Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дискретной математики и
информационных технологий

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

студента 4 курса 421 группы
направления 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника
факультета КНиИТ
Тирабяна Артема Арцруновича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор ______________ В. А. Молчанов

Заведующий кафедрой
к.ф.-м.н., доцент, зав. каф. ______________ Л. Б. Тяпаев

Саратов 2018

Введение. В процессе функционирования разнообразных систем (экономических, социальных, производственных, технических) возникает потребность в распределении ресурсов разной природы (материальных, трудовых, финансовых, временных) между элементами этой системы. Большое количество прикладных задач связано с распределением ресурсов (ограниченных) в некоторых иерархических системах.

Выбранная тема бакалаврской работы особо актуальна на сегодняшний день, так как объемы ресурсов, которые имеются в наличии, ограничены, и возникает потребность в разработке методов решения задач их рационального распределения.

Подобная ситуация наблюдается в задаче объемно-календарного планирования при рассмотрении транспортной задачи с промежуточными пунктами и задачи распределения материальных, финансовых ресурсов при проектировании и изготовлении сложных изделий и др.

Целью выпускной квалификационной работы является рассмотрение принципов распределения ресурсов в иерархических системах на примере транспортной задачи с промежуточными пунктами, исследование способов ее решения и, как итог, реализация компьютерной программы для решения задачи.

Задачами выпускной квалификационной работы в связи с указанной целью являются:

1) рассмотрение транспортных задач, их видов и методов решения;
2) анализ математической модели транспортной задачи с промежуточными пунктами и постановка задачи;
3) исследование способов построения опорного плана;
4) изучение метода потенциалов для оптимизации найденного опорного плана.

Работа состоит из введения, четырех частей, заключения и списка используемой литературы.

В первой части рассмотрена классическая задача линейного программирования и описан метод ее решения.

Во второй части изучаются понятия распределения ресурсов в иерархических системах, рассмотрена транспортная задача с промежуточными пунктами, метод построения опорного плана для этой задачи и метод потенциалов для проверки плана на оптимальность.

В третьей части исследуются многокритериальные задачи и методы их решения, в частности алгоритм поиска эффективных вершин куба и алгоритм лексикографического упорядочения для контролируемых элементов.

Четвертая часть является практической частью, в которой описана разработка приложения для решения транспортной задачи с промежуточными пунктами и описан ее интерфейс.

1. Классическая задача распределения ресурсов

Формулировка: Даны линейная функция $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ с линейными ограничениями. Необходимо найти такие неотрицательные значения $x_1, x_2, ..., x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений,, и при которых линейная функция принимает минимальное значение.

Решить данную задачу графически при количестве переменных более 3 затруднительно. Однако существует универсальный способ решения задач линейного программирования, называемый симплекс-методом, который находит решение задачи путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве. Когда переход по ребру из текущей вершины в другую вершину с более высоким значением функционала невозможен, считается, что оптимальное значение найдено.$[1-3]$

2. Распределение ресурсов в иерархических системах

В подобной системе присутствуют элементы трех видов с некоторыми ограничениями: источники ресурсов, передающие элементы и конечные потребители ресурсов. Среди элементов системы выделяют так называемые «контролируемые» элементы [2], определяющие условия «эффективного» функционирования системы. Все «контролируемые» элементы определяют некоторые бинарные отношения на интервале допустимого распределения ресурсов, задаваемые целевыми функциями предпочтения, определенными для «контролируемых» элементов. Задача распределения ресурсов в иерархических системах представляет собой процесс определения одного из возможных вариантов распределения ресурсов, при котором целевая функция, определенная для контролируемых элементов, принимает значения экстремума. Если в таких задачах учитываются контролируемые элементы, то они могут быть представлены как многокритериальные задачи с некоторыми линейными ограничениями, а также критериями целевой функции предпочтения, вид которых зависит от этой функции. В том случае, если работа системы связана с некоторыми экономическими данными, например, суммарные затраты, суммарный доход или суммарная прибыль, линейные функции могут быть выбраны как целевые функции предпочтения. Примером такой задачи является, например, транспортная задача с промежуточными пунктами.

2.1 Транспортная задача с промежуточными пунктами

Потребители не всегда получают продукцию напрямую от производите-

ля. Нередки случаи, когда продукция проходит через промежуточные пункты, которыми могут являться, например, склады или предприятия переработки сырья. Такие задачи именуются транспортными задачами с промежуточными пунктами [4 − 6]. Введем некоторые обозначения: a_i - объем всей продукции, перевозимой из производства i; d_l - вместимость промежуточного центра l; b_j - потребности в продукции у j-го потребителя;
Задача формулируется следующим образом:

необходимо найти набор $\{\overline{x}_{il}, \overline{x}_{lj}\}$, который минимизирует функцию

$$\zeta(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{r} c_{il}x_{il} + \sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} c'_{lj}x'_{lj} \text{ - общая сумма транспортных перевозок}$$

и удовлетворяет ограничениям:

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{r} x_{il} = a_i, i \in I \text{ - вывоз продукции, отсутствие накопления на складах;} \\ \sum\limits_{l=1}^{m} x_{il} = \sum\limits_{j=1}^{n} x'_{lj} \le d_i, l \in L \text{ - ограничение вместимости складов;} \\ \sum\limits_{l=1}^{r} x'_{lj} = b_j, j \in J \text{ - удовлетворение всех потребностей потребителей;} \\ x_{il} \ge 0, x'_{lj} \le 0, i \in I, j \in J, l \in L. \end{cases}$$

Для решения подобной задачи необходимо сначала построить некий опорный план, а затем проверить его на оптимальность.

2.1.1 Построение опорного плана методом минимальной стоимости

Представим схему перевозок в виде таблицы, в которой по горизонтали - промежуточные пункты и конечные потребители, а по вертикали - поставщики. Суть метода заключается в том, что из этой матрицы выбирается наименьшая стоимость перевозки и в клетку, которая соответствует этой стоимости, помещают меньшая из суммы поставщиков. Строка, соответствующая поставщику, запасы которого израсходованы, исключается из рассмотрения. Также исключается из рассмотрения столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены. Процесс повторяется до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

2.1.2 Проверка оптимальности плана методом потенциалов

Теорема 1. *Если план $X^* - (x_{i^*j})$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m + n$ чисел U_i^* и V_i^*, удовлетворяющих условиям*

$$U_i^* + V_i^* = C_{ij}, x_{ij}^* > 0$$

и

$$U_i + V_i^* \leq C_{ij}, x_{ij}^* = 0.$$

Числа U_i^* и V_i^* - потенциалы поставщиков и потребителей $[7 - 8]$.

На основании данной теоремы для того, чтобы первоначальный опорный план был оптимальным, обязательно выполнение двух условий:

— $U_i + V_i = C_{ij}$ - для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке;

— $U_i + V_i \leq C_{ij}$ - для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке.

Рассмотрим алгоритм метода потенциалов состоит из шести шагов: построение системы потенциалов; проверка выполнения условия оптимальности для незанятых клеток; выбор клетики, в которую необходимо послать перевозку; построение цикла и определение величины перераспределения груза; проверка нового опорного плана на оптимальность; изменение системы потенциалов.

2.2 Постановка и решение задачи распределения ресурсов в иерархических системах

2.2.1 Постановка задачи Задача распределения однородного ресурса в иерархических системах может быть поставлена следующим образом: для заданного множества M, $M \subseteq 2^{N(s)}$, $N(s) = \{1, 2, ..., s\}$ [9], найти такую s-индексную матрицу χF, которая удовлетворяет системе линейных многоиндексных алгебраических неравенств транспортного типа

$$a_{F_{\overline{f}}} \leq \sum_{F_f \in E_f} \chi_{F_f F_{\overline{f}} \leq b_{F_{\overline{f}}}}, \, F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}, \, f \in M, \, f = \{k_1, k_2, ..., k_t\},$$
$$F_f = (j_{k1}, j_{k2}, ..., j_{kl}), \, E_f = J_{k1} \times J_{k2} \times ... \times J_{kl}$$

с учетом критериев оптимальности, задаваемых векторной функцией $\overline{Q}(\chi_F)$, определенной на множестве всех s-индексных матриц со значениями из R^m.

Поставленная задача является многокритериальной задачей, вид которой зависит от выбора $\overline{Q}(\chi_F)$. В случае, если говорится о распределении ресурсов с учетом экономических данных, в качестве переменных $\overline{Q}(\chi_F)$ выбираются линейные функции, и тогда задачи распределения ресурсов в многоуровневых иерархических системах могут быть рассмотрены как многокритериальные многоиндексные задачи. Применив линейную свертку критериев оптимальности, данная задача может быть сведена к многоиндексной задаче линейного программирования с транспортными ограничениями и критерием:

$$F(\chi_F) = \sum_{F \in E_{N(s)}} c_F \chi_F \rightarrow min,$$

которую в дальнейшем мы будем обозначать через $W(M)$.

2.2.2 Алгоритм решения Нас будут интересовать такие задачи $W(M)$, для которых применимы процедуры их сводимости к задаче L - поиска циркуляции минимальной стоимости [12]. Пусть $a_{F_{\overline{f}}} b_{F_{\overline{f}}}$ - целые числа, $F_{\overline{f}}$. Так как система ограничений задачи $W(M)$ определяется заданием множества M, $M \subset 2^{N(s)}$, будем решать задачу поиска таких множеств M, при которых задача $W(M)$ сводится к задаче L.

Теорема 1. Для того, чтобы задача $W(M)$ сводилась к задаче L достаточно, чтобы существовало такое разбиение множества M на подмножества $M_1 = f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, ..., f_{m2}^{(1)}$ и $M_2 = f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, ..., f_{m2}^{(2)}$, для которого $f_i^{(1)} \subseteq f_{i+1}^{(1)}$, $i = \overline{1, m_1 - 1}$ и $f_i^{(2)} \subseteq f_{i+1}^{(2)}$, $i = \overline{1, m_2 - 1}$.

При выполнении условий теоремы 1, для задачи $W(M)$ линейного программирования, являющейся многоиндексной, может быть построена некая транспортная сеть с пропускными способностями дуг, которые являются двусторонними. Найти допустимую циркуляцию возможно, лишь построив транспортную сеть, и решив задачу поиска максимального потока для этой транспортной сети. Улучшенный алгоритм расстановки пометок в задаче о максимальном потоке [11] имеет сложность вычисления $O(n^3)$, где n – количество вершин всей транспортной сети. Количество вершин в этой транспортной сети равно величине $Q = |E_{N(s)}| + \sum_{f \in M} |E_{\overline{f}}|$, которая является суммой числа переменных и ограничений в задаче $W(M)$ линейного программирования. Если выполняются условия теоремы 1, то $Q \leq 4|E_{N(s)}|(1 - 2^{-s})$. В таком случае вопрос о совместности задачи $W(M)$ требует порядка $O(|E_{N(s)}|^3)$ арифметических операций [10]. Решение задачи L может быть осуществлено лишь нахождением потока минимальной стоимости заданной величины, а это значит, что задача линейного программирования $W(M)$ может быть решена за $O(|E_{N(s)}|^4)$ операций.

Проверка условий выполнения теоремы 1 производится, например, перебором всевозможных вариантов, так как при выполнении условий теоремы $|M| \le 2s$ в множестве M не может быть более 2-х элементов одинаковой мощности.

3. Многокритериальные задачи и методы их решения

Путем введения дополнительных элементов, соответствующих дугам системы [11], перейдем к задаче с ограничениями, определенными только для элементов системы, количество которых увеличится от V до $m = |V| + |A|$.

Элемент иерархической системы называется контролируемым, если количество производимого, передаваемого или получаемого ресурса, является определяющим показателем эффективности работы системы. Считаем, что контролируемыми являются первые n элементов системы, $n \le m$.

Задачу в наиболее общем виде можно поставить следующим образом. Заданы булевы матрицы A и B размерностей $m \times k$ и $n \times k$, действительный неотрицательный вектор $\bar{c}$ размерности m и векторная функция $\overline{F}(\overline{y})$, определенная на множестве n-мерных векторов из R^n со значениями из $\{0, 1, \ \dots, \ p-1\}$. Введенная функция $\overline{F}(\overline{y})$ отображает пространство R^n на множество вершин n-мерного p-ичного куба. Требуется найти вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий ограничениям $A\overline{x} \le \bar{c}$ с учетом минимизируемых критериев $\overline{F}(B\overline{x})$. Данная задача есть n-критериальная задача с линейными ограничениями и частными критериями оптимальности, чей вид зависит от вида функции $\overline{F}(\overline{y})$. Система ограничений $A\overline{x} \le \bar{c}$ эквивалентна системе линейных алгебраических неравенств транспортного типа $\sum\limits_{j \in R(i)} x_j \le c_i, i = \overline{1, m}$, где $R(i)$ – множество индексов, соответствующих i-ой строке булевой матрицы $A, i = \overline{1, m}$, а вектор $B\overline{x}$ имеет координаты $\sum\limits_{j \in G(i)} x_j, i = \overline{1, n}$, где $G(i)$ – множество индексов, соответствующих i-ой строке булевой матрицы B.

Для решения поставленной многокритериальной задачи используется алгоритм решения задачи при лексикографическом упорядочении критериев оптимальности [12], который также может успешно применяться для задач, в которых задан произвольный полный линейный порядок на множестве критериев задачи, также будет исследована проблема построения для рассматриваемой многокритериальной задачи всего множества Парето-оптимальных решений [13] (вершин куба).

3.1 Алгоритм поиска всех эффективных вершин куба

Определение. Эффективной вершиной [14] n-мерного p-ичного куба будем называть такую вершину $\overline{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, ..., z_n^0)$, для которой $f(\overline{z}^0) = 1$, и при этом для любой вершины $\overline{z}^1 = (z_1^1, z_2^1, ..., z_n^1), z_i^0 \geq z_i^1, i = \overline{1,n}$, для которой существует, по крайней мере, одна компонента j, $z_j^0 > z_j^1$, $f(\overline{z}^1) = 0$.

Для нахождения всего множества эффективных вершин куба ограничим область поиска, найдя минимальное возможное значение по каждой компоненте вершины, при которой функция $f(\overline{z})$ равна 1. Монотонность функции $f(\overline{z})$ позволяет производить двоичный поиск по значению текущей рассматриваемой компоненте куба, зафиксировав при этом остальные значения компонент равными $p-1$. В результате получим для каждой компоненты граничное значение $z_j^*, j = \overline{1,n}$ и вершину $\overline{z}^j = (p-1, p-1, ..., z_j^*, ..., p-1), j = \overline{1,n}$. Найденные вершины $\overline{z}^j$ поместим в множество . Очевидно, что для всех вершин, имеющих значения всех компонент большими или равными значениям соответствующих компонент в $\overline{z}^j$, функция f также будет принимать значение 1. Поэтому эти вершины из дальшнейшего поиска исключаются, так как они не являются эффективными.

Теорема 1. Если $f(\overline{z}^*) = 1$, то вершина $\overline{z}^*$ является единственной эффективной вершиной куба.

Следствие из теоремы 1. Из теоремы 1 следует, что все вершины куба, соответствующие совместным системам линейных неравенств, а тем самым и эффективные вершины $\overline{z}' = (z_1', z_2', ..., z_n')$, удовлетворяют условию $z_j' \geq z_j^*, j = \overline{1,n}$.

Фиксируется набор значений всех компонент, кроме j-й. Значение первой компоненты увеличивается, пока не достигнет $p-1$. После этого оно уменьшается до z_1^*, и увеличивается на единицу значение второй компоненты вершины. Затем снова происходит увеличение первой компоненты при новом фиксированном значении второй. После рассмотрения всевозможных вариантов изменения первой и второй компонент, они устанавливаются равными z_1^* и z_2^* соответственно, и увеличивается на единицу третья компонента. При этом новом значении третьей компоненты нужно произвести поиск при всевозможных значениях первой и второй и т. д. Алгоритм завершается, когда все наборы значений компонент, кроме j-ой, от $(z_1^*, z_2^*, ..., z_{j-1}^*, z_j, z_{j+1}^*, ..., z_n^*)$ до $(p-2, p-1, ..., z, p-1, .., p-1)$ будут рассмотрены. Множество M назовем множеством граничных вершин или вершин, «подозрительных на эффективность».

Теорема 2. Множество M найденных граничных вершин содержит в себе все множество эффективных [14] вершин.

3.2 Лексикографическое упорядочение для контролируемых элементов

Здесь предполагается, что контролируемыми могут быть любые элементы множества $K, K \subseteq V, |K| = q_0$. В качестве функций предпочтения для контролируемых элементов выберем кусочно-постоянные [15] функции $\chi_i(\sum\limits_{j \in Q(i)} x_j, s_i^0, s_i^1, ..., , s_i^P)$, определенные на множестве $[A_i, B_i]$, со значениями из множества $\{0, 1, ..., \ p\}$, где $s_i^v, v = 0, 1, ..., p$ - совокупность вложенных друг в друга интервалов, $s_i^v \subseteq s_i^{v+1}, s_i^p = [A_i, B_i]$, причем $\chi_i(\sum\limits_{j \in Q(i)} x_j, s_i^0, s_i^1, ..., , s_i^P) = t$, если $\sum\limits_{j \in Q(i)} x_j \in s_i^t$ и $\sum\limits_{j \in Q(i)} x_j \notin s_i^{t-1}$ [16]. Таким образом введенные функции предпочтения определяют качество распределения ресурсов - чем меньше интервал, которому принадлежит количество полученного элементом ресурса, тем «лучше» выполнены пожелания элемента. Задача распределения ресурсов в этом случае заключается в определении такого допустимого решения системы $A_j \leq \sum\limits_{i \in Q(j)} x_i \leq B_j, j \in V$ (1), при котором функции предпочтений принимают экстремальные значения:

$$\chi_i(\sum_{j \in Q(i)} x_j, s_i^0, s_i^1, ..., , s_i^P) \to min, i \in K.$$

4. Реализация приложения для решения транспортной задачи с промежуточными пунктами

Приложение для решения транспортной задачи с промежуточными пунктами было написано на языке программирования $C\#$. Последовательно были реализованы метод наименьшей стоимости для построения плана задачи и метод потенциалов для проверки оптимальности построенного плана. Интерфейс программы состоит из следующих элементов: окно для графического представления задачи для удобства пользователя; кнопка для ввода данных, при нажатии которой все данные, внесенные пользователем в первую таблицу, будут использованы в задаче; окно для таблицы со значениями задачи, если между двумя узлами нет транспортной связи, то клетка заполняется достаточно большим числом; кнопка для построения опорного плана, при нажатии на которую будет применен метод наименьшей стоимости и будет высчитан опорный план; таблица для демонстрации опорного плана и поле для общей стоимости перевозки; кнопка для оптимизирования опорного плана, при нажатии на которую к опорному плану будет применен метод потенциалов, а на выходе получим оптимальный опорный план; окно для представления оптимального плана, поле общей стоимости при оптимальном плане и количество итераций.

Заключение. В процессе выполнения бакалаврской работы рассмотрены принципы распределения ресурсов в иерархических системах на примере транспортной задачи с промежуточными пунктами и изучены методы их решения. Также проведен анализ математической модели данной задачи, исследованы разные способы построения опорного плана для решения транспортной задачи с промежуточными пунктами и изучен метод потенциалов для оптимизации найденного опорного плана. Следствием выполнения всех задач и достижения цели стало создание компьютерного приложения на языке $C\#$, позволяющего решать транспортную задачу с промежуточными пунктами. Программа состоит из нескольких частей, включающих в себя разные методы решения транспортных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. Высш. школа, 1980 стр. 106-163.

2 Прилуцкий М . Х., Рапопорт И . А. Распределение ограниченного ресурса в иерархических компьютерных системах // Сб. трудов ВятГТУ. Киров: ВятГТУ, 2000. С. 67-72.

3 Прилуцкий М . Х . Многоиндексные задачи объемно-календарного планирования транспортного типа. SICPRO06 . Труды 5 Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO 2006. Москва 30 января – 2 февраля 2006, с. 503-510.

4 Раскин Л . Г., Кириченко И . О. Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.

5 M. Gairing, T. Lucking, M. Mavronicolas, and B. Monien, Computing Nash Equilibria for Scheduling on Restricted Parallel Links. Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp. 613-622, 2004.

6 P.E. Dunne. Extremal Behaviour in Multiagent Contract Negotiation. Jnl. of Artificial Intelligence Research, 23, January 2005, pp. 41-78.

7 Воронин А . А., Мишин С . П. Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУ РАН, 2003. – 214 с.

8 Литвак Б . Г., Раппопорт А . М. Задачи линейного программирования, допускающие сетевую постановку// Экономика и мат. методы. 1970. Т. 6, Вып. 4, с. 594-604.

9 Пападимитриу Х ., Стайглиц К . Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. Москва: Мир, 1985.

10 Прилуцкий М .Х . Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах// Автоматика и телемеханика. 1996. №2, с. 78-82.

11 Афраймович Л . Г ., Прилуцкий М . Х ., Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах.//Автоматика и телемеханика, 2006, №6, с.194-205.

12 В.А. Бункин, Д. Колев, Б.Я. Курицкий и др. Справочник по оптимизационным задачам в АСУ. – Л.: Машиностроение, 1984. 212с.

13 Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1982 г.

14 Прилуцкий М.Х., Картомин А.Г. «Потоковые алгоритмы распределения ресурсов в иерархических системах». Электронный источник: журнал «Исследовано в России», с. 444-460, 2003 г. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/039.pdf

15 Прилуцкий М.Х. Распределение однородного ресурса в иерархических системах древовидной структуры// Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления SICPRO'2000». Москва, 26-28 сентября 2000 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2000, с. 2038-2049.

16 Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: МИР, 1966.