Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Параметрический метод в теории однолистных функций

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

Механико-математический факультет

Коробчук Анфисы Вячеславовны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________________ А. М. Захаров
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н ., профессор ____________________ Д. В. Прохоров
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2018 год

Введение.Геометрическая ТФКП считается важной и содержательной частью математического анализа. Она изучает аналитические функции, определяемые каким-либо геометрическим свойством, а такие геометрические свойства классов аналитических функций.

Большой вклад в развитие зарождавшейся теории сделал К. Каратеодори. Он доказал теорему о сходимости областей к ядру.

В 1923 году К. Левнер представил параметрический способ, получив с помощью утверждения Каратеодори о сходимости семейства областей к ядру ДУ для семейства функций, сходящегося к данной однолистной функции. Параметрическим методом удалось получить ряд точных оценок, а в многих других случаях, проинтегрировав уравнение Левнера, найти экстремальные функции. Метод продолжения по параметру применяли в своих работах Г.М. Голузин, И.Е. Базилевич, П.П. Куфарев, И.А. Александров, М.Р. Куваев, В.И.Попов, В.Я. Гутлянский и другие. С разными подходами к обоснованию и многочисленными применениями этого метода можно ознакомиться по монографиям Г.М. Голузина, В.К. Хеймана, И.А. Александрова.

Основной мотив магистерской работы почеркнут из монографии И.А. Александрова.

Магистерская работа состоит из введения, четырех глав, 1-ая глава разбита на четыре параграфа, 2-ая глава разбита на шесть параграфов, 3-ья глава состоит из пяти параграфов, 4-ая глава разбита на пять параграфов, заключения и списка использованных источников. В работе содержатся рисунки.

В 1-ой главе мы введем в рассмотрение ядро последовательности областей $\{B_n\}$ и продемонстрируем на примере сходимость последовательности областей к ядру относительно точки ω_0, а также введем теорему о сходимости последовательности областей к ядру.

Во 2-ой главе выясним, что из себя представляет семейство областей Левнера.

Пусть $\Delta(\lambda)$ семейство областей Левнера и

$$\Delta(\lambda) = \Delta \backslash \bigcup_{k=1}^{n} (L_k \backslash L_k(\lambda_k)),$$

где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$- любая точка полузамкнутого n- мерного параллелепипеда $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} : \quad 0 \le \lambda_k \le \lambda_k^0, k = 1, ..., n.$

Докажем теорему о дифференцируемости отображений по параметру.

В 3-ей главе, мы изучим параметрические продолжения в теории однолистных функций.

Введем в рассмотрение уравнение Левнера для полуплоскости.

Далее, рассмотрим классы голоморфных однолистных функций H, а также классы $\widetilde{H}, H_L, H_L^r$. И извлекем оценки кривизны линий уровня и их ортогональные траектории на классе H

$$|K^*(f)| \le \frac{1}{Imz}(\frac{Imf(z)}{Imz} - \frac{Imz}{Imf(z)}), \quad z = x + iy,$$

где K непосредственно может принимать любое из следующих значений

$$K(f, y) = \frac{1}{|f'(z)|} Im \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad Imz = y,$$

$$K^*(f, z) = \frac{1}{|f'(z)|} Re \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad Rez = x.$$

В 4-ой главе во внимание экстремальные свойства классов H_L, H_L^r и их подклассов.

В данной главе мы изучим множества значений коэффициентов разложения функций $f(z) = z + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + ...$ классов H_L, H_L^r.

Докажем теорему о взаимном росте $\{f_1\}$ и других коэффициентов на H_L^r и рассмотрим на рисунках.

В заключении этой главы покажем, что фиксирование величины $c_1 = \{f\}_1$ у функций $f(z)$ класса H_1 оказывает ограничивающее влияние также на рост некоторых функционалов, характеризующих поведение $f(z)$ внутри области определения.

Основное содержание работы.Пусть дана некая плоскость $\overline{C_\omega}$, на которой отмечена точка ω_0 и задана последовательность произвольных областей B_n, где $n = 1, 2, ...$ Предположим, что всем областям B_n, где $n = 1, 2, ...,$ за исключением разве лишь их конечного числа, принадлежит некая окрестность точки ω_0, то есть круг

$$\{\omega : |\omega - \omega_0| < \rho\}, \rho > 0,$$

если ω_0-конечная точка, и область $\{\omega : |\omega| > R\}, R > 0$, если $\omega_0 = \infty$.

Определение. *Ядром последовательности $\{B_n\}$ относительно точки ω_0 называют область B, удовлетворяющую следующим трём условиям:*

1) $B \ni \omega_0$;
2) всякое замкнутое множество из B принадлежит всем областям B_n, начиная с некоторого номера (то есть, каково бы ни было замкнутое множество $\epsilon \subset B$, найдется натуральное число $N = N(\epsilon)$ такое, что $B_n \supset \epsilon$ при $n > N$);
3) любая область B, для которой будут выполняться условия 1 и 2, принадлежит области B.

Назовем *центром ядра* точку ω_0, по отношению к которой рассматривается ядро.

Центром ядра последовательности $\{B_n\}$ может быть каждая точка, принадлежащая всем B_n, где $n = 1, 2, ...$ начиная с некоторого номера, и только такая точка.

Определение. *Говорят, что последовательность $\{B_n\}$ сходится к ядру B относительно точки ω_0, если любая подпоследовательность последовательности $\{B_n\}$ имеет ядро относительно точки ω_0 также область B, и в таком случае пишут: $\{B_n\} \to Ker_{\omega=\omega_0}\{B_n\}$.*

Теорема 1.1. *Всякая стягивающая к области B последовательность $\{B_n\}$ имеет своим ядром область B и сходится к ней как к ядру относительно любой фиксированной в B точки.*

Определение. *Классом S называют совокупность всех голоморфных однолистных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, нормированных условиями: $f(0) = 0, f'(0) = 1$.*

Теорема 1.2 (о сходимости последовательности областей к ядру). *Пусть*

1) $B_n (n = 1, 2, ...)$*-односвязная область в* $C_\omega, B_n \neq C_\omega$;
2) $\mathrm{B}_n \ni 0 (n = 1, 2, ...)$.

Обозначим через $\omega = f_n(z), f_n(0) = 0, f_n'(0) > 0$, *голоморфную однолистную в круге* E *функцию, отображающую* E *на* B_n.

Тогда следующие два условия эквивалентны:

1) *последовательность функций* $f_n(z)(n = 1, 2, ...)$ *равномерно сходится внутри* E *к конечной функции*;
2) *последовательность областей* $B_n(n = 1, 2, ...)$ *сходится к ядру относительно точки* $\omega = 0$, *отличному от* C_ω;

Кроме того,

3) *если* $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \equiv 0$, *то* $Ker\ \{B_n\} = \{0\}$;

3.1) *если* $f(z) \neq 0$, *то последовательность областей* $B_n(n = 1, 2, ...)$ *сходится к невырожденному ядру, являющемуся образом круга* E *при отображении* $\omega = f(z)$;

4) *если* $Ker\{B_n\} = \{0\}$, *то* $f(z) \equiv 0$;

4.1) *если* $Ker\{B_n\}$ *невырождено и не равно* C_ω, *то функция* $f(z)$ *голоморфна и однолистна в круге* E *и отображает его на ядро, причем* $f(0) = 0, f'(0) > 0$, *а функции* $\phi_n(\omega) = f_n^{-1}(\omega)$ *равномерно сходятся внутри ядра к функции* $\phi(\omega) = f^{-1}(\omega), \phi(0) = 0, \phi'(0) > 0$, *заданной в ядре.*

Определение. *Область* B *называется ядром семейства областей* $B(t), t \in T$, *при* $t = t_0$ *относительно точки* ω_0, *если выполнены следующие три условия.*

1) $B \ni \omega_0$;
2) каково бы ни было замкнутое множество ϵ из B, найдется любое положительное число $\varepsilon = \varepsilon(\epsilon)$, такое, что ϵ принадлежит всем $B(t)$ при $|t - t_0| < \varepsilon, t \in T, t \neq t_0$, если $t_0 \neq \infty$, и всем областям $B(t)$ при $\varepsilon < t < \infty$, если $t_0 = \infty$;
3) всякая область $\tilde{B}$, которая удовлетворяет условиям 1 и 2, принадлежит области B.

Определение. *Говорят, что семейство областей* $B(t)$ *сходится как к ядру области* B *при* $t = t_0$ *относительно точки* $\omega = \omega_0$, *если для любой последовательности* $\{B(t_n)\}$, *где* $t_n \in T(n = 1, 2, ...), t_n \neq t_0, \{t_n\} \to t_0$, *область B является ядром с центром ω_0, и в этом случае пишут:*

$$B(t) \to Ker_{\omega=\omega_0} B(t), t = t_0.$$

Теорема 1.3. *Пусть*

(1) $B(t), t \in T$- *односвязные области в* $\overline{G_\omega}, B(t) \neq C_\omega, t \in T$;

(2) $B(t) \ni 0, t \in T$.

Обозначим через $\omega = f(z,t), f(0,t) = 0, f'_z(0,t) > 0$, *голоморфную однолистную в единичном круге* E *при фиксированном* t *функцию, отображающую* E *на* $B(t)$.

Тогда условия а, б, в эквивалентны:

а) *функция* $f(z,t)$ *равномерно непрерывна относительно* z *внутри* E *по* t *при* $t = t_0, t_0 \in T$;

б) *семейство областей* $B(t)$ *сходится к ядру к области* $B(t_0)$ *при* $t = t_0$. *Кроме того,*

в) *функция*

$$\phi(\omega, t) = f^{-1}(\omega, t)$$

(здесь $f^{-1}(\omega,t)$ *- обратная функция к* $f(z,t)$ *при фиксированном* t*) равномерно непрерывна относительно* ω *внутри* $B(t_0)$ *по* t *при* $t = t_0$ *и* $\phi(\omega, t_0) = f^{-1}(\omega, t_0)$.

Лемма 1. *На каждом компакте, не содержащем точек* $\mu_k(\lambda'_k, \lambda')$ $(k = 1, ..., n)$, *функция* $\Phi(z, \lambda', \lambda'')$ *равномерно сходится к* z *при* $\lambda'' \to \lambda'$ *по* $\Lambda^+(\lambda')$.

Лемма 2. *Пусть* $\lambda' \in \Lambda$ *и фиксировано , а* $\lambda'' \to \lambda'$ *по* $\Lambda^+(\lambda')$.*Тогда дуга* $\Gamma_k(\lambda'_k, \lambda'')$ *стягивается в точку* $\mu_k(\lambda'_k, \lambda')$ *и* $\mu_k(\lambda''_k, \lambda'') \to \mu_k(\lambda'_k, \lambda')$ $(k = 1, ..., n)$.

Теорема 2.1. *Если существуют пределы*

$$\lim_{\tau'' \to \tau'} \delta_k(\tau', \tau'') = \delta_k(\tau'), \quad 0 \leq \tau' < \tau'' < \tau^0 \quad (k = 1, ..., n)$$

то функция $F(\omega,\tau)$ *равномерно внутри* $\Delta(\tau')$ *дифференцируема по* τ *при* $\tau=\tau'$ *справа и ее правосторонняя производная равна*

$$\frac{\partial F(\omega,\tau)}{\partial\tau}=-F(\omega,\tau')\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\tau')P(\overline{\mu_k(\tau')}F(\omega,\tau'))$$

Теорема 2.2. *Если существуют пределы*

$$\lim_{\tau'\to\tau''}\delta_k(\tau',\tau'')=\delta_k(\tau''-0),\quad 0<\tau'<\tau''<\tau^0\quad(k=1,...,n)$$

то функция $F(\omega,\tau)$ *равномерно внутри* $\Delta(\tau'')$ *дифференцируема по* τ *при* $\tau=\tau''$ *слева и ее левосторонняя производная равна*

$$\frac{\partial F(\omega,\tau)}{\partial\tau}=-F(\omega,\tau'')\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\tau''-0)P(\overline{\mu_k(\tau''-0)}F(\omega,\tau'')).$$

В тех точках, где все $\phi_k(\tau)\quad(k=1,..,n)$ *непрерывны,* $\delta_k(\tau)=\delta_k(\tau-$ $-0),\mu_k(\tau)=\mu_k(\tau-0)$*, и поэтому для производной присоединенной функции в таких точках имеет место следующая формула*

$$\frac{\partial F(\omega,\tau)}{\partial\tau}=-F(\omega,\tau)\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\tau)P(\overline{\mu_k(\tau)}F(\omega,\tau)).$$

Теорема 2.3. *Если присоединенная функция* $z=F(\omega,\tau)$ *равномерно внутри* $\Delta(\tau')$ *дифференцируема справа (слева) по* τ *при* $\tau=\tau',\quad 0\le\tau'<$ $<\tau^0\quad(0<\tau'<\tau^0)$*, то производящая функция* $\omega=\Psi(z,\tau)$ *равномерно внутри* E *дифференцируема справа (слева) по* τ *при* $\tau=\tau'$ *и*

$$\frac{\partial\Psi(z,\tau)}{d\tau}=-\frac{\partial\Psi(z,\tau')}{dz}\frac{\partial F(\Psi(z,\tau'),\tau)}{d\tau}$$

где $\tau'<\tau<\tau^0(0<\tau<\tau')$.

Теорема 3.1. *Для семейства областей* $\Delta L^{(n)}(n=1,2,...)$*, полученных из* Δ *проведением* n *кусочно гладких попарно непересекающихся разрезов, присоединенная функция* $\xi=F^*(\omega,t)$*, конформно отображающая область* $\Delta(t)$ *на* Π_ξ^+*, равномерно внутри* $\Delta(t)$ *дифференцируема по* t *везде на*

$[0,t_0], t_0 = t(\tau_0)$, *за исключение конечного числа точек, и удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^*}{u_k - \omega}, \quad 0 < t < t_0, \tag{1}$$

где функции $\delta_k^* = \delta_k^*(t)$ *неотрицательны и* $\delta_1^*(t) + ... + \delta_n^*(t) = 1$, *а* $u_k = u_k(t) \quad (k = 1, ..., n)$*-некоторые вещественные кусочно непрерывные функции на* $[0, t_0]$.

Уравнение (1) назовем *уравнением Левнера для полуплоскости.*

Далее, классом H называется множество всех голоморфных однолистных в Π_ξ^+ функций $\omega = f(\xi)$, принимающих значения в Π_ω^+ и нормированных следующим условием $\lim_{\xi\to\infty}(f(\xi) - \xi) = 0, \quad \xi \in \Pi_\xi^+$.

Обозначим через $\widetilde{H}$ совокупность всех функций $f(\xi) \in H$, отображающих Π_ξ^+ на (односвязные) области без внешних в Π_ω^+ точек, получающиеся из Π_ω^+ проведением конечного числа жордановых разрезов (образующих попарно несвязные деревья, каждое из которых имеет один корень на оси $Im\omega = 0$).

Теорема 3.2. *Пусть* $f(z) \in \widetilde{H}$. *Тогда существуют* $t_0 > 0$ *и вещественная функция* $u = u(t)$, *непрерывная везде на* $[0, t_0]$, *за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, такие что* $f(z) = \Phi(z, t_0)$.

Классом H_L называется совокупность всех функций $f(z) \in H$, допускающих при достаточно больших $R, \quad R > 0$, в полуокрестности $K_R^+ = \{z : |z| > R, z \in \Pi_z^+\}$ точки $z = \infty$ разложение в ряд

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + ..., \tag{2}$$

Через H_L^r обозначим подкласс всех функций из H_L с вещественными коэффициентами в разложении (2).

Теорема 3.3. *Пусть* $t_0, \quad t_0 > 0$ *-произвольно фиксированное число и* $u = u(t)$*-вещественная кусочно непрерывная функция на* $[0, t_0]$ *без точек разрыва второго рода. Тогда решение уравнения (3.22) с начальным условием* $\omega|_{t=0} = z$ *представляет функцию* $\omega = \Phi(z, t)$, *которая при каждом* $t \in (0, t_0]$ *как функция* $z, z \in \Pi_z^+$, *принадлежит классу* H_L^r.

Теорема 3.4. *Если* $f(\xi) \in H$, *то*

$$\lim f(z) \geq Imz, \tag{3}$$

$$|\ln f'(z)| \leq \frac{Imf(z)}{Imz}, \tag{4}$$

в любой фиксированно точке $z \in \Pi_z^+$. *Оценки (3), (4) точны и знак равенства в (4) имеет место для функций*

$$\omega = f(\xi) = Rez + [(\xi - Rez)^2 - h^2]^{1/2} \in H, \quad h > 0, \tag{5}$$

отображающих Π_ξ^+ *на области, получаемые из* Π_ω^+ *проведением прямолинейного, паралельного мнимой оси разреза длинной выходящего из точки* $\omega = Rez$, *равенство в (3) имеет место лишь для* $f(\xi) = \xi$.

Далее, рассмотрим семейство ортогональных к ним траекторий $L^*(f, x)$, $-\infty < x < \infty$, имея ввиду, что каждая линия $L^*(f, x)$ есть образ полупрямой $\{z : Rez = x, \quad x = const, \quad Imz > 0\}$ при отображении $\omega = f(z)$ класса H. В гидродинамической интерпретации, когда C_ω есть плоскость течения, а $z = f^{-1}(\omega)$ представляет собой комплексный потенциал течения, $L(f, y)$ - линия тока, $L^*(f, x)$ - линия равных потенциалов. Обозначим через $K(f, y), K^*(f, x)$ кривизну линии $L(f, y), L^*(f, x)$, соответственно при отображении $f(z) \in H$ в точке $f(z)$. Установим, что

$$K(f, y) = \frac{1}{|f'(z)|} Im \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad Imz = y, \tag{6}$$

$$K^*(f, z) = \frac{1}{|f'(z)|} Re \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad Rez = x. \tag{7}$$

Под $K^*(f)$ будем понимать любую из величин $K(f, y), K^*(f, x)$.

Теорема 3.5. *Пусть* $f \in H$. *Тогда для любого фиксированного* $z \in \Pi_z^+$

$$|K^*(f)| \leq \frac{1}{Imz}\left[\frac{Imf(z)}{Imz} - \frac{Imz}{Imf(z)}\right], \quad z = x + iy. \tag{8}$$

Следствие 1. *Если некоторая дуга линии $L(f, y), f \in H, y > 0$, лежит в полосе $\{\omega : y \le Im\omega \le ay, a > 1\}$ то вдоль всей этой дуги*

$$|K(f, y)| \le \frac{1}{y}(f - \frac{1}{a}).$$

Следствие 2. *Если в некоторой точке ω линии $L(f, y), f \in H, y > 0$, выполняется неравенство $|K(f, y)| \ge k_0 > 0$, то*

$$Im\omega \ge k_0 y^2[\frac{1}{2} + (1 + \frac{4}{k_0^2 y})^{1/2}].$$

Следствие 3. *Если в точке $\omega, Im\omega = h > 0$, некоторой линии уровня функций $f \in H$ выполняется неравенство $|K(f, y)| \ge k_0 > 0$, что эта линия соответствует прямой $\{z : Imz = y, y > 0\}$, где $y \le h(1 + k_0 h)^{-1/2}$.*

Следствие 4. *Если в точке $\omega = f(z), f \in H, Im\omega = h, h > 0$, линии $L(f, y), 0 < y < h$, выполняется неравенство $|K(f, y)| \ge k_0 > 0$, то*

$$|f'(z)| < \frac{2}{k_0 y} \ln \frac{h}{y}.$$

Классом H_1 назовем подкласс класса H всех функций $f(z)$, при $z \to \to \infty, z \in \Pi_z^+$, для которых существует конечный предел

$$\lim z[f(z) - z] = \{f\}_1.$$

Очевидно, $H_L \subset H_1, H_L^r \subset H_1$, причем если $f(z) \in H_L(H_L^r)$ и $f(z) = z + + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$, то $\{f\}_1 = c_1$.

Лемма 1. *Подкласс $\widetilde{H}$ всюду плотен в H_L^r как в топологии равномерной сходимости внутри Π_z^+, так и в топологии равномерной сходимости в окрестности точки $z = \infty$.*

Лемма 2.

Пусть последовательность $|h_n(z)|_{n=1}^{\infty}$ функций $h_n(z) \in \widetilde{H}, h_n(z) = z + + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)} z^{-k}$, сходится к $h(z) \in H_L^r, h(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$, равномерно в некоторой окрестности точки $z = \infty$. Тогда при любом $m, m = 1, 2, ...$, выполняется условие $\lim_{n\to\infty} c_m^{(n)} = c_m$.

Теорема 4.1 (Селляхова, Соболев). *На классе* $H^r_L(c_1), c_1 < 0$, *функций*

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + ... \tag{9}$$

имеют место оценки

$$c_3 \leq \frac{c_2^2}{c_1} - \frac{1}{2}c_1^2, \tag{10}$$

$$c_5 \leq \frac{c_2^4}{c_1^3} + \frac{1}{2}c_1^3 - 2,82c_2^2. \tag{11}$$

Оценка (10) точная, равенство в ней реализуется функциями

$$f_0(z) = u_0 + [(z - u_0)^2 + 2c_1]^{1/2} \in H^r_L(c_1), \quad u_0 = const, Imu_o = 0. \tag{12}$$

Следствие. *На классе* $H^r_L(c_1), c_1 < 0$ *функций* $f(z)$ *с разложением (9) при* $p = 1, 2$ *имеют место точные оценки*

$$c_{2p+1} \leq (-1)^p \frac{(2p-1)!!}{(p+1)!} c_1^{p+1}. \tag{13}$$

В работе введен подкласс $H^{*r}_L = H^* \bigcap H^r_L$. Напомним, что все коэффициенты при четных степенях z^{-1} в разложении $f(z) \in H^{*r}_L$ в окрестности точки $z = \infty$ равны нулю. Что касается остальных коэффициентов, то их оценки в зависимости от c_1 даются следующей теоремой.

Теорема 4.2 (Селляхова, Соболев). *На классе* $H^{*r}_L(c_1)$, *функций* $f(z) = z + c_1 z^{-1} + c_3 z^{-3} + ...$ *точные оценки коэффициентов* c_{2p+1} $(p = 1, 2, ...)$ *даются неравенствами (13); экстремальной является функция* $f(z) = (z^2 + 2c_1)^{1/2} \in H^{*r}_L(c_1)$.

Теорема 4.3. *Пусть* $D_n(c_1), c_1 < 0 \quad (n = 2, 3, ..)$, *означает множество значений* $\{f\}_n$ *на классе* $H^r_L(c_1)$ *функций* $f(z)$. *Тогда при любом* $p = 1, 2, ...$

$$D_{2p}(c_1) = (-\infty, \infty) \tag{14}$$

и в обозначениях

$$A_{2p+1} = A_{2p+1}(c_1) = (-1)^p \frac{(2p-1)!!}{(p+1)!} c_1^{p+1} \tag{15}$$

выполняется включение

$$D_{2p+1}(c_1) \supset (-\infty, A_{2p+1}].$$

Теорема 4.4. *Пусть* $R_n = R_n(c_1)$ *и* $I_n = I_n(c_1) \quad (n = 2, 3, ...)$, *означают множества значений* $Re\{f\}_n$ *и* $Im\{f\}_n$ *соотвественно на классе* $H_L(c_1), c_1 < 0$, *функций* $f(z)$. *Тогда в обозначениях (15)*

1) при $n = 0 \quad (mod \quad 4) \quad R_n = (-\infty, \infty), I_n \supset (-\infty, 0]$;
2) при $n = 1 \quad (mod \quad 4) \quad R_n = (-\infty, A_n], I_n = (-\infty, \infty)$;
3) при $n = 2 \quad (mod \quad 4) \quad R_n = (-\infty, \infty), I_n \supset [0, \infty)$;
4) при $n = 3 \quad (mod \quad 4) \quad R_n = (-\infty, \infty), I_n = (-\infty, \infty)$.

Теорема 4.5. *Пусть* $F_n = F_n(c_1, c_2)(n = 3, 4, ..)$ *означает множество значений* $\{f\}_n$ *на классе* $H_L^r(c_1, c_2)$ *функций* $f(z)$. *Тогда для* $p = 2, 3, ...$

1) если $c_2 = 0$, то $F_{2p} = (-\infty, \infty)$,
   и в обозначениях

$$B_n = B_n(c_1, c_2) = -(n-1)! \sum_{m=1}^{[(n+1)/2]} (-c_1)^m \frac{(c_2/c_1)^{n-2m+1}}{m!(2m-2)!!(n-2m+1)!} \tag{16}$$

   выполняется следующие включения:

2) если $c_2 > 0$, то $F_{2p} \supset [B_{2p}, \infty)$;
3) если $c_2 < 0$, то $F_{2p} \supset (-\infty, B_{2p}]$;
4) $F_{2p-1} \supset (-\infty, B_{2p-1}]$.

Теорема 4.6. *На классе* $H(c_1)$ *имеет место точная оценка*

$$Imf(z) \leq [(Imz)^2 - 2c_1]^{1/2}, z \in \Pi_z^+. \tag{17}$$

Заключение.В представленной магистерской работе мы рассмотрели ядро последовательности областей $\{B_n\}$ и рассмотрели примеры, которые стали убедительным доказательством того, что последовательности областей сходится к ядру относительно точки ω_0. Ввели теорему о сходимости последовательности областей к ядру.

Далее, изучили семейство областей Левнера. Использовав это доказали теорему о дифференцируемости отображений по параметру.

Кроме того, получили оценки кривизны линий уровня и их ортогональные траектории на классе H

$$|K^*(f)| \le \frac{1}{Imz}(\frac{Imf(z)}{Imz} - \frac{Imz}{Imf(z)}), \quad z = x + iy,$$

где K непосредственно может принимать любое из следующих значений

$$K(f, y) = \frac{1}{|f'(z)|} Im \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad Imz = y,$$

$$K^*(f, z) = \frac{1}{|f'(z)|} Re \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad Rez = x.$$

Из результатов исследований, доказали теорему о взаимном росте $\{f_1\}$ и других коэффициентов на H_L^r и рассмотрели на рисунках.

В заключении, показали, что фиксирование величины $c_1 = \{f\}_1$ у функций $f(z)$ класса H_1 оказывает ограничивающее влияние также на рост некоторых функционалов, характеризующих поведение $f(z)$ внутри области определения.