

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Развитие методов численного моделирования направляемых волн в
многослойных планарных анизотропных структурах**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 214 группы

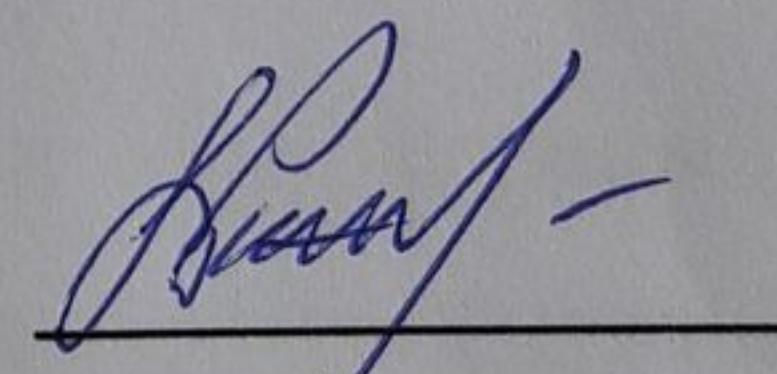
направления 03.04.01 Прикладные математика и физика

Факультет нелинейных процессов

Ляльченко Арсения Алексеевича

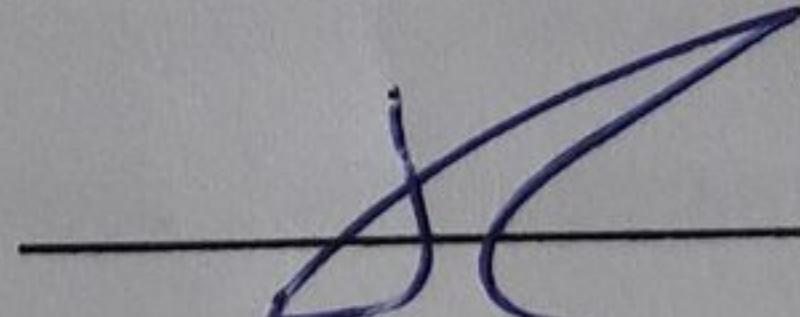
Научный руководитель

доцент



А.Г. Рожнев

Зав. кафедрой
нелинейной физики
доцент, к.ф.-м.н.



Е.Н. Бегинин

Саратов 2018 г.

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Развитие методов численного моделирования направляемых волн в
многослойных планарных анизотропных структурах**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 214 группы

направления 03.04.01 Прикладные математика и физика

Факультет нелинейных процессов

Ляльченко Арсения Алексеевича

Научный руководитель

доцент

А.Г. Рожнев

Зав. кафедрой

нелинейной физики

доцент, к.ф.-м.н.

Е.Н. Бегинин

Саратов 2018 г.

ВВЕДЕНИЕ

В современной электродинамике СВЧ и интегральной оптике широко используются многослойные планарные структуры, отдельные слои которых выполнены из материалов различного типа – диэлектриков, тонких металлических пленок, ферритовых пленок, метаматериалов и материалов других типов. В качестве устройств, основанных на многослойных структурах можно назвать рефлекторы [1], поляризаторы[2], фильтры, ответвители, волноведущие системы. Для теоретического анализа таких структур наиболее часто используют различные варианты метода матриц передачи (ММП), которые отличаются высокой точностью, простотой и высокой скоростью работы.

Однако, применение ММП к многослойным структурам ограничено двумя факторами. Во-первых, если отдельные слои выполнены из анизотропных материалов, алгоритмы метода существенно усложняются. Выражения для элементов матрицы передачи отдельного слоя теперь невозможно записать аналитически, поскольку в случае полностью заполненных тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей дисперсионное уравнение для волн в безграничной среде из такого материала представляет собой уравнение 4-ой степени. Это обстоятельство требует разработки новых алгоритмов для расчета свойств отдельного слоя, основанных на матричных подходах.

Во-вторых, известно, что в ряде случаев ММП демонстрирует численную неустойчивость, природа которой связана с тем, что матрица передачи отдельного слоя, в котором возможно большое затухание или нарастание волн, становится близка к вырожденной матрице. Для преодоления этой трудности в 2000-х годах был предложен и развит новый метод анализа многослойных структур, получивший название метода точных конечных разностей. Однако до настоящего времени этот подход применялся только для многослойных структур из изотропных материалов.

Научная новизна состоит в том, что в данной работе разработан метод расчета матрицы передачи для анизотропной слоистой структуры, в которой компоненты тензоров ε и μ являются полнозаполненными.

В связи с изложенным, **целью выпускной квалификационной работы** было развитие методов матриц передачи и точных конечных разностей применительно к анализу слоистых электродинамических структур, имеющих в пределах каждого слоя полностью заполненные и произвольные по значению тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Для достижения этой цели в работе были решены следующие задачи.

Получены основные соотношения метода матриц передачи для слоистых структур из изотропных материалов, при этом все промежуточные вычисления сформулированы в матричном виде, обеспечивающим проведение вычислений без использования аналитических формул для компонент полей. Хотя метод применительно к изотропным системам ранее многократно развивался, эта часть работы носит важный методический характер, поскольку все основные шаги алгоритма без принципиальных изменений переносятся на случай анализа анизотропных структур.

Разработана и отлажена программа расчета электродинамических параметров плоско - слоистых волноводов из изотропных магнитодиэлектриков. Правильность работы программы была проверена на значительном количестве тестовых примеров, что подтвердило правильность всего численного алгоритма в целом.

Получены формулы для матрицы Берремана, описывающей пространственное изменение полей в пределах одного слоя из анизотропного материала в случае полностью заполненных тензоров $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$. Знание этой матрицы позволяет рассчитать матрицу передачи отдельного слоя.

Сформулирован численный алгоритм получения дисперсионного уравнения, описывающего поверхностные (направляемые) моды в многослойной анизотропной структуре. Хотя в рамках настоящей работы

рассматривалась только задача об анализе направляемых мод, с помощью развитых подходов могут быть просто проанализированы задачи в другой постановке, например, задача о рассеянии и прохождении плоской волны произвольной поляризации, падающей на слоистую структуру.

Разработана и отлажена программа расчета электродинамических параметров планарных слоистых волноводов, состоящих из слоев с произвольными полностью заполненными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостями. Корректность работы программы проверена на нескольких тестовых примерах, включающих слои из анизотропных материалов и метаматериалов.

Разработан алгоритм метода точных конечных разностей применительно к слоистой структуре из анизотропных магнитодиэлектриков.

Основное содержание работы

Работа состоит из двух основных разделов.

В первом разделе рассматривается теоретический метод получения и расчета матрицы передачи для многослойных структур. Также получен и представлен алгоритм расчета матрица передачи для изотропных структур, где волну можно разделить на TM и TE – волны.

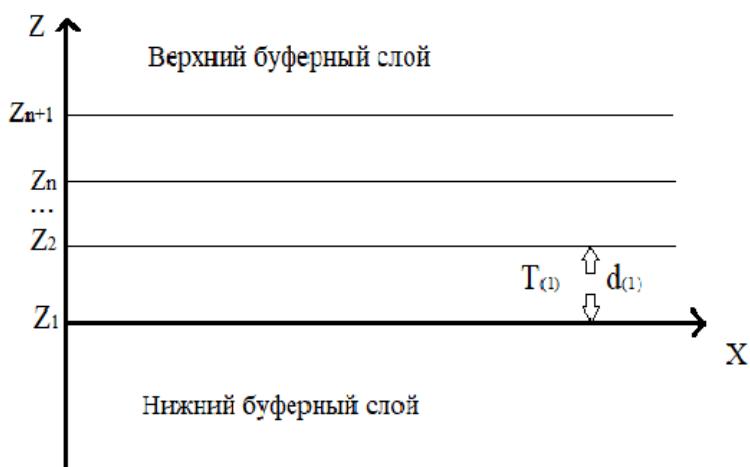


Рисунок 1 - Слоистый волновод. Нижний и верхний буферные слои являются полубесконечными, то есть бесконечны в направлении удаления от данной слоистой структуры

Рассматривалась задача падения плоской электромагнитной волны на границу раздела двух сред, имеющих различные значения тензоров относительных электрической и магнитной проницаемостей (см. рисунок 1). Из уравнений Максвелла [3] была получена система 4-х уравнений дифференциальных уравнений первого порядка для касательных к границам раздела компонент электромагнитного поля, которая в матричном виде выглядит следующим образом:

$$\frac{d\psi}{dz} = \hat{\Omega}\psi, \quad (1)$$

где введены вектор столбец, составленный из компонент полей $\psi = [E_x(z), E_y(z), H_x(z), H_y(z)]^T$ и матрица Ω , равная

$$\Omega = j \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_x k_y}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} & -(\omega \mu_0 \mu_r - \frac{k_x^2}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}) \\ 0 & 0 & \omega \mu_0 \mu_r - \frac{k_y^2}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} & \frac{k_y k_x}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \\ \frac{k_x k_y}{\omega \mu_0 \mu_r} & \omega \epsilon_0 \epsilon_r - \frac{k_x^2}{\omega \mu_0 \mu_r} & 0 & 0 \\ -(\omega \epsilon_0 \epsilon_r - \frac{k_y^2}{\omega \mu_0 \mu_r}) & -\frac{k_y k_x}{\omega \mu_0 \mu_r} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Уравнения (1)-(2) описывают распространение волны в произвольном направлении в плоскости xy , задаваемом направлением волнового вектора (k_x, k_y) . Решение уравнения (1) в пределах отдельного слоя, границы которого задаются координатами z_i и z_{i+1} позволяет получить матрицу передачи [4] для этого слоя, связывающую значения векторов $\hat{\psi}(z_{i+1})$ и $\hat{\psi}(z_i)$ с помощью соотношения $\hat{\psi}(z_{i+1}) = \hat{T}_i \hat{\psi}(z_i)$. Матрица \hat{T}_i имеет вид

$$\hat{T}_i = \hat{W} \cdot \text{diag}[e^{\Lambda_1 d_i}, e^{\Lambda_2 d_i}, e^{\Lambda_3 d_i}, e^{\Lambda_4 d_i}] \cdot \hat{W}^{-1}, \quad (3)$$

где Λ_i -собственные числа матрицы Ω , \hat{W} - матрица, столбцы которой составлены из собственных векторов матрицы Ω , $d_i = z_{i+1} - z_i$ - толщина слоя,

`diag[...]` - диагональная матрица. С помощью перемножения всех матриц передачи для отдельных слоев, получали общую матрицу передачи для слоистой структуры. Знание матрицы передачи позволяет получить дисперсионное уравнение для направляемых мод слоистой структуры численно в виде требования равенства нулю выражения, в которое входят элементы полной матрицы передачи и параметры буферных слоев. Для случая изотропной среды волну можно разделить на пару TE – и TM – волн, что значительно упрощает подсчеты, поскольку матрицы (2) и (3) имеют блочную структуру и состоят из матриц порядка 2×2 для каждого типа волн.

Далее в первом разделе выпускной квалификационной работы рассмотрены примеры расчета направляемых мод в слоистых изотропных структурах, а именно, в плоской диэлектрической пластине, а также в пятислойной структуре, содержащей сердцевину из метаматериала. В обоих случаях полученные результаты полностью совпали с известными из литературы данными.

Во втором разделе работы был развит метод расчета направляемых мод в открытой плоскослоистой анизотропной структуре, у которой в пределах каждого слоя тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей могут быть полностью заполненными. Поскольку в системе существует анизотропия, то в ней не могут распространяться в чистом виде TE - и TM - волны, собственные волны в ней носят гибридный характер, то есть отличны от нуля все 6 компонент электромагнитного поля. Кроме этого, дисперсия и распределения полей собственных волн будут зависеть от направления распространения волны в плоскости (x, y)

Аналогично процедуре, использованной в первом разделе выпускной работы, в случае полностью заполненных тензоров $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ уравнения для касательных к границам раздела слоев компонент полей могут быть представлены в виде в матричном виде:

$$\frac{d\hat{\Psi}}{dx} = -i k \hat{\Omega} \hat{\Psi}, \quad (4)$$

где $\hat{\Psi} = [E_x, F_y, F_x, E_y]^T$ - вектор-столбец, состоящий из поперечных компонент электромагнитного поля, $F_{x,y}(z) = Z_0^{-1} H_{x,y}(z)$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$, а элементы матрицы $\hat{\Omega}$ равны:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= -\frac{n_{ef}(\mu_{zz}\epsilon_{zx}\cos\varphi + \mu_{yz}\epsilon_{zz}\sin\varphi)}{\epsilon_{zz}\mu_{zz}}, & \Omega_{12} &= \mu_{yy} - \frac{\mu_{yz}\mu_{zy}}{\mu_{zz}} - \frac{n_{ef}^2 \cos^2\varphi}{\epsilon_{zz}}, \\ \Omega_{13} &= -\mu_{yx} + \frac{\mu_{yz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}} - \frac{n_{ef}^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\epsilon_{zz}}, & \Omega_{14} &= \frac{n_{ef} \cos\varphi (\mu_{yz}\epsilon_{zz} - \mu_{zx}\epsilon_{zy})}{\epsilon_{zz}\mu_{zz}}, \\ \Omega_{21} &= \epsilon_{xx} - \frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} - \frac{n_{ef}^2 \sin^2\varphi}{\mu_{zz}}, & \Omega_{22} &= -\frac{n_{ef}(\epsilon_{xz}\mu_{zz}\cos\varphi + \epsilon_{zz}\mu_{zy}\sin\varphi)}{\epsilon_{zz}\mu_{zz}}, \\ \Omega_{23} &= \frac{n_{ef} \sin\varphi (\mu_{zx}\epsilon_{zz} - \mu_{zz}\epsilon_{xz})}{\mu_{zz}\epsilon_{zz}}, & \Omega_{24} &= \epsilon_{xy} - \frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} + \frac{n_{ef}^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\mu_{zz}}, \\ \Omega_{31} &= \epsilon_{yx} - \frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zx}}{\epsilon_{zz}} + \frac{n_{ef}^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\mu_{zz}}, & \Omega_{32} &= \frac{n_{ef} \cos\varphi (\mu_{zy}\epsilon_{zz} - \mu_{zz}\epsilon_{yz})}{\mu_{zz}\epsilon_{zz}}, \\ \Omega_{33} &= -\frac{n_{ef}(\mu_{zz}\epsilon_{yz}\sin\varphi + \mu_{zx}\epsilon_{zz}\cos\varphi)}{\mu_{zz}}, & \Omega_{34} &= \epsilon_{yz} - \frac{\epsilon_{yz}\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} - \frac{n_{ef}^2 \cos^2\varphi}{\mu_{zz}}, \\ \Omega_{41} &= \frac{n_{ef}(\epsilon_{zz}\mu_{xz} - \epsilon_{zx}\mu_{zz})\sin\varphi}{\epsilon_{zz}\mu_{zz}}, & \Omega_{42} &= -\mu_{xy} + \frac{\mu_{xz}\mu_{zy}}{\mu_{zz}} - \frac{n_{ef}^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\epsilon_{zz}}, \\ \Omega_{43} &= \mu_{xx} - \frac{\mu_{xz}\mu_{zx}}{\mu_{zz}} - \frac{n_{ef}^2 \sin^2\varphi}{\epsilon_{zz}}, & \Omega_{44} &= -\frac{n_{ef}(\epsilon_{zz}\mu_{xz}\cos\varphi + \epsilon_{zy}\mu_{zz}\sin\varphi)}{\epsilon_{zz}\mu_{zz}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Матрица $\hat{\Omega}$ носит название матрицы Берремана [5]. Матрица передачи полностью анизотропного слоя может быть вычислена с помощью соотношения, аналогичного уравнению (3). Для направляемых мод в нижнем буферном слое выражения для компонент полей имеют вид

$$\begin{aligned} E_{x'}(z) &= A_d e^{\gamma_d(z-z_d)} + B_d e^{-\gamma_d(z-z_d)}, & F_{y'}(z) &= \frac{-i k \epsilon_d}{\gamma_d} A_d e^{\gamma_d(z-z_d)} + \frac{i k \epsilon_d}{\gamma_d} B_d e^{-\gamma_d(z-z_d)}, \\ F_{x'}(z) &= C_d e^{\gamma_d(z-z_d)} + D_d e^{-\gamma_d(z-z_d)}, & E_{y'}(z) &= \frac{-i k \mu_d}{\gamma_d} C_d e^{\gamma_d(z-z_d)} + \frac{i k \mu_d}{\gamma_d} D_d e^{-\gamma_d(z-z_d)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где (x', y') вспомогательная система координат, ось x' которой направлена вдоль направления распространения волны. Аналогичное выражение может

быть записано для компонент полей в верхнем буферном слое, с заменой индекса d на индекс u . Амплитуд нарастающих и затухающих при удалении от слоистой структуры волн связаны соотношением

$$[A_u, B_u, C_u, D_u]^T = \hat{W} \cdot [A_d, B_d, C_d, D_d]^T, \quad (7)$$

где матрица \hat{W} выражается через полную матрицу передачи и параметры буферных слоев. Формула для вычисления матрицы \hat{W} приведена в работе.

Для направляемой (поверхностной) волны A_u, C_u, B_d и D_d должны быть равны нулю. Тогда из формулы (7) можно получить соотношение

$$\begin{bmatrix} (\tilde{W}_{11} - \tilde{W}_{12} \cdot \tilde{W}_{22}^{-1} \cdot \tilde{W}_{21}) & \tilde{W}_{12} \cdot \tilde{W}_{22}^{-1} \\ -\tilde{W}_{22}^{-1} \cdot \tilde{W}_{21} & \tilde{W}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cdot [A_d, C_d, B_u, D_u]^T = \hat{U} \cdot [A_d, C_d, B_u, D_u]^T = 0. \quad (8)$$

Это соотношение представляет собой линейное однородное уравнение относительно амплитуд A_d, C_d, B_u и D_u , поэтому его нетривиальное решение существует только, если

$$\det \hat{U} = 0 \quad (9)$$

Формула (9) представляет собой дисперсионное уравнение для направляемых мод слоистой полностью анизотропной структуре.

На основании методов, изложенных во втором разделе выпускной квалификационной работы, был разработан алгоритм и программа расчета свойств направляемых мод в открытых слоистых анизотропных волноводах. Для проверки правильности написания программы расчета свойств направляемых мод в открытых слоистых анизотропных волноводах были выбраны несколько тестовых примеров. Одним из них является расчет мод Дэймона-Эшбаха. В данном случае производились расчеты на примере системы, для которой известны аналитические результаты. В качестве такой модели была выбрана задача распространения моды Дэймона – Эшбаха в ферритовом слое конечной толщины $l = 20$ мкм. Внешнее магнитное поле направлено вдоль оси Z , а магнитостатическая волна в пленке

распространяется вдоль оси X, как уже было рассмотрено в предыдущих примерах. Если принять, что по обеим сторонам пленки находится вакуум, то дисперсионное уравнение выглядит следующим образом:

$$\omega^2 = \omega_H(\omega_H + \omega_M) + \frac{\omega_M^2}{4}(1 - \exp(-2\beta_x l)), \quad (10)$$

где $\omega_M = \gamma 4\pi M_0$, $\omega_H = \gamma H_0$, $\gamma = 5.6\pi$ МГц/Э – гиromагнитное отношение, M_0 – намагниченность насыщения. Тензор магнитной проницаемости для данной структуры выглядит следующим образом:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu(\omega) & -i\mu_a(\omega) & 0 \\ i\mu_a(\omega) & \mu(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Причем зависимость компонент тензора от частоты определяется соотношениями:

$$\mu(\omega) = \frac{\omega_H(\omega_H + \omega_M) - \omega^2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad \mu_a(\omega) = \frac{\omega_H \omega}{\omega_H^2 - \omega^2}. \quad (12)$$

Наличие в тензоре магнитной проницаемости намагниченного феррита мнимых недиагональных компонент свидетельствует о магнитной гиротропии ферромагнитной среды, при этом компоненты тензора являются функциями частоты ω , намагниченности M_0 и приложенного магнитного поля H_0 [6]. На рисунке 2 представлено пространственное распределение полей в однородной пленке при $\omega_H = 5.278 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$ и $\omega_M = 30.788 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$. Для ферромагнитного слоя диэлектрическая проницаемость равна $\varepsilon = 1$, а магнитная проницаемость

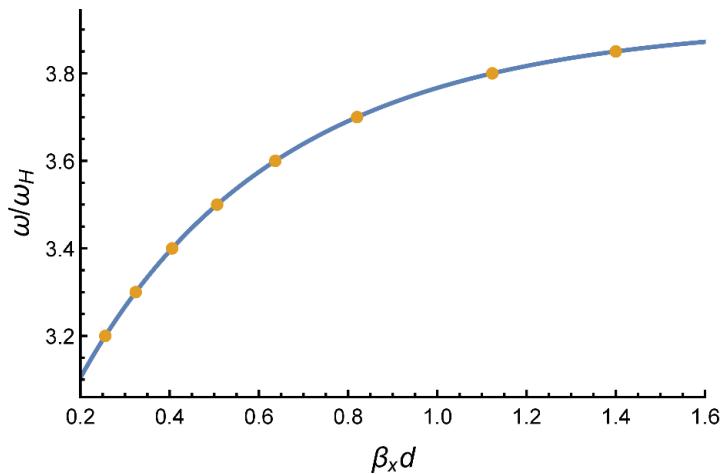


Рисунок 2 - Результаты тестового расчета структуры, содержащей ферромагнитную пленку для моды Деймона - Эшбаха

определяется тензором (11). Для вакуума $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$. На рисунке 2 представлена зависимость безразмерной частоты от безразмерного продольного волнового числа. Видно, что рассчитанные точки хорошо ложатся на теоретическую сплошную кривую, построенную по дисперсионному уравнению (10).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной выпускной квалификационной работы были решены следующие задачи.

Получены основные соотношения метода матриц передачи для слоистых структур из изотропных материалов, при этом все промежуточные вычисления сформулированы в матричном виде, обеспечивающим проведение вычислений без использования аналитических формул для компонент полей.

Разработана и отлажена программа расчета электродинамических параметров плоско - слоистых волноводов из изотропных магнитодиэлектриков. Правильность работы программы была проверена на значительном количестве тестовых примеров, что подтвердило правильность всего численного алгоритма в целом.

Получены формулы для матрицы Берремана, описывающей пространственное изменение полей в пределах одного слоя из анизотропного материала в случае полностью заполненных тензоров $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$.

Сформулирован численный алгоритм получения и решения дисперсионного уравнения, описывающего поверхностные (направляемые) моды в многослойной анизотропной структуре. Хотя в рамках настоящей работы рассматривалась только задача об анализе направляемых мод, с помощью развитых подходов могут быть достаточно просто проанализированы задачи в другой постановке, например, задача о рассеянии и прохождении плоской волны произвольной поляризации, падающей на слоистую структуру.

Разработана и отлажена программа расчета электродинамических параметров планарных слоистых волноводов, состоящих из слоев с произвольными полностью заполненными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостями. Правильность работы программы проверена на

нескольких тестовых примерах, включающих слои из анизотропных материалов и метаматериалов.

Разработан алгоритм метода точных конечных разностей применительно к слоистой структуре из анизотропных магнитодиэлектриков.

Предложенные в ходе выполнения выпускной квалификационной работы алгоритмы расчета слоистых структур и программы, разработанные на их основе, могут быть использованы для анализа современных устройств интегральной оптики и магнитооптики, включающих слоистые анизотропные структуры, в том числе элементы, изготовленные из метаматериалов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Fink Y., Winn J. N., Fan S., Chen C., Michel J., Joannopoulos J. D., Thomas E. L. A dielectric omnidirectional reflector // *Science*, 1998, V. 282 (5394), P.1679-1682.
2. Monga J. C. Multilayer thin-film polarizers with reduced electric-field intensity, *J. Mod. Opt.*, Vol. 36, P. 769–784, 1989.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
5. Berreman D.W. Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4x4-Matrix Formulation // *JOSA*, 1972. V. 62. № 4. P. 502-510.
6. Садовников А.В., Рожнев А.Г. Моделирование распространения магнитостатических волн в одномерных магнонных кристаллах // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2012, Т. 20, №1. С. 143-159.