Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Визуализация гладких отображений многообразий

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета

ФИЛОНОВА ЕГОРА ВАСИЛЬЕВИЧА

Научный руководитель

доцент, к.пед.н. ____________________ А.В. БУКУШЕВА

Зав. кафедрой

доктор физ-мат. наук, профессор ____________________ В.В. РОЗЕН

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Многие теоремы в математике утверждают, что любое пространство из данного определенного класса всегда является подпространством некоторого "стандартного" пространства из этого класса. Это такие теоремы, как теорема Уитни о вложении гладких многообразий в $\mathbb{R}^m$, теорема Нэша о вложении римановых многообразий в $\mathbb{R}^m$ и т.д. Теоремы вложимости интересны не только сами по себе, но и как инструменты для решения других задач. Одной из проблем топологии является более проблема существования вложения данного пространства в $\mathbb{R}^m$ для данного m.

Цели и задачи работы.

Цель бакалаврской работы - разработать программы на языке Wolfram Language для визуализации гладких отображений многообразий.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

- изучить основные понятия теории гладких многообразий (гладкое многообразие, гладкое отображение, касательное пространство, погружение и вложение многообразий в евклидово пространство);

- изучить программирование в среде Wolfram Mathematica;

- визуализировать гладкие отображения многообразий в Wolfram Mathematica (погружение бутылки Клейна в трехмерное евклидово пространство, вложение тора в четырехмерное евклидово пространство).

Описание структуры работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований. Объем работы 40 страниц.

Краткая характеристика материалов работы. В первом разделе даны определения гладкого многообразия, касательного пространства. Во втором разделе определяется гладкое отображение. В третьем разделе рассматривается вложение и погружение многобразий в евклидово пространство. В четвертом разделе представлена визуализация некоторых гладких отображений. Программный код написан на языке программирования Wolfram Language в оболочке лаборатории программирования Wolfram Programming Lab. В заключении сделаны выводы по выполнению бакалаврской работы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Пусть M и N - два гладких многообразия, $f : M \to N$- непрерывное отображение.

Отображение $f : M \to N$ гладких многообразий называется *гладким отображением* класса C^r, если для любых локальных систем координат $(x^1, ..., x^n)$ в окрестности любой точки $P_0 \in M$ и $(y^1, ..., y^m)$ в окрестности точки $Q_0 = f(P_0) \in N$ представления функции f в виде вектор-функции $y = (y^k = (h^k(x^1, ..., x^n)) = h(x)$ является вектор функции класса C^r.

Определение гладкого отображения класса гладкости C^r имеет смысл только в том случае,когда классы гладкости многообразий и N не меньше, чем r.

Пусть $f : M \to N$ - гомеоморфизм многообразий. Если f является гладким отображением класса C^r, то обратное отображение f^{-1} не обязано быть гладким отображением. В случае, когда обратное отображение $f^{-1} : M \to N$

тоже является гладким отображением класса C^r, гомеоморфизм f называют гладким гомеоморфизмом класса C^r или диффеоморфизмом класса C^r. Диффеоморфизмы гладких многообразий, если $f: M \to N$ - диффеоморфизм, то многообразия M и N называются диффеоморфными многообразиями.

Гладкое отображение k-мерного гладкого многообразия в n-мерное гладкое многообразие, где $k \leq n$, имеющее максимальный ранг k в каждой точке, называется *погружением.*

Определение погружения можно сформулировать иначе. Гладкое отображение $f: M \to N$ называется *погружением,* если для любой точки $p \in M$ дифференциал $d_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ инъективен (следовательно, $\dim M \leq \dim N$).

Гладкое отображение $f: M_1 \to M_2$ многообразия размерности k в многообразие размерности $n \geq k$ называется *вложением,* если

1. оно взаимно однозначно отображает M_1 на $f(M_1)$;

2. оно имеет максимальный ранг k в каждой точке;

3. для каждой точки $A \in M_1$ найдется сколь угодно малая ее окрестность $U \subset M_1$ и окрестность V точки $f(A) = B \in M_2$ так, что $V \cap f(M_1) = f(U)$.

Иными словами, погружение f называется *вложением,* если f есть гомеоморфизм многообразия M на $f(M)$.

Если $f: M \to N$ - инъективное погружение и многообразие компактно, то f - вложение.

Пусть - гладкое многообразие. Множество $A \subset M$ является подмногообразием тогда и только тогда, когда оно есть образ некоторого вложения.

Пример 1. $f : R \to R^2, f(t) = (t, t^2)$ - вложение (рисунок 1).

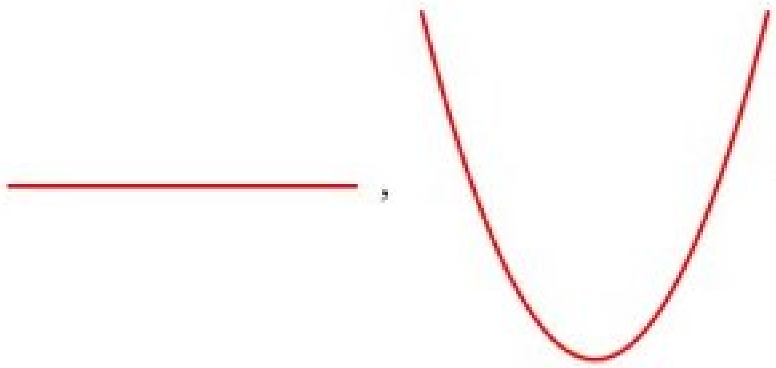

Рисунок 1 - Вложение.

Пример 2. $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to R^2, f(t) = (\cos(t), \sin(2t))$ - погружение (рисунок 2).

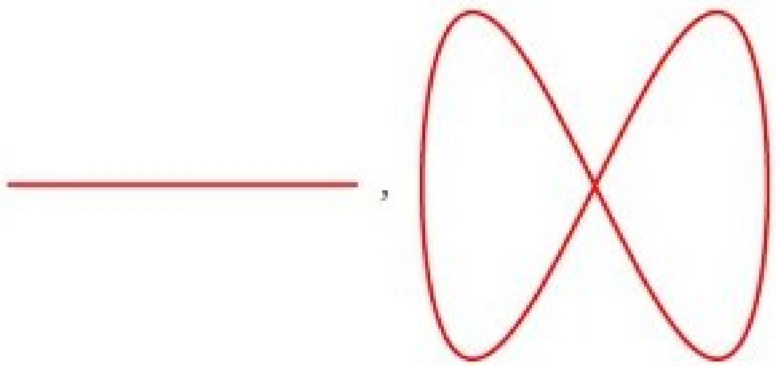

Рисунок 2 - Погружение.

Пример 3. Рассмотрим отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулами $f(\varphi) = \{\cos\varphi, \sin 2\varphi\}$. Вектор скорости равен $df/d\varphi = \{-\sin\varphi, 2\cos 2\varphi\}$ и ни в какой точке не обращается в нуль, т.е. ранг матрицы Якоби равен единице. Поэтому f является погружением.

Пример погружения окружности S^1 в плоскости $\mathbb{R}^2$, не являющегося вложением, приведен на рисунке 3.

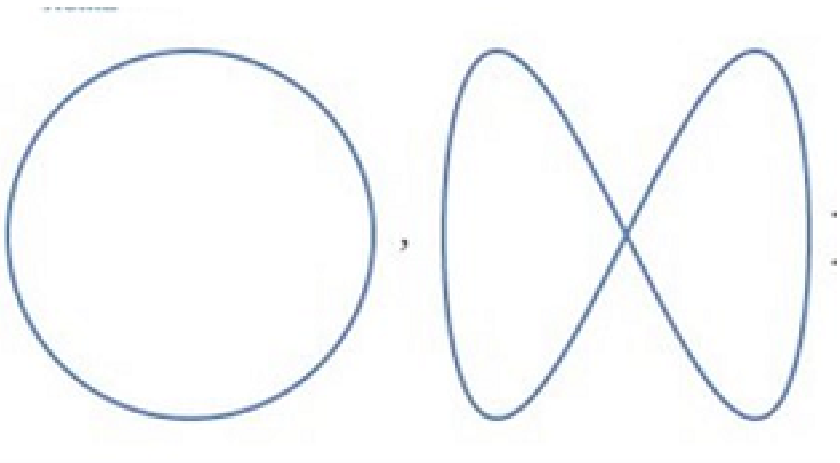

Рисунок 3 - Погружение, не являющееся вложением.

Пример 4. Рассмотрим отображение $f_a : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, где $f(t) = (t^2, t^3 + at)$. Ясно, что $J(f) = (2t, 3t^2 + a)$.

Если $a \neq 0$, то f_a - погружение (рисунок 4).

f_a - вложение $\Leftrightarrow$ $a > 0$.

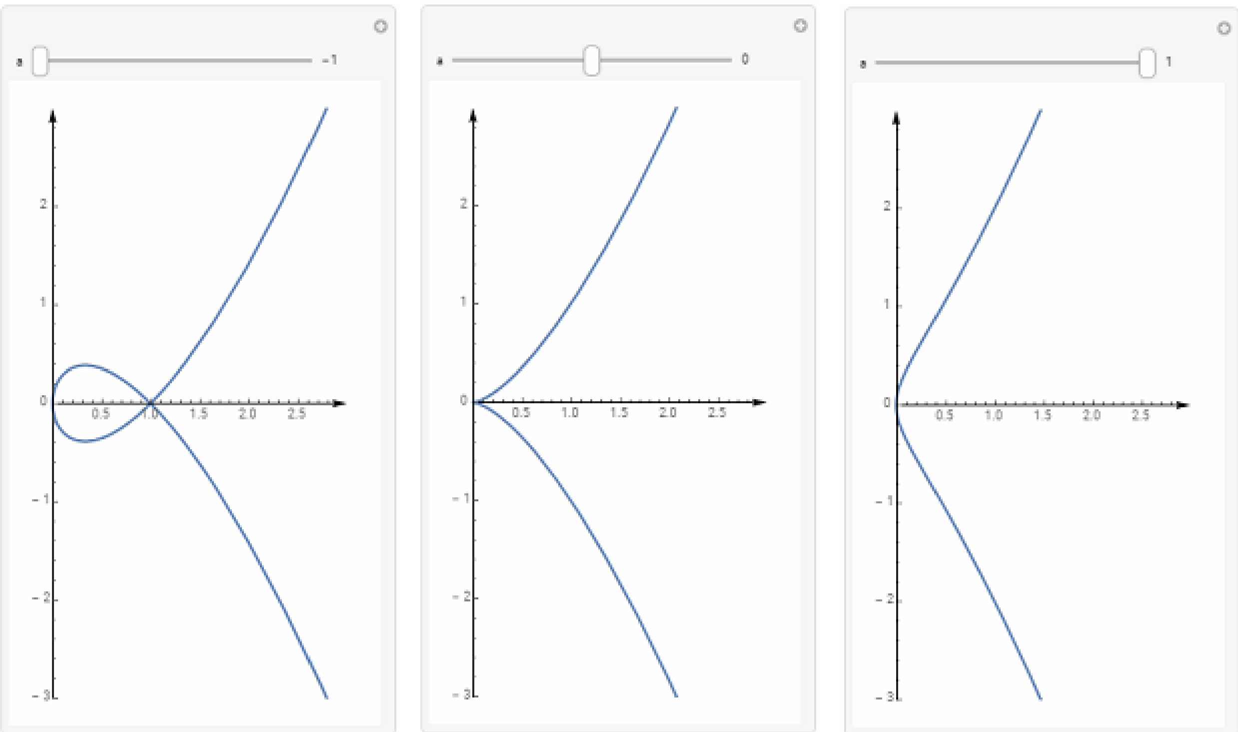

Рисунок 4 - Отображение $f(t) = (t^2, t^3 + at)$ при $a = -1,\ 0,\ 1$.

Теорема (слабая теорема Уитни). *Пусть M - гладкое компактное многообразие. Тогда существует вложение $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ для подходящего выбора размерности n.*

Теорема Уитни показывает, что всякое компактное многообразие можно считать подмногообразием евклидова пространства достаточно большой размерности.

Например, сфера S^n вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$, а тор T^n вкладывается в $\mathbb{R}^{2n}$.

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ не вкладывается в $\mathbb{R}^3$, однако может быть вложена в $\mathbb{R}^5$. В самом деле, пусть $(x_1 : x_2 : x_3)$- однородные координаты точки P в $\mathbb{R}P^2$. Положим

$$\begin{aligned} y^1 &= \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad & y^2 &= \frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \\ y^3 &= \frac{x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad & y^4 &= \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \\ y^5 &= \frac{x_2 x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad & y^6 &= \frac{x_3 x_1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}. \end{aligned}$$

Получаем отображение

$$g : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}^6, \quad g(P) = g(x_1 : x_2 : x_3) = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6).$$

На самом деле, образ отображения g лежит в линейном подпространстве $\mathbb{R}^5 \subset \mathbb{R}^6$, задаваемом уравнением $y^1 + y^2 + y^3 = 1$.

Теорема (сильная теорема Уитни). *Любое гладкое n-мерное многообразие можно погрузить в $\mathbb{R}^{2n-1}$ и можно вложить $\mathbb{R}^{2n}$.*

Пример 5. Примером погружения вещественной проективной плоскости в трехмерное евклидово пространство является поверхность Боя. Поверхность представлена на рисунке 5.

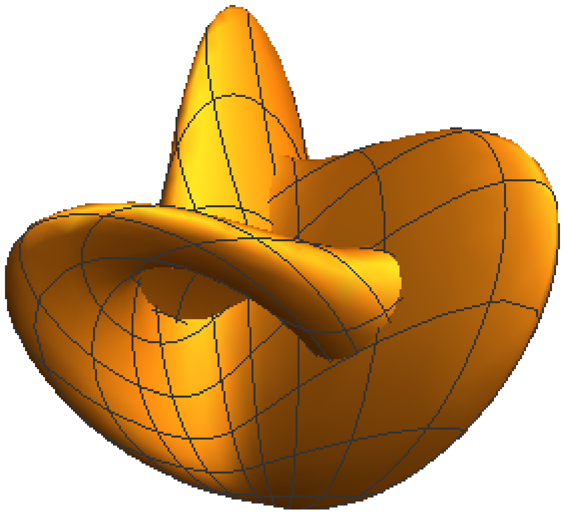

Рисунок 5 - Поверхность Боя.

Пример 6. Погружение бутылки Клейна определяется следующими параметрическими уравнениями:

$$x_1 = \cos u, \quad x_2 = \sin u,$$

$$x_3 = a\sin(v + \frac{u}{2}), \quad x_4 = b\sin 2(v + \frac{u}{2}).$$

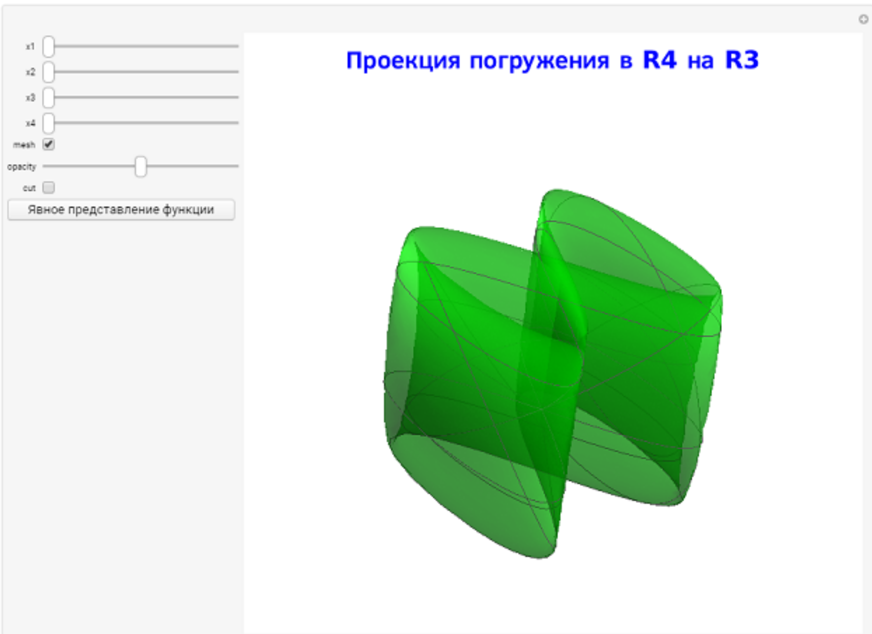

Рисунок 6 - Проекция бутылки Клейна на трехмерное пространство.

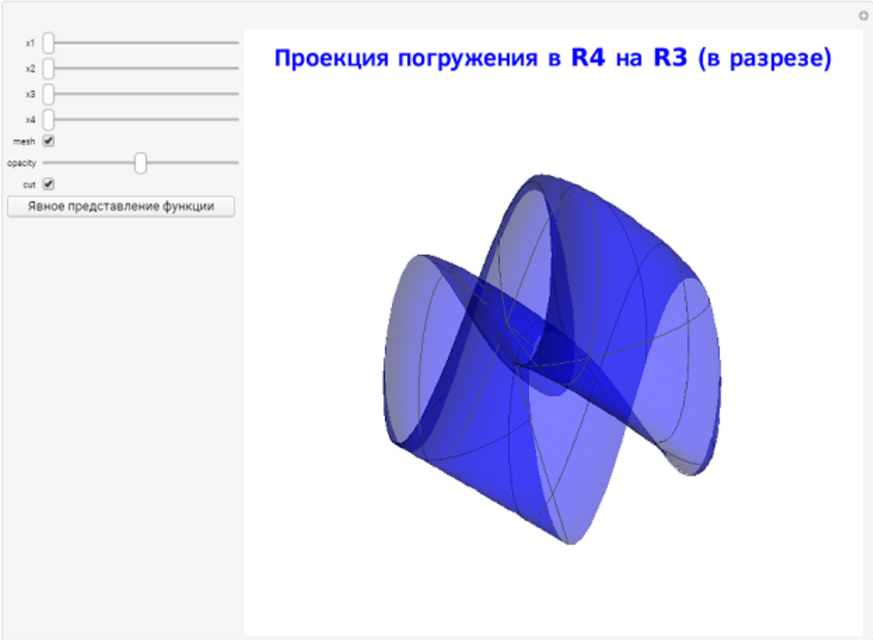

Рисунок 7 - Проекция бутылки Клейна на трехмерное пространство в разрезе.

При фиксированном значении u получается лемниската Бернулли, расположенная в плоскости, параллельной Ox_3x_4.

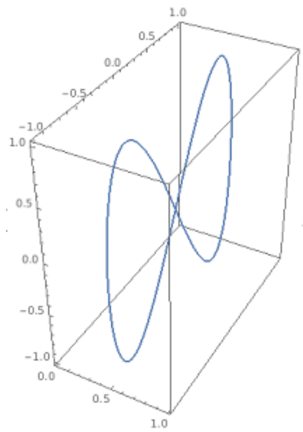

Рисунок 8 - Лемниската Бернулли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показаны некоторые возможности использовании системы Mathematica при решении задач дифференциальной геометрии.

В бакалаврской работе рассмотрены понятия: гладкого многообразия, касательного пространства, вложения, погружения.

В работе решены следующие задачи визуализации в Wolfram Mathematica: простые погружения и вложения на евклидовой плоскости, погружение бутылки Клейна в евклидово пространство, вложение тора в четырехмерное евклидово пространство.