опорная задача-факт», можно привести многие теоремы элементарной геометрии, не вошедшие в действующий курс. Выделим основные опорные задачи, сгруппировав их по классам.

Примеры задач

Опорные задачи 7-го класса

Задача 1.

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. Доказать.

Дано:ΔABC – прямоугольный,$\angle C=90^\circ$, CO –медиана.

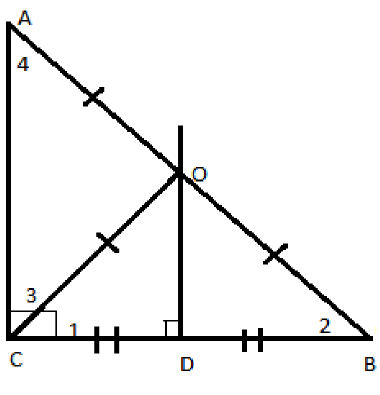


Рис.2.1.

Доказать : $CO=\frac{1}{2}AB.$

Доказательство:

1. Проведем через середину D отрезка CB прямую $DE \perp CB$ ($O=DE \cap AB$).
2. $\Delta COD = \Delta BOD$ *по двум катетам , поэтому* $CO = BO$ *и* $\angle 1=\angle 2$.
3. $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4=90°$.
4. $\angle 3=\angle 4$, значит , в ΔAOC: $AO = CO$.
5. Получаем $CO=AO=BO=\frac{1}{2}AB$, что и требовалось доказать.

Справедливо обратное утверждение:

Если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена , то этот треугольник прямоугольный .

Дано: ΔABC , $CO=\frac{1}{2}AB$.

Доказать : ΔABC –прямоугольный ($\angle C =90°$).

Доказательство :

1. $CO=\frac{1}{2}AB=OB \Rightarrow \angle 1=\angle 2$
2. $CO=\frac{1}{2}AB=AO \Rightarrow \angle 3=\angle 4$
3. $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4 \Rightarrow \angle 1+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 3+\angle 2+\angle 4)=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=\frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$. $\angle 1+\angle 3=\angle C=90°$, значит, ΔABC – прямоугольный, что и требовалось доказать.

Задача 2.

Два насаленных пункта А и В находятся по одну сторону от прямой дороги. Где на дороге надо расположить автобусную остановку С, что сумма расстояний АС+СВ была наименьшей?

Дано: m, А∉ m, В∉ m, точки А и В расположены по одну сторону от прямой m.

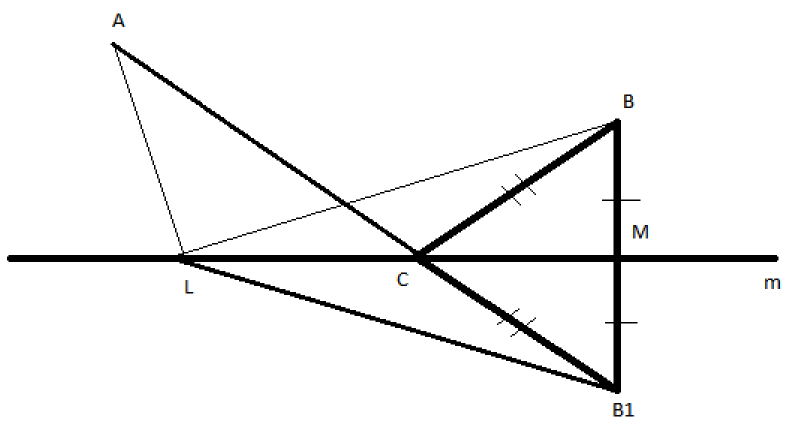


Рис.2.2.

Найти : точку С ∈ m, чтобы сумма АС+СВ была наименьшей.

Построение:

1. Из точки B проведем прямую $BB_1 \perp$ m (M=$BB_1 \cap$ m) и отложим $MB_1 = MB.$
2. Построим отрезок AB_1.
3. C=$AB_1 \cap$ m. Точка C – искомая.

Доказательство:

1. Прямоугольник $\Delta\, CMB$ и ΔCMB_1 раны по двум катетам: CM-общая, MB = MB_1 по построению, значит, CB =CB_1.
2. $AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB.$
3. Пусть L – любая точка прямой m, отличная от C. Применяя неравенство треугольника для $\Delta\, ALB_1$, имеем: $AB_1 <$ AL $+LB_1$, то есть $AC + CB_1 <$ AL $+LB_1$, $AC + CB <$ AL $+LB$.Таким образом , сумма расстояний AC+CB будет наименьшей , что и требовалось доказать.

Задача 3.

Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2 .

Доказать, что если $HM_1 < HM_2$ *, то* $AM_1 < AM_2$

Дано: $AH \perp a$, $HM_1 < HM_2$. Доказать: $AM_1 < AM_2$.

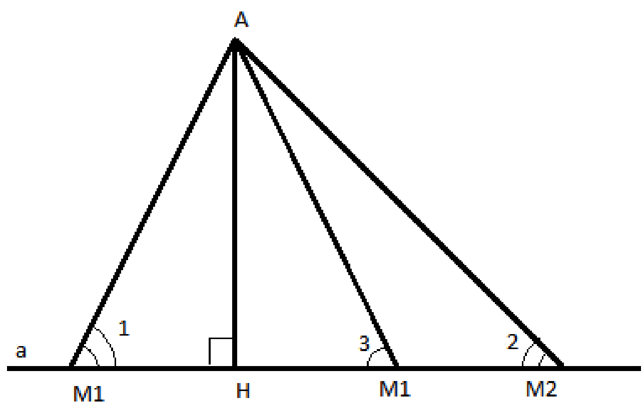


Рис.2.3.

Доказательство :

1. Отложим HM_1'= HM_1 , проведем AM_1'.
2. $HM_1 = HM_1'$ и $AH \perp a$, значит, AM_1 =AM_1' и $\angle 1$=$\angle 3$.
3. $\angle 3$ – внешний в $\Delta\, AM_1'M_2$, поэтому $\angle 3 > \angle 2$ *, а значит , и* $\angle 1 > \angle 2$.

4. В $\Delta AM_1 M_2$ $\angle 1 > \angle 2$, поэтому $AM_2 > AM_1$ или $AM_1 < AM_2$, что и требовалось доказать.

Опорные задачи 8-го класса

Задача 1 .

Диагонали трапеции, пересекаясь, разбивают ее на четыре треугольника с общей вершиной . Найти площадь трапеции , если площади треугольников, прилежащих к основаниям , S_1 и S_2.

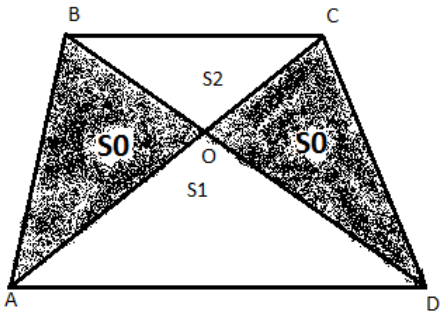


Рис.2. 4.

Решение :

Пусть $ABCD$ – трапеция (BC ||AD), $BC = a, AD = b, h -$ высота трапеции , O - точка пересечения диагоналей.

1. Из подобия треугольников BOC и DOA следует, что $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{b^2}$.

2. $S_{ABCD} = S_{ACD} = \frac{1}{2}bh$, значит , $S_{AOB} + S_2 = S_{COD} + S_2$, то есть $S_{AOB} = S_{COD}$, обозначим эту площадь S_0.

3. $S_{ABC} = S_0 + S_1 = \frac{1}{2}ah$, $S_{ACD} = S_0 + S_2 = \frac{1}{2}bh$, поэтому $\frac{S_0+S_1}{S_0+S_2}=\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$,

отсюда находим S_0: $\sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \cdot \frac{S_0+S_1}{S_0+S_2} = 1$, $\sqrt{S_2} \cdot (S_0 + S_1) = \sqrt{S_1} \cdot (S_0 + S_2)$

$$S_0 = \sqrt{S_1 S_2}$$

4. $S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2S_0 = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Ответ : $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Задача 2:

Хорды AC и BD окружности перпендикулярны и пересекаются в точке P, PH — высота в треугольнике ADP. Угол ADP *равен* $30°$, $AH = 2, PC = 6$. *Найти отношение площади треугольника ADC к площади треугольника ABC.*

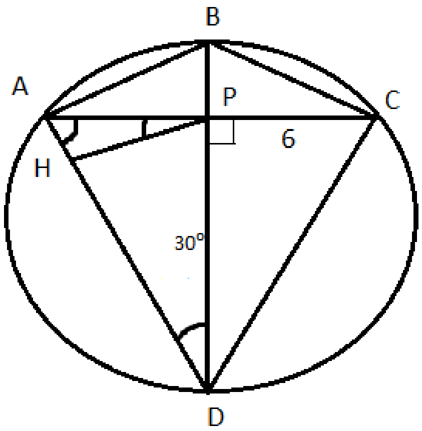


Рис.2.5.

Решение :

1. $\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta}ABC} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot DP}{\frac{1}{2}AC \cdot BP} = \frac{DP}{BP}$,

2. Найдем DP.

В прямоугольном треугольнике APD, PH − высота (по условию), $\angle$ APH $= \angle$ ADP $= 30°$. Поэтому в $\Delta\, APH$: $AP = 2 \cdot AH = 2 \cdot 2 = 4$, а в $\Delta\, ADP$: $AD = 2 \cdot AP = 2 \cdot 4 = 8$.

По теореме Пифагора для $\Delta\, ADP$:

$AD^2 = DP^2 + AP^2, DP^2 = 8^2 - 4^2 = 48, DP = 4\sqrt{3}$.

3. Найдем BP.

По свойству пересекающихся хорд:

$$BP \cdot DP = AP \cdot PC,$$

$$BP \cdot 4\sqrt{3} = 4 \cdot 6, BP = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

4. $DP: BP = 4\sqrt{3}: \frac{6}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{12}{6} = 2.$

Ответ : *2*

Задача 3.

В треугольнике ABC проведены высоты AD и BE, пересекающиеся в точке O. Требуется доказать, что углы $\angle ODF$ и *$\angle OCF$ равны.*

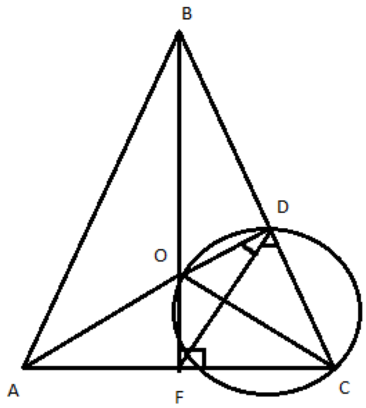


Рис.2. 6.

Решение:

1. Треугольник ODC- прямоугольный , следовательно , вершина D прямого угла лежит на окружности с диаметром OC.

Аналогично треугольник OFC – прямоугольный , следовательно , вершина F лежит на окружности с диаметром OC.

Углы ODF и OCF - вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу OF, значит, они равны.

Опорные задачи 9-го класса

Задача 1.

В треугольнике ABC точка D делит сторону AC на отрезки AD= 4 и DC=5;

$\angle ABD = 30$; $\angle ABD = \angle ACB$ *.Найти площадь треугольника ABD.*

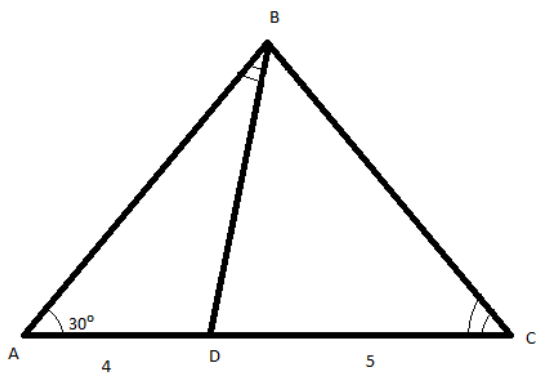


Рис.2. 7.

Решение:

1. Треугольники Δ BAD и Δ CAB имеют общий угол A, углы B и C равны по условию, следовательно, треугольники подобны.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}, AB^2 = AC \cdot AD = 9 \cdot 4 = 36, AB = 6.$$

2. $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin A,$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Ответ:6.

Задача 2.

Равнобедренный треугольник вписан в окружность радиуса $4\sqrt{3}$. *Найти высоту, проведенную к боковой стороне, если один из углов треугольника* 120°.

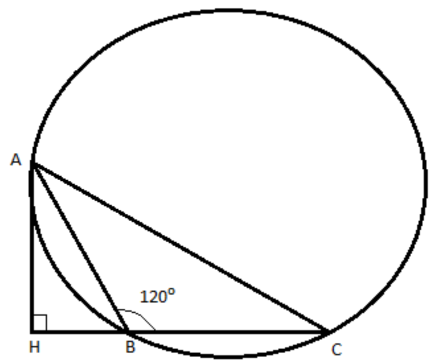


Рис.2. 8.

Решение:

Пусть $\Delta\ ABC$ <u>равнобедренны треугольник</u> (*AB=BC*) , <u>вписанный в окружность</u> радиуса $R = 4\sqrt{3}$,*AH*- высота проведенная к боковой стороне *BC.*

Из условии следует , что $\angle ABC = 120^\circ$ (иначе $\angle A = \angle C = 120^\circ$, чего быть не может).

1. $\angle A = \angle C = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$ ($\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.
2. $\frac{AB}{\sin C} = 2R$ *(* по теореме синусов), $AB = 2R \cdot \sin C,$

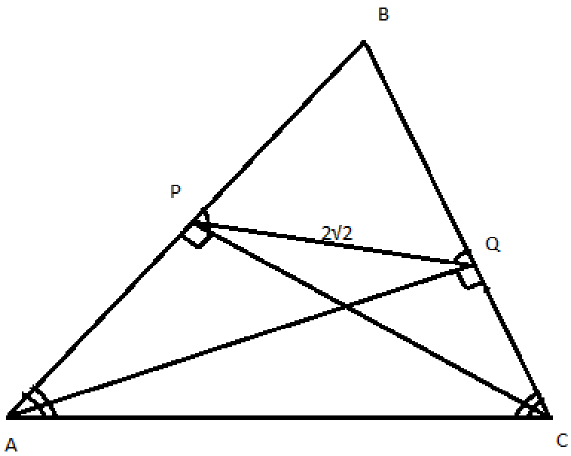
$AB = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}.$

3. В прямоугольном $\Delta ABH \cdot AB = 4\sqrt{3}, \angle B = \angle A + \angle C = 60^\circ$ ($\angle ABH -$ внешний $\Delta\ ABC$). $AH = AB \cdot \sin B = 4\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$

Ответ: 6.

Задача 3.

В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AQ иCP на стороны BC и AB соответственно. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. *Вычислите радиус окружности , описанной около треугольника ABC.*



Решение: Рис.2. 9.

1. Прямоугольные треугольники AQB и CPB имеют равные острые углы при вершине B, следовательно , они подобны и $\frac{QB}{AB}=\frac{PB}{CB}$. Отсюда следует, что в треугольниках QPB и ABC стороны, прилежащие к равному углу при вершине B , пропорциональны, следовательно , по второму признаку подобия эти треугольники подобны:$\Delta QBP \sim \Delta ABC$.
2. Площади подобный треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия : $\frac{S_{\Delta QBP}}{S_{\Delta ABC}}$=$\frac{2}{18}=\frac{1}{9}=k^2$, отсюда $k=\frac{1}{3}$, значит , AC=3$\cdot PQ=3\cdot 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.
3. Из прямоугольного треугольника ABQ: $\cos B=\frac{BQ}{AB}$, но $\frac{BQ}{AB}=k=\frac{1}{3}$,поэтому $\cos B=\frac{1}{3}$. Так как ΔABC -остроугольный , то $\sin B=+\sqrt{1-cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
4. По теореме синусов для ΔABC; $\frac{AC}{\sin B}=2R$, где $R-$ радиус описанной окружности , $R=\frac{AC}{2\sin B}$=$\frac{6\sqrt{2}\cdot 3}{2\cdot 2\sqrt{2}}\frac{9}{2}$=4,5.

Ответ: 4,5

3.Векторный метод.

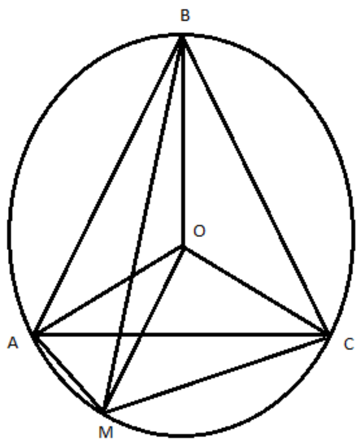
Векторный метод – один из наиболее общих методов решения геометрических задач. Он является сравнительно новой темой в школьном курсе геометрии, и овладение им вызывает трудности не только у учащихся, но и у учителей.

Для решения задач элементарной геометрии с помощью векторов необходимо, прежде всего, научиться «переводить» условие геометрической задачи на «векторный» язык. После такого перевода осуществляются алгебраические вычисления с векторами, а затем полученное снова «переводится» на «геометрический» язык. В этом и состоит сущность векторного метода решения геометрических задач.

Примеры задач

Задача 1.

В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник ABC . Пусть M-произвольная точка окружности. Чему равна сумма $MA^2 + MB^2 +$



MC^2.Решение : Рис.3.1.

Прежде всего заметим, что если O-центр окружности,

то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$. $AM^2 + BM^2 + CM^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 + \overrightarrow{MO + (OC)}^2 = 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 6R^2.$

Данная задача допускает всевозможные обощения, напрмеир правильные многоугольники. При этом для точки M может , быть указано лишь расстояние от центра окружности.

Задача 2.

В квадрат вписана окружность . Доказать , что сумма квадратов расстояний любой точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора этой точки. Найти сумму этих векторов.

Решение:

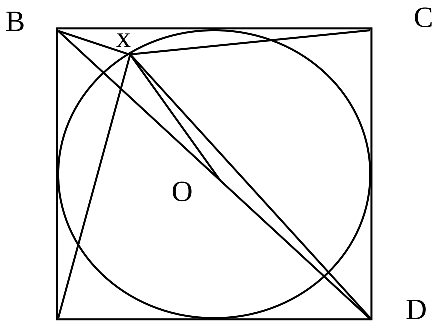


Рис.3.2.

Пусть O - центр квадрата $ABCD$, а X –произвольная точка окружности, вписанной в квадрат. Имеем:

$$\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OX},$$

$$\overrightarrow{XD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{XB}^2 + \overrightarrow{XC}^2 + \overrightarrow{XD}^2 + \overrightarrow{XA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OD}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 4\overrightarrow{OX}^2 - 2\overrightarrow{OX}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) = 4 \cdot (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + 4R^2 - 2\overrightarrow{OX}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right) = 4(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + 4R^2.$$

Где -сторона квадрата , $R - \textit{радиус окружности}$.

Поскольку $R = \frac{a}{2}$, то искомая сумма равна $\overrightarrow{XB}^2 + \overrightarrow{XC}^2 + \overrightarrow{XD}^2 + \overrightarrow{XA}^2 = 3a^2$.

Задача 3.

Точка C- середина отрезка AB, а O- произвольная точка на плоскости. Доказать , что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Решение:

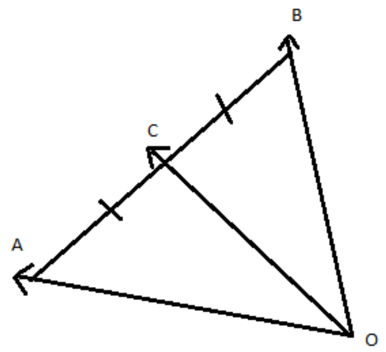


Рис.3.3.

По правилу треугольника $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$. Складывая эти равенства , получаем : 2 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$.

Так как точка C- середина отрезка AB , то $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.Таким образом, $2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Задача 4.

Доказать, что прямая , проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.

Решение:

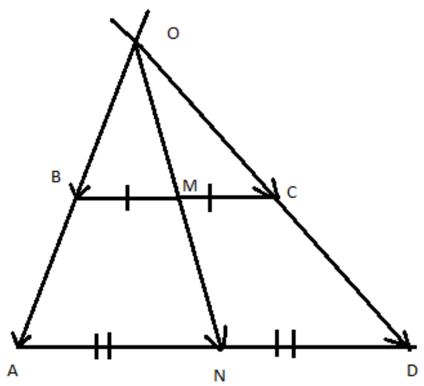


Рис.3.4.

Пусть ABCD –данная трапеция ,M и N - середины оснований BC и AD, а O- точка пересечения прямых AB и CD . Докажем , что точка O лежит на прямой MN .

Треугольники OAD и OBC подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = K$. Так как $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OD}$, то $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OC}$.

Точка M - середина отрезка BC , поэтому $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Аналогично $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$.

Подставив в последнее равенство выражения для $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$, получим:

$$\overrightarrow{ON} = k \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарные, и, значит , точка O лежит на прямой MN.

Заключение

Подводя итог обзору методов решения и методов поиска решения геометрических задач, заметим, что не все этапы в равной степени обязательно присутствуют в решении любой задачи. Мы рассмотрели примеры, показывающие что не всегда приходится выявлять характерны особенности конфигурации и, наоборот , некоторые решения одним этим этапом по сути и исчерпывались. Отдельно следует сказать об анализе полученного решения . Основная функция анализа -контроль правильности полученного решения, выявлени других возможностей , отличных от рассмотренных , оценка полноты решения. Иногда в ходе анализа необходимо провести исследование, существует ли полученная конфигурация , не относится ли она к разряду невозможных, при каких условиях возможно ее существование . Изучение методов решения геометрических задач будет более эффективным , если рассматривать на примере одной задачи возможности использования различных геометрических методов.