Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Геометрия пространств над p–кольцами

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Ройской Евгении Сергеевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________ В. Б. Поплавский

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________ В. В. Розен

Саратов 2018

Введение. Бурное развитие теории алгебр над решетками, в особенности полуколец и так называемых p–колец, порождаемых булевыми кольцами, в последнее время тесно связано с их приложениями в различных областях научного познания. Они применяются и в медицине при решении проблем диагностики, в генетике, социальных науках, экономике, а также в кибернетике, теории вычислимости и определения сложности вычислений. Очевидна также их связь с такими математическими теориями как полугруппы, полумодули, комбинаторика, теория конечных недетерминированных автоматов. Многие дискретные модели, возникающие в технике, физике, химии и геологии, построены с помощью таких алгебр. Булевы алгебры и булевы кольца применимы и в теории графов. Очевидна также их связь с математической логикой и бинарными отношениями [1][2][3][4]. Все это подтверждает актуальность представленной темы квалификационной работы.

В данной работе рассматривается p–кольца, которые при $p = 2$ являются известным понятием булева кольца, и обобщающих это понятие для любого простого числа p. Главным образом работа посвящена изучению 3-кольца, которое представляет собой «плоскость», точки которой представлены упорядоченными парами попарно ортогональных элементов некоторой булевой алгебры. Устанавливается, что в случае 3-колец может быть введена булевозначная функция расстояния между парами точек 3-кольца. Эта функция, как следует из общей теории булевых функций, определяется единственным образом. Это позволяет говорить о геометрии p–колец. Естественным образом появляется понятие окружности в плоскости p–кольца. В работе вводится функция площади на фигурах в 3-кольце, как булева функция с тремя аргументами, то есть определенной на тройке точек из 3-кольца. Это делается по аналогии с определением площади параллелограмма в евклидовой координатной плоскости, заданного тремя своими вершинами. С помощью функции площади далее вводятся понятия линий и окружности.

[1] Monk, J. D. Handbook of Boolean algebras / J. D. Monk, R. Bonnet. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1989. 1367 p.

[2] Сикорский, Р. Булевы алгебры / Р. Сикорский. М. : Изд-во Мир, 1969. 375 с.

[3] Halmos, P. R. Lectures on Boolean algebras / P. R. Halmos // N. J. : Van Nostrand math. stud., 1963. 147 p.

[4] Heindorf, L. Beiträge zur Modelltheorie der Booleschen Algebren / L. Heindorf // Seminarbericht No. 53, Sektion Math. der Humboldt-Univ., Berlin, 1984.

Основной объект изучения данной магистерской работы - геометрия на p-кольцах был введен Фостером [5], Земмером [6] и Бэтбедатом [7].

В данной магистерской работе изучаются свойства функций расстояний и площадей фигур. Получены конкретные формулы для их вычисления. Приведены примеры вычислений.

Структура работы. Работа состоит из введения, четырех глав, содержащих 14 параграфов и заключения. В конце приводится список литературы, состоящий из 22 наименований.

Главной задачей работы является доказательство структурной теоремы для p–колец, введение основных метрических функций на плоскости 3-кольца, вычисления этих функций в случае, когда p–кольцо определяется 8-элементной булевой алгеброй.

Главные результаты, выносимые на защиту.

1. Классификация p–колец. Приводится подробное доказательство основной структурной теоремы Фостера-Земмера.

2. Представление 3-кольца над различными булевыми алгебрами.

3. Изучены основные элементы теории булевых функций. Приводится доказательство теоремы Мюллера–Левенхейма об определимости булевых функций.

4. Введение метрики в плоскости p–кольца. В качестве примеров приводятся вычисления расстояний между точками в плоскости 3-кольца над 4-х и 8-и элементными булевыми алгебрами. Главный результат: расстояния между точками таких 3-колец равны единице соответствующей булевой алгебры.

5. Главным результатом изучения свойств прямых и окружностей в метрической плоскости 3-кольца является следующая теорема:

Теорема 4.8. Следующие условия эквиваленты для подмножества $L \subseteq R_3$:

1. L – линия;
2. L является слабой линией, для которой любая пара источников P, Q удовлетворяет условию $d(P, Q) = 1$;

---

[5] Foster, A. L. P–rings and their Boolean-vector representation / A. L. Foster // Acta Math. 1951. Vol. 84. P. 231-261.

[6] Zemmer, J. L. Some remarks on p-rings and their Boolean geometry / J. L. Zemmer // Pacific J. Math. 1956. Vol. 6, No. 1. P. 193-208.

[7] Batbedat, A. Distance booleenne sur un 3-anneau / A. Batbedat // L'Enseign. Math. 1971. 11e Ser. 17. P. 165-185.

3. L является и слабой линией и окружностью;
4. L является и слабой линией и окружностью радиуса 1;
5. L содержит две точки P и Q, такие что $d(P,Q) = 1$ и является максимальной с тем свойством, что $\alpha(X,Y,Z) = 0$ для любых $X, Y, Z \in L$;
6. L – булево подмножество R_3, максимальное со свойством $\alpha(X,Y,Z) = 0$ для любых $X, Y, Z \in L$;
7. L есть множество решений уравнений вида: $ax_1 + bx_2 = ab$, где a, b константы из B, удовлетворяющие следующему условию: $a \cup b = 1$.

Основное содержание работы. В 1-ой главе вводятся такие понятия, как булева алгебра, булевы функции n переменных, а также простые булевы функции. В конце данной главы представлены канонические формы булевой функции, а именно каноническая дизъюнктивная и конъюнктивная формы.

2-ая глава посвящена булевым кольцам. Вводится определение p-кольца, рассматривается структурная теорема Фостера-Земмера о представлении p-колец.

Определение 2.4. *p–кольцом* называется коммутативное кольцо с единицей, в котором для всех элементов x выполняются следующие условия: $x^p = x$, $px = 0$.

Заметим, что x^{p-1} есть идемпотент: $x^{p-1} \cdot x^{p-1} = x^p \cdot x^{p-2} = x \cdot x^{p-2} = x^{p-1}$.

Теорема 2.2. Обозначим через B булево кольцо, p – простое фиксированное число, R^* – множество всех наборов (последовательностей) из $p-1$ попарно ортогональных элементов из B. Тогда сложение и умножение элементов из R^* определяются следующим образом:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}) + (b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}) = (c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}),$$

где $c_i = \sum_{j=0}^{p-1} a_j b_{i-j}$, $a_0 = 1 + \sum_{j=1}^{p-1} a_j$, $b_0 = 1 + \sum_{j=1}^{p-1} b_j$, i, j – целые числа, не превосходящие $\mod p$,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})(b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}) = (d_1, d_2, \ldots, d_{p-1}),$$

где $d_i = \sum_{j=1}^{p-1} a_j b_{j^{-1}i}$, j^{-1} – наименьшее целое число по $\mod p$, такое что $jx \equiv 1 \mod p$, тогда R^* является p–кольцом, у которого булево кольцо идемпотентов изоморфному кольцу B.

Кроме того, каждое p–кольцо будет изоморфно p–кольцу такого типа.

Следствием из теоремы является то, что любой элемент p–кольца это вектор, компоненты которого являются ортогональные элементы булевой алгебры, мы получаем векторную алгебру, только координатами являются элементы булевой решетки.

Следствие 2.3. Каждый элемент, принадлежащий p–кольцу может быть представлен в виде $a = a_1 + 2a_2 + \cdots + (p-1)a_{p-1}$, где $2, \ldots, p-1$ представляют собой последовательные слагаемые 1 (например, 2=1+1), a_i попарно ортогональные идемпотентны.

Далее определяется 3-кольцо следующим образом:

Пусть $R_3 = \{X = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in B, x_1x_2 = 0\}$, где $\langle B, \cup, \cdot, ', 0, 1\rangle$ это булева алгебра есть множество, в котором определим операции следующим образом:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2, x_2 + y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_1),$$
$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1 + x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

где $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ элементы B^2 компоненты, которых ортогональны [14].

Теорема 2.5. R_3 есть 3-кольцо.

3-ья глава посвящена метрическим отношениям на p-кольце.

Определение 2.7. *Булево подмножество* $B^2(R_3)$ есть подмножество $S \subset B^2(R_3)$, характеризующееся уравнением вида: $f(X) = 0$, где f это булева функция или булево-значный многочлен.

Вводится понятие функции расстояния:

Определение 3.1. Булевозначная функция $d : S^2 \to B$ называется *функцией расстояния* пространства S, которая удовлетворяет следующим аксиомам для всех $X, Y, Z \in S$:

[14] Rudeanu, S. Lattice functions and equation / S. Rudeanu. L., N. Y. : Springer, 2001. 435 p.

$D1.\ d(X,Y)=0 \ \Leftrightarrow \ X=Y;$

$D2.\ d(X,Y)=d(Y,X);$

$D3.\ d(X,Y)\leqslant d(X,Z)+d(Z,Y).$

Теорема 3.1. Для булевой функции $d: B^4 \to B$ (простому булево-значному многочлену $d: R_3^2 \to B$) нижеприведенные условия эквивалентны:

1. d удовлетворяет $(D1)$;
2. d удовлетворяет$(D1)-(D3)$;
3. d есть функция

$$d(X,Y)=(x_1+y_1)\cup(x_2+y_2) \tag{1}$$

С помощью вышеприведенной теоремы установлено, что в случае пространства R_3 расстояние (1) может быть записано следующим единственным образом:

$$d(X,Y)=x_1+x_2+y_1+y_2+x_1y_2+x_2y_1.$$

Лемма 3.3. Расстояние между двумя различными элементарными векторами A,B из 3-кольца над булевыми алгебрами 2^2 и 2^3, то есть $R_3(B_2^2)$ и $R_3(B_2^3)$ есть 1.

Доказательство данного факта сопровождается примером для булевой алгебры 2^3.

Далее приводится понятие функции площади, с помощью которой устанавливается, что в случае пространства R_3, площадь может иметь следующий вид: $\alpha(X,Y,Z)=y_1z_2+y_2z_1+x_1z_2+x_2z_1+x_1y_2+x_2y_1$ или

$$\alpha(X,Y,Z)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Данная формула показывает аналогию с площадью параллелограмма в случае аналитической евклидовой геометрии. Доказательство данного факта сопровождается вычислением площадей в плоскости 3-кольца над булевой алгеброй 2^3.

Определение 3.2. Даны 3 точки $X, Y, Z \in S$, положим $d(Y, Z) = d_1$, $d(X, Z) = d_2, d(X, Y) = d_3$. Функция $\alpha : S^3 \to B$ называется *функцией площади* пространства S, при условии существования булевой функции $a : S^3 \to B$, удовлетворяющая нижеприведенным условиям [21]:

$A1.$ $\alpha(X, Y, Z) = a(d_1, d_2, d_3)$ для любых $X, Y, Z \in S$;

$A2.$ $a(0, d_2, d_3) = a(d_1, 0, d_3) = a(d_1, d_2, 0) = 0$;

$A3.$ a симметрична в d_1, d_2, d_3;

$A4.$ $a(1, 1, 1) = 1$.

Заметим, что для любого $k \in B$ существует $X, Y \in S$ такие, что $d(X, Y) = k$, полагаем $X = (k, 0)$ и $Y = (0, 0)$, поэтому $a(d_1, d_2, d_3)$ в действительности определена на B^3. Отметим также, что $(A1)$ влечет за собой следующее свойство:

$$d(X_i, X_j) = d(Y_i, Y_j), \;\; i, j = 1, 2, 3 \Rightarrow \alpha(X_1, X_2, X_3) = \alpha(Y_1, Y_2, Y_3).$$

Лемма 3.5. Для каждой точки $X, Y, Z \in S$ выполняется следующее условие:

$$d_1 d_2 d_3 = d_1 + d_2 + d_3.$$

Теорема 3.6. Следующие условия эквивалентны для булевой функции $\alpha : S^6 \to B$ (для булево-значного полинома $\alpha : R_3^3 \to B$):

1. α удовлетворяет $(A1) - (A4)$;
2. α удовлетворяет $(A1)$, $(A2)$ и $(A4)$;
3. α удовлетворяет $(A1)$ и функция a, ассоциированная с α имеет следующий вид: $a(d_1, d_2, d_3) = d_1 d_2 d_3$;
4. α удовлетворяет $(A1)$ и функция a, ассоциированная с α есть

$$a(d_1, d_2, d_3) = d_1 + d_2 + d_3. \tag{2}$$

[21] Melter, R. A. Geometry of 3–rings / R. A. Melter, S. Rudeanu // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. 1974. Vol. 14. P. 249-269.

Замечание 3.7. Функция (2) может быть записана в следующем виде: $\alpha(X,Y,Z) = [(y_1+z_1)\cup(y_2+z_2)] + [(x_1+z_1)\cup(y_2+z_2)] + [(x_1+y_1)\cup(x_2+y_2)]$ или, что тоже самое

$$\alpha(X,Y,Z) = (y_1+z_1)(y_2+z_2) + (x_1+z_1)(x_2+z_2) + (x_1+y_1)(x_2+y_2).$$

4-ая глава посвящена линейной геометрии в плоскости 3-кольца.

Определение 4.1. Пусть P, Q – точки из R_3. *Слабая линия*, проходящая через P и Q есть множество $l(P,Q) = \{X \in R_3 | \alpha(P,Q,X) = 0\}$, в то время как, точки P и Q говорят *порождают* (пара источников) линию $l(P,Q)$.

Следующее предложение характеризует слабые линии, как булевы подмножества R_3.

Предложение 4.1. Подмножество пространства R_3 есть слабая линия тогда и только тогда, когда оно есть множество решений уравнений вида

$$ax_1 + bx_2 = ab \text{ для некоторых } a, b \in B. \tag{3}$$

Точки P, Q слабой линии (3) порождают ее тогда и только тогда, когда

$$p_1 + q_1 = b \text{ и } p_2 + q_2 = a.$$

Предложение 4.4. Любые две слабые линии

$$ax_1 + bx_2 = ab,$$
$$fx_1 + gx_2 = fg,$$

соприкасаются по крайней мере в одной точке, они имеют единственную точку соприкосновения, тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix} = 1.$

Далее представлены точки из 3-кольца, которые образуют слабую линию.

Введем аналог понятия окружности, которое будет служить предпосылкой для более веского понятия линии.

Определение 4.2. Дана точка $C \in R_3$ и элемент $r \in B$, *окружность с центром* C *и радиуса* r есть множество $C(r) = \{X_3 \in R | d(C, X) = r\}$.

Предложение 4.5. Подмножество пространства R_3 является окружностью тогда и только тогда, когда оно является множеством решений уравнений вида: $ax_1 + bx_2 = c$, где a, b - константы из B, удовлетворяющие $a \cup b = 1$. Единственным центром окружности является точка (b', a') и радиус имеет вид $r = a + b + c$.

Следствие 4.6. Для каждых $C \in R$ и $r \in R_3$, окружность $C(r)$ не является пустым множеством и ее уравнение (3) определено однозначно.

Предложение 4.7. Если точки X, Y, Z располагаются на окружности, тогда $\alpha(X, Y, Z) = 0$.

Определение 4.3. *Линия* пространства R_3 есть слабая линия, которая имеет пару источников P, Q, таких что $d(P, Q) = 1$.

Теорема 4.8. Следующие условия эквиваленты для подмножества $L \subseteq R_3$:

1. L – линия;
2. L является слабой линией, для которой любая пара источников P, Q удовлетворяет условию $d(P, Q) = 1$;
3. L является и слабой линией и окружностью;
4. L является и слабой линией и окружностью радиуса 1;
5. L содержит две точки P и Q, такие что $d(P, Q) = 1$ и является максимальной с тем свойством, что $\alpha(X, Y, Z) = 0$ для любых $X, Y, Z \in L$;
6. L – булево подмножество R_3, максимальное со свойством $\alpha(X, Y, Z) = 0$ для любых $X, Y, Z \in L$;
7. L есть множество решений уравнений вида: $ax_1 + bx_2 = ab$, где a, b константы из B, удовлетворяющие следующему условию: $a \cup b = 1$.

Заключение. В данной работе была изучена геометрия пространства являющуюся p–кольцом, частности, рассмотрен случай когда $p = 3$. Было найдено представление элементов этого p–кольца, в виде попарно ортогональных элементов некоторой булевой алгебры (доказана теорема Фостера-Земмера). Рассмотрены такие понятия, как функция расстояния, функция площади, а так же были рассмотрены такие элементы линейной алгебры 3-кольца, как линия, окружность. Особое внимание было уделено 3-кольцу, порожденному 8-элементной булевой алгеброй. Для него были просчитаны все функции расстояний, функции площадей, найдены линии и окружности. Это новые и главные результаты данной магистерской работы.