Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра электроники колебаний и волн

Применение анализа размерностей и теории подобия в различных физических задачах

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы
Направления 03.03.03. Радиофизика
Факультета нелинейных процессов
Здобнова Игоря Дмитриевича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент _______________ Г.М. Вдовина
дата, подпись

Заведующий кафедрой
член-корр. РАН, д.ф.-м.н.,
профессор _______________ Д.И. Трубецков
дата, подпись

Саратов 2018

Введение

Не многим известно, что впервые анализ размерности был обоснован и широко использован в 90-х годах XIX столетия русским учёным, академиком Николаем Александровичем Морозовым. Первая его работа была издана в 1908 г. под названием «Основы качественного физико-математического анализа». В предисловии Николай Александрович пишет: “Качественный физико – математический анализ есть новый метод научного исследования.”

Анализ размерностей применяется в физике еще со времен Ньютона. Именно Ньютон сформулировал тесно связанный с методом размерностей, а именно критерий подобия механического движения, который получается из уравнения, выражающего второй закон Ньютона, и называется числом Ньютона: $Ne = \frac{F\,t^2}{m\,l}$ [1]

Целью данной работы является подготовка материала на тему анализа размерностей и подобия. Рассмотрены некоторые примеры из разных областей физики, которые могут послужить основой для составления учебно-методического пособия для школьников, абитуриентов и студентов первых курсов.

Актуальность и достоинства данного метода. При решении задач можно быстро произвести оценку масштабов исследуемых явлений, получить функциональные зависимости, а также восстановить забытые формулы и осуществить проверку правильности решения. Конечно же следует помнить, что данный метод не позволяет определить численные значения постоянных безразмерных коэффициентов в уравнениях.

Глава 1. Необходимые сведения из теории размерности и подобия

1. Выражение единиц измерения произвольной физической величины через единицы измерения величин, принятых за основные (первичные), называются размерностью;

2. Размерность любой физической величины представляет собой произведение возведенных в степень размерностей величин, принятых за основные;
3. Две или несколько физических систем называются подобными, если по заданным характеристикам одной можно получить характеристики других простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой;
4. Безразмерные комплексы размерных величин, представляющие собой произведение различных степенейэтих величин, называются критериями подобия. Их как правило обозначают буквой π, а само условие подобия выражают так: π_k = idem

1.1 π – теорема

Основополагающая теорема анализа размерностей. Теорема утверждает, что если имеется физически значимое выражение, включающее в себя n физических переменных, и эти переменные описываются при помощи k независимых фундаментальных физических величин, то исходное выражение эквивалентно выражению, включающему множество из p = n - k безразмерных величин, построенных из исходных переменных. Это позволяет вычислять множество безразмерных величин по данным физическим значениям, даже если неизвестно выражение, связывающее эти значения. Способ выбора множества безразмерных параметров не единственный: π-теорема демонстрирует, как это можно сделать, но не позволяет определить, являются ли полученные параметры наиболее «физически значимыми» .

1.2 Дополнение Хантли и его использование

В некоторых случаях при решении задач оказывается полезным дополнение Хантли (например, [2],[3]). Если рассматривается масштаб некоторой векторной величины, то в качестве размерностей можно использовать ее отдельные компоненты, если они раздельно входят в переменные величины, характеризующие рассматриваемую задачу. Чаще всего это положение можно реализовать в отношении координат. Действительно, в задаче могут фигурировать процессы, масштаб которых различен в зависимости от пространственной координаты, вдоль которой протекает процесс.

В качестве примера рассмотрим задачу о камне. Пусть под углом α к поверхности брошен камень со скоростью v_0. Под действием силы тяжести камень упадет обратно на поверхность на некотором расстоянии от точки бросания. На каком расстоянии упадёт камень?

Выбрав в качестве определяющих величин скорость, ускорение свободного падения и угол, мы не сможем получить однозначное решение. Однако, дополнение Хантли позволяет разложить вектор скорости на две компоненты и определить единственное решение с точностью до константы.

$$v_{0y} = v_0 sin\alpha, v_{0x} = v_0 cos\alpha \quad (1)$$

	v_{0x}	v_{0y}	g	l
L_x	1	0	0	1
L_y	0	1	1	0
T	-1	-1	-2	0

Таблица 1.

$$l = const\ v_{0x}^{k_1}\, v_{0y}^{k_2}\, g^{k^3} \quad (2)$$

$$T^0 L_y^0 L_x = (L_x T^{-1})^{k_1} (L_y T^{-1})^{k_2} (L_y T^{-2})^{k_3} \quad (3)$$

$$l = (const)\ \frac{v_0^2}{g}\ sin2\alpha \quad (4)$$

1.3 Подобие среди явлений и моделей

Исследования процессов с целью получения уравнений возможно проводить чисто теоретическим путем на основе общих законов физики и химии. Это наиболее желательный путь исследования процесса, конечным итогом которого является решение уравнений, полностью описывающих процессы.

Основное правило моделирования - моделирование физических процессов одноименные характеристики реального объекта и модели должны отличаться друг от друга постоянным множителем - быть подобными.

Простейшим аналогом такого условия является геометрическое подобие, например, подобие треугольников, при котором стороны треугольников отличаются одна от другой по длине соответственно в n раз: $\frac{\mathrm{AB}}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = n.$

1. В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Требуется вывести правила моделирования установившегося движения надводного корабля хорошо обегаемой формы на больших скоростях.

Значимыми оказываются следующие параметры: U – скорость корабля,

l – длина корабля, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения (для учета силы тяжести). Тогда указанные величины должны быть связаны некоторым функциональным соотношением

$$U = f(l, \rho, g) \qquad (5)$$

или

$$U = \Pi_1\, l^{\alpha} \rho^{\beta} g^{\gamma}$$

Матрицу размерностей в данном случае составить не составляет труда:

	U	F	l	ρ	g
L	1	1	1	-3	1
M	0	1	0	1	0
T	-1	-2	0	0	-2

Таблица 2.

Первый критерий подобия $\Pi_1 = U / (l\ g)^{½}$ (28) назван числом Фруда.

Для соблюдения динамического подобия $U^P = U^M (l^P / l^M)^{½}$, где U^P и U^M – скорости корабля и его модели, а l^P и l^M – размеры корабля и его модели, соответственно.

Чтобы оценить силу сопротивления F с размерностью LMT^{-2}, можно составить второй критерий из величин *F, l, ρ* и *g*. В результате аналогичной процедуры, окажется, что $\Pi_2 = F / (l^3\ \rho\ g)$. Тогда сила сопротивления для прототипа F^P и сила сопротивления для модели F^M связаны через подобие геометрических размеров, как $F^P = F^M (l^P / l^M)^3$.

1.4 Задачи механики

2. При атомном взрыве в области настолько малой, что ее можно считать точкой, мгновенно выделяется значительная энергия E. От центра взрыва распространяется ударная волна, давление за которой составляет сотни тысяч атмосфер.

Радиус ударной волны через промежуток времени t после взрыва зависит от E, t и начальной плотности воздуха:

$$r_f = f(E, t, \rho_0) \tag{6}$$

	r_f	E	t	ρ_0
L	1	2	0	-3
M	0	1	0	1
T	0	-2	1	0

Таблица 3.

После составления матрицы и решения соответствующей системы можно прийти к окончательному ответу:

$$\boxed{r_f = C\,E^{1/5} t^{2/5} \rho_0^{-1/5}} \tag{7}$$

3. Задача о теле брошенном вертикально вверх.

Пусть тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найти зависимость максимальной высоты подъёма от начальных параметров. Сопротивление атмосферы не учитывается.

4. Задача о прогибе балки.

Как зависит жёсткость балки от её размеров и других величин. Уравнение упругости – частный случай уравнения обычной механики. Решение должно включать в себя постоянные упругости материала. Если материал изотропный, то войдут две постоянные упругости, каковыми можно выбрать модуль Юнга и модуль сдвига.

5. Расчёт давления в центре звезды.

Состояние вещества при очень высоких температурах и плотностях реально имеет место в звёздах. К основным характеристикам звёзд относят их массу M_* и R_*. Давление P в центре звезды естественно будет зависеть от M_* и R_* и гравитационной постоянной G.

6. Как без вычислений найти закон, связывающий длину маятника и период колебаний. Рассмотрим тяжелую материальную точку массой m. Нить нерастяжима. Маятник выведен из состояния равновесия. φ_0 - максимальное отклонение от положения равновесия.

7. Задача о гравитационном поле. Почему в гравитационном поле нет геометрического подобия? Иными словами, почему короткий и длинный маятники колеблются по – разному?

1.5 Задачи термодинамики

8. Требуется получить зависимость для теплоотдачи на входном участке трубы. При передаче теплоты в канале конвективный перенос теплоты происходит вдоль продольной координаты L_1, а процесс теплопроводности – вдоль поперечной L_2. Коэффициент теплоотдачи α зависит от следующих величин: α = f (λ, a, x, w, d)

λ – теплопроводность; a – кинематическая вязкость; x – продольная координата; w – скорость потока; d – диаметр трубы.

Всего в зависимости фигурирует 6 параметров. Видно, что в размерности некоторых величин присутствуют единицы температуры [K], которые никак нельзя получить в системе LMT, поэтому возьмем [K] за основную единицу. Приведём (Таблицу 4.) размерностей указанных величин:

	α	λ	a	x	w	d
L_1	2	2	0	1	1	0
L_2	-2	-1	2	0	0	1
M	1	1	0	0	0	0
T	-2	-2	-1	0	-1	0
K	-1	-1	0	0	0	0

Составляем безразмерный комплекс из всех 6 величин, который должен быть константой: $\alpha^a \lambda^b a^c x^d w^e d^f = \text{const}$ (8)

В силу безразмерности комплекса суммарный показатель степени для каждой размерности должен быть равен нулю. В результате имеем:

$$d = \frac{1}{n}, c = \frac{1}{n}, e = \frac{-1}{n}, f = 1 - \frac{2}{n}; \tag{9}$$

Тогда можем записать:

$$\alpha \lambda^{-1} a^{1/n} x^{1/n} w^{-1/n} d^{1-2/n} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{\alpha d}{\lambda} = C \frac{w^{1/n} d^{2/n}}{a^{1/n} x^{1/n}} \tag{10}$$

В безразмерной форме данное уравнение запишется так:

$$\text{Nu} = C\,(\text{Pe}\; d/x)^{1/n} \tag{11}$$

Однако обычно считают, что до начала обогрева имеется адиабатический участок, на котором формируется установившийся профиль скорости. Поэтому в данном случае формирование профиля температуры должно протекать медленнее. Считается, что для этого случая $n = 3$.

1.6 Задачи гидродинамики

9. Определите силу сопротивления, действующую на каждый из двух круговых дисков радиусом R, которые сближаются друг с другом вдоль оси симметрии с постоянной скоростью u, а щель между дисками и окружающее их пространство заполнено несжимаемой вязкой жидкостью. Давление в окружающей жидкости, равна P_*.

Поток жидкости в зазоре является осесимметричным. Поэтому мы используем цилиндрические координаты z, r, φ с началом в центре нижнего диска, который считается неподвижным (z и r соответствуют вертикальному и радиальному направлениям соответственно). Рассмотрим случай с низкой скоростью, когда инерционные эффекты незначительны. Эффект силы тяжести также будем пренебрегать. Тогда можно предположить, что градиент давления $\Delta P/r$ $(\Delta P = P - P_*)$ определяется скоростью верхнего диска u, вязкостью жидкости μ, мгновенной высотой зазора h и радиальным положением r.

$$\frac{\Delta P}{r} = f(u, \mu, h, r) \tag{12}$$

Таблица 5.

	u	μ	h	r	$\frac{\Delta P}{r}$
L_z	1	1	1	0	-1
L_r	0	-2	0	1	-1
M	0	1	0	0	1
T	-1	-1	0	0	-2

Для анализа проблемы используется система единиц с двумя масшатабами длины (L_z; L_r). Три из четырех управляющих параметров в (12) имеют независимые размерности. Выбрав u, μ, и r как основные единицы, (12) согласно π - теореме сводим к следующему виду:

$$\frac{\Delta P}{r} = cu^{\alpha_1}\mu^{\alpha_2}h^{\alpha_3}r^{\alpha_4} \tag{13}$$

Где c - безразмерная константа. Определяя значения показателей α_i, используя принцип размерности однородность как α_i используя принцип размерной однородности как $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -3$ и $\alpha_4 = 1$, получаем:

$$\frac{\Delta P}{r} = cu\mu\frac{r}{h^3} \tag{14}$$

Тогда подстановка дает:

$$F_d = \frac{c}{2}\pi u\mu R\left(\frac{R}{h}\right)^3 \tag{15}$$

1.7 Задачи электроники

10. Перейдём теперь к задачам из электроники. Начнём с вывода формул для вольтамперных характеристик цилиндрического диода с коаксиальным тонким катодом в виде нити и плоского диода.

Основные допущения: 1) около катода цилиндрического диода с радиусом анода r имеется достаточное количество электронов; 2) кроме упорядоченного движения под действием анодного напряжения V_a, электроны участвуют в хаотическом тепловом движении, которое характеризуется параметром $\theta = kT$, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура катода; j – анодный ток, приходящийся на единицу длины катода; e – заряд электрона; m_e – масса электрона.

Поскольку речь идёт об исследовании вольт-амперной характеристики диода, естественно записать искомую зависимость между размерными величинами в виде: $$j = f\left(e, m_e, r_0, V_a, \theta\right) \quad (16)$$

Учтем то, что эмиттером с очень большой эмиссионной способностью служит термоэлектронный катод, с которого можно получать токи высокой плотности. Тогда вблизи такого катода образуется область, заполненная электронами, создающими пространственный заряд большой плотности. Этот заряд может существенно изменять распределение электронов между электродами и влиять на количество электронов, покидающих катод. Электроны, вылетающие из термокатода, имеют максвелловское распределение скоростей с функцией распределения: $f_0(v) = \frac{j_e}{e}\frac{m}{kT} * e^{\frac{-m\ ^2}{2kT}}$ (17)

Рассмотрим плоский диод с расстоянием D между катодом и анадом. Будем считать, что потенциальный минимум совмещен с катодом. Введем среднюю скорость электронов, с которой они покидают катод:

$\acute{\omega} = \frac{\int_0^\infty v^2 f_0(v)dv}{\int_0^\infty v f(v)dv}$; где $f_0(v)$ – характеризует распределение сокростей (18)

$$\mathrm{j} = \mathrm{f}\left(\frac{e}{m}, v_a, D, \acute{\omega}\right) \quad (19)$$

Таблица 6.

	e/m	v_a	D	$\acute{\omega}$	j
L	3/2	1/2	1	1	-1/2
M	-1/2	1/2	0	0	1/2
T	-1	-1	0	-1	-2

Выберем в качестве новых единиц с независимыми размерностями e/m, D, v_a. Выбранные новые единицы определяют характерные масштабы задачи: D – характерный масштаб длины, $\left[2\left(\frac{e}{m}\right)v_a\right]^{1/2}$ - характерный масштаб скорости. Мы можем поделить j и ώ на произведение e/m, D и v_a в соответствующих степенях, можно составить два критерия подобия:

$$\pi = \frac{j}{(\frac{e}{m})^{\alpha}\, V_a{}^{\beta}\, D^{\gamma}}\ , \quad \pi_1 = \frac{\acute{\omega}}{(\frac{e}{m})^{\alpha 1}\, V_a{}^{\beta 1}\, D^{\gamma 1}}$$

где α, β, γ, α_1, β_1, $\gamma 1$ - безразмерные постоянные. Используя матрицу размерности и то, что критерии подобия - -величины с нулевой размерностью, получаем уравнени для показателей степеней и следовательно можем записать:

$$\pi = \frac{j\, D^2}{(\frac{e}{m})^{1/2}\, V_a{}^{3/2}}\ , \quad \pi_1 = \frac{\acute{\omega}}{(\frac{e}{m}\, V_a)^{1/2}} \tag{20}$$

Применяя п-теорему:

$$j = \frac{(\frac{e}{m})^{1/2} V_a{}^{3/2}}{D^2}\, f\left(\frac{\acute{\omega}}{(\frac{e}{m}\, V_a)^{1/2}}\right) \tag{21}$$

Если теперь перейти к критериям подобия (97) и отбросить критерий $\pi_2 = \sqrt{\frac{\theta}{(\frac{e^2}{D})}}$ несущественный для анализируемой задачи, то можно вновь прийти к формуле (21), считая что ώ вычислена при максвеловском распределении на катоде.

Приведём в пример еще несколько несложных задач из раздела «*Электричество и магнетизм*», которые также удобно решать с использованием метода размерностей.

11. Задача о напряжённости поля. Электрическое поле создано зарядом, равномерно распределённым вдоль прямой АВ. Пусть напряжённость поля в точке S равна Е. Найти зависимость напряжённости поля Е от r.

τ - линейная плотность заряда, r – расстояние от плоскости.

12. Задача об электроёмкости. Проводник имеет форму куба со стороной а. Исследовать зависимость электроёмкости куба от длины его ребра.

ε_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума.

Исходная зависимость: $C = f(\varepsilon_0, a)$

	C	ε_0	a
L	-2	-3	1
M	-1	-1	0

Таблица 7.

T	4	4	0
I	2	2	0

$C = k\,\varepsilon_0^{\alpha} a^{\beta} \quad \alpha = \beta = 1$

13. Задача о соленоиде. По бесконечно длинному соленоиду радиуса R протекает ток I. Пусть H обозначает напряжённость магнитного поля на оси соленоида. Исследовать зависимость H от R и I. (n – количество витков)

Заключение

Была произведена попытка подбора материала, который может быть полезен при решении задач из разных областей физики (механики, гидродинамики, термодинамики и электроники) с применением анализа размерностей и теории подобия.

Приведены решения некоторых примеров, включающие обоснование выбранных основных величин, таблицы размерностей и различные способы получения критериев.

Собранный материал может послужить основой для составления учебного – методического пособия для школьников, абитуриентов и студентов младших курсов.

Список используемой литературы

1.Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — 7 изд. — М., 1972;

2. http://nizrp.narod.ru/teplomass2.pdf

3. С.С. Кутателадзе. Анализ подобия и физические модели. – Новосибирск: Изд-во «Наука», 1986. С.296; P-theorem