Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Анализ нелинейных динамических систем с использованием программного пакета Wolfram Mathematica**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 431 группы

направления 09.03.02 Информационные системы и технологии

Факультета нелинейных процессов

Егорова Глеба Андреевича

Научный руководитель
д. ф-м.н., профессор ____________________ А.А.Короновский
подпись, дата

Зав. кафедрой физики открытых систем
д. ф-м.н., профессор ____________________ А.А.Короновский
подпись, дата

Саратов 2018

## Введение

Вместе с широким распространением информационных систем возник вопрос о создании инструментов, позволяющих в определенной степени упростить различные процессы, в частности, математические вычисления. Существующие на тот момент языки программирования, хотя и обладали достаточно большим функционалом, требовали от пользователя наличия специальных навыков работы с ними, зачастую весьма сложных для освоения.

Список существующих на данный момент решений, позволяющих оптимизировать процесс математических вычислений, достаточно широк. Среди них есть программы для анализа и визуализации данных (например Gnuplot, Qtiplot), есть языки программирования(например Python), которые благодаря большому числу специализированных библиотек хорошо подходят различных вычислений. И существуют системы компьютерной алгебры, позволяющие проводить преобразования и работу с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме .

В основе подобных систем лежит следующая идея - создать специализированный программный продукт, позволяющий проводить сложные численные и аналитические вычисления, легкий для освоения, а также обладающий собственным языком программирования, позволяющем пользователю при необходимости составлять собственные алгоритмы. На данный момент существует несколько подобных программных пакетов, лидерами в данной области являются Maple, Wolfram Mathematica и MathCAD.

Следует сказать несколько слов о возможностях Wolfram Mathematica. Данный продукт отличается охватом широкого круга задач, так как ее разработчики задались целью объединить все известные математические методы, использующиеся для решения научных задач, в стандартизированном и согласованном виде, включая аналитические и численные расчеты.

За основу был взят специально разработанный язык символьного программирования, который способен оперировать очень широким спектром различных объектов с применением небольшого числа базисных конструкций.

Wolfram Mathematica дает возможность специалистам решать большое количество достаточно сложных задач, не вдаваясь в тонкости программирования. Благодаря этому программа получила широкое распространение в таких областях, как физика, биология, экономика.

В данной работе рассматриваются возможности системы Wolfram Mathematica для анализа динамических систем. Целью данной работы является изучение основных принципов работы с системой Wolfram Mathematica для эффективного решения математических задач.

В качестве динамической системы для исследования, рассматривающейся в четвертой главе, был выбран осциллятор Ван-дер-Поля под внешним периодическим воздействием. Данная система довольно подробно рассмотрена в различных работах, и целью данного исследования является получение результатов в системе Wolfram Mathematica с возможностью их дальнейшего сравнения с результатами, представленными в других работах.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

### 1. Возможности системы Mathematica для анализа динамических систем

Приведем функции программы, которые могут использоваться для анализа динамических систем с кратким описанием их функционала.

Списки в *Mathematica* создаются при помощи фигурных скобок: {...}, что является сокращением от *List[...].* Для создания списка при помощи функции удобно использовать команду *Table[выражение,{i,n}]* создающую список значений выражения для i от 1 до n.

Матрицы представлены в Mathematica при помощи списков. Они могут быть введены напрямую в нотации списка { }, созданы с помощью формулы, или импортированы из файла данных. Для создания матрицы с одинаковыми элементами используется команда *ConstantArray.*Если же требуется создать матрицу с одинаковыми элементами на главной диагонали, следует использовать команду *DiagonalMatrix*.

В программе реализовано множество операций с матрицами. Приведем основные:

1. *Tr* - находит след матрицы.
2. *Det* - находит детерминант матрицы.
3. *Transpose* - выполняет транспонирование матрицы.

Для представления сигнала в виде набора гармоник используется прямое дискретное преобразование Фурье, а для обратного преобразования спектра во временную зависимость — обратное дискретное преобразование Фурье. Команда *Fourier [list]* осуществляет прямое преобразование Фурье для списка комплексных чисел, а команда *InverseFourier [list]* - обратное.

Преобразование Фурье весьма подробно описано в различной литературе, здесь же приведем некоторые свойства, которые следует помнить при применении этих функций в Wolfram Mathematica.

В первую очередь следует отметить, что отсчет элементов преобразования Фурье начинается не с нуля, а с единицы. Таким образом, имеет место смещение нумерации индексов на единицу.

Функция *Fourier* в системе Mathematica дает все N элементов создаваемого ею вектора. Между тем, лишь N/2 элементов реально возможны, лишние же гармоники являются всего лишь зеркальным отражением реальных гармоник .

Для аналитического решения уравнений применяется функция *Solve*. Следует помнить, что при записи уравнения используется двойной знак равенства, а не одинарный. Mathematica также позволяет находить численные решения уравнений, воспользовавшись функцией *NSolve*. Для решения дифференциальных уравнений существуют аналогичные команды DSolve (аналитическое решение) и NDSolve (численное решение).

Не менее важным является вопрос визуализации полученных результатов. Ниже перечислен список функций для построения различных типов графиков.

1. *Plot* - строит график функции, заданной явным уравнением f(x)
2. *ParametricPlot* - строит график кривых, задаваемых параметрически.
3. *ListLinePlot* - визуализирует дискретный набор точек в виде непрерывной линии, соединяющей их.
4. *StreamPlot* - создает график линий тока. При анализу динамических систем удобно использовать данную функцию для построения графика фазовых траекторий.

## 2. Численный эксперимент

В качестве системы для исследования выберем осциллятор Ван-дер-Поля под внешним периодическим воздействием и рассмотрим возникновение явления синхронизации в данной системе.

Исследуемая система описывается следующим уравнением:

$$x'' - (\lambda - x^2)x' + x = b\,sin\omega t \quad (1)$$

Параметр $b$ определяет безразмерную амплитуду, ω - частоту воздействия, λ - коэффициент, характеризующий нелинейность и силу затухания колебаний.

Сделаем замену переменных (2) и перейдем к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка(3).

$$y_1 = x$$
$$y_2 = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \left(\lambda - y_1^2\right)y_2 - y_1 + b\,sin\omega t \end{cases} \qquad (3)$$

Решим систему уравнений (1) для различных значений параметра ω и значении параметров $\lambda = 0{,}5$ и $b = 0{,}2$. Для этого используем функцию численного решения дифференциальных уравнений..

Для заданных параметров результатом численного решения системы уравнений в среде Wolfram Mathematica является график зависимости $x(t)$ с соответствующими им спектрами, представленный на рисунке 1.

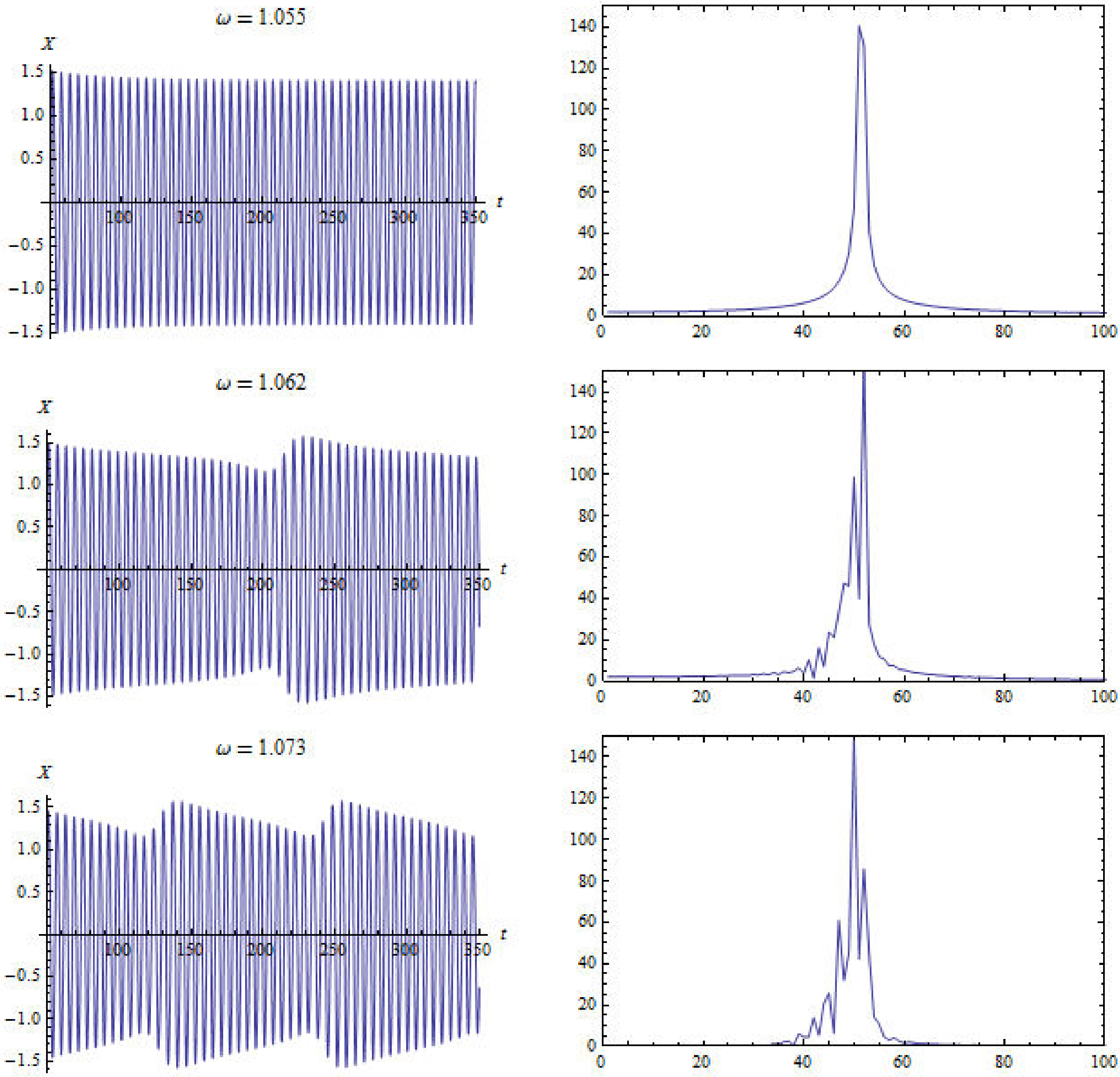


**Рис. 1 Слева - полученные численно зависимости динамической переменной от времени. Справа - соответствующие спектры. Верхний график отвечает режиму синхронизации.**

Приведенные результаты получены при малой амплитуде внешнего воздействия. Верхний график соответствует режиму синхронизации, два других - режиму биений. Можно отметить, что при частоте внешнего воздействия $\omega = 1.062$ модуляция сигнала возникает с большим временным периодом, и при дальнейшем увеличении частоты воздействия данный период уменьшается. Также, в спектре наблюдается большое число близко расположенных составляющих, которые постепенно расширяются при увеличении частоты внешнего воздействия.

Построим фазовые портреты, соответствующие состояниям динамической системы, представленным на рисунке 1. Для этого численно решим систему дифференциальных уравнений 3. при помощи функции *NDSolve*.

Были построены графики решения на фазовой плоскости при помощи функции *ParametricPlot*.

Результат выполнения описанных команд представлен на рисунке 2.

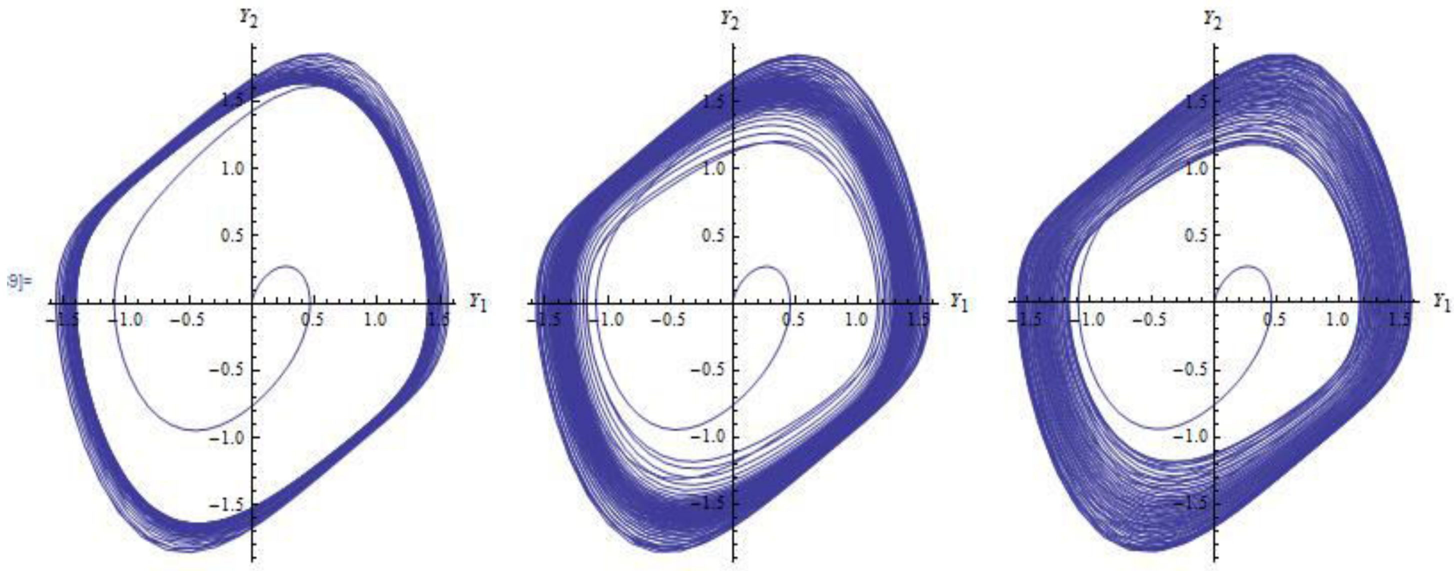


**Рис. 2 Фазовые портреты осциллятора Ван-дер-Поля под внешним воздействием. Крайний слева соответствует режиму синхронизации**

На рисунке 2 можно увидеть, что через некоторое время расчетов после выхода из начальной точки решение выходит на один и тот же цикл колебаний, называемый предельным циклом. При нарушении режима синхронизации и увеличении частоты внешнего воздействия наблюдается расширение предельного цикла.

Для нахождения особых точек – положений равновесия решается система уравнений (4)

$$\begin{cases} y = 0 \\ (\lambda - x^2)y - x = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Очевидно, что рассматриваемая динамическая система имеет единственное положение равновесия в точке (0,0). Исследуем его на устойчивость. Об устойчивости положения равновесия нелинейной системы можно судить по результатам анализа линеаризованной в окрестности положения равновесия системы.

Для анализа устойчивости особой точки необходимо рассчитать собственные числа матрицы линеаризации, являющиеся корнями характеристического уравнения (4.5)

$$\det[A - rE] = 0 \qquad (5)$$

где A - якобиан, E - единичная матрица.

Для решения характеристического уравнения аналитически была использована функция *Solve*. Также получим численное решение этого уравнения для значения параметра $\lambda = 0.5$ и $\lambda = -0.5$при помощи *NSolve*.

Собственные значения матрицы линеаризации для значения $\lambda = 0.5$ - комплексно сопряженные числа с положительной действительной частью. Следовательно, положение равновесия является неустойчивым фокусом. При $\lambda = -0.5$ собственные значения матрицы - комплексно-сопряженные числа с отрицательной действительной частью. Состояние равновесия - устойчивый фокус. Продемонстрируем это, построив графики фазовых траекторий при помощи команды *StreamPlot*. Результат представлен на рисунке 3.

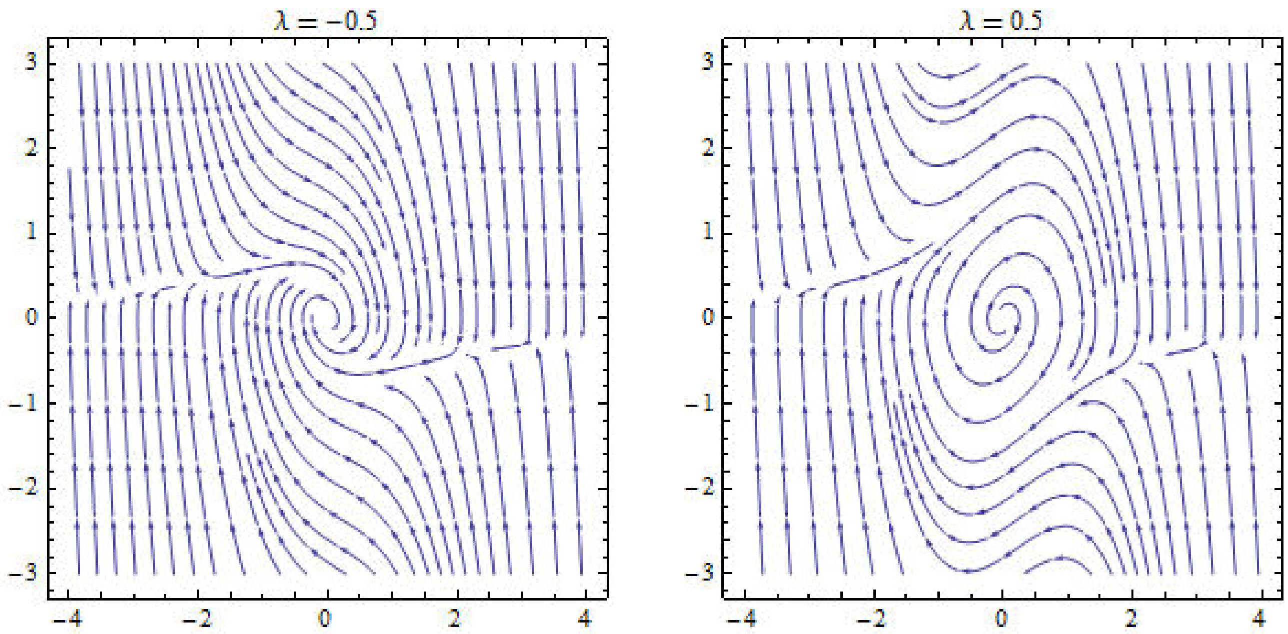


**Рис. 3 График фазовых траекторий уравнения Ван дер Поля при различных значениях параметра λ**

На рис.3 мы можем увидеть, что при $\boldsymbol{\lambda = -0.5}$ фазовые траектории скручиваются к началу координат, что соответствует особой точке устойчивый фокус. При $\boldsymbol{\lambda = 0.5}$ состояние равновесия теряет устойчивость, фазовые траектории раскручиваются, что характерно для неустойчивого фокуса. Также можно наблюдать сгущение фазовых траекторий в окрестности предельного цикла.

## Заключение

Благодаря быстрому развитию информационных систем, исследование возможностей математических пакетов, в частности Wolfram Mathematica, является весьма важным, учитывая недостаток качественной и актуальной русскоязычной литературы по данной тематике.

Целью данной работы являлось исследование возможностей программного пакета Wolfram Mathematica для анализа динамических систем.

При анализе рассмотренных функций можно выделить следующие отличительные особенности программы:

1. большая функциональность программы при относительной простоте языка
2. гибридная символьно - численная система делает возможным построение уникальных гибридных методов для решения многих задач и гарантирует последовательные результаты при сочетаний величин произвольных точностей.
3. единая система с высокой степенью интеграции функций

В четвертой главе были рассмотрены возможности Wolfram Mathemtica для анализа конкретной физической системы. Был исследован процесс синхронизации осциллятора Ван-дер-Поля внешним периодическим сигналом и программная реализация в среде Wolfram Mathematica, проведен анализ устойчивости точки равновесия системы при заданном параметре. Полученные в ходе исследования результаты хорошо согласуются с изложенными в других работах.