Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Колмогоровские неравенства на оси и полуоси и принцип Лагранжа при решении экстремальных задач

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 – Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Маслова Александра Валерьевича

Научный руководитель
Доцент, к.ф.-м.н, доцент ______________________ В.Г. Тимофеев
подпись, дата

Зав. кафедрой
Д.ф.-м.н, профессор ______________________ Д.В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2018

Введение. Во многих областях математики играют важную роль неравенства, которые позволяют оценивать нормы промежуточных производных функций одной и многих переменных через нормы самих функций и нормы производных более высокого порядка. Особенно важны неравенства неулучшаемые, т.е. неравенства с наименьшей константой. Для функций одной переменной в равномерной метрике наиболее полным результатом и сегодня остаётся неравенство Колмогорова, которое было получено в 1939 г. Поэтому неравенства для промежуточных производных часто называют неравенствами типа Колмогорова. К настоящему моменту времени известно значительное количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной [1, 2]. Задача нахождения наилучшей константы в неравенстве типа Колмогорова сводится к некоторой экстремальной задаче. Такие экстремальные задачи могут решаться различными методами. В работе рассматриваются некоторые из них: вариационные методы исчисления и метод оптимальных управлений.

Цель работы. Целью этой работы является рассмотрение неравенств Колмогорова и применение принципа Лагранжа для получения определенного класса точных неравенств Колмогорова.

Объем и структура работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Первая глава - вводные сведения, которая содержит основные обозначения, термины и понятия, используемые в этой работе. Вторая глава называется постановка изопериметрической задачи, посвящена постановке изопериметрической задачи и вариационному способу её решения (принцип Лагранжа). Третья глава - неравенство Адамара. Четвертая глава - оптимальное управление при решении экстремальных задач. Состоит из разделов: задача оптимизации, экстремальные траектории, асимптоты линии переключения, зависимость от параметра и оптимальность управления.

Основное содержание работы.

Глава 1. В первой главе выпускной работы вводится неравенство Колмогорова, точное неравенство Колмогорова, доказывается предложение о выполнении неравенства типа Колмогорова при соотношениях между k, n, p, q, r.

Рассмотрим следующее семейство экстремальных задач, определенных на $W^n_{pr}(I)$:

$$
\begin{aligned}
&f_0(x) = \|x^{(k)}\|_{L_q(I)} \to sup,\\
&f_1(x) = \|x\|_{L_p(I)} \le 1, \\
&f_2(x) = \|x^{(n)}\|_{L_r(I)} \le 1.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Задачу (1) будем называть общей задачей о неравенствах для производных. При некотором соотношении между k, n, p, q, r возможны неравенства следующего вида:

$$
\|x^{(k)}\|_{L_q(I)} \le K \|x\|^{\alpha}_{L_p(I)} \|x\|^{\beta}_{L_r(I)}, \tag{2}
$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

Определение 1. *Задачу о нахождении наилучшей константы в неравенстве* (2) *будем называть задачей о неравенстве типа Колмогорова. Неравенство* (2) *с наилучшей константой будем называть точным.*

Предложение 1. *Неравенство* (2) *(при фиксированных k, n, p, q, r) справедливо, лишь если*

$$
\alpha = \alpha(p, q, r, k, n) = \frac{n - k - r^{-1} + q^{-1}}{n - r^{-1} + p^{-1}},
$$
$$
\beta = \beta(p, q, r, k, n) = \frac{k - q^{-1} + p^{-1}}{n - r^{-1} + p^{-1}}.
$$

Глава 2. В этой главе рассматривается изопериметрическая задача и её решение с помощью принципа Лагранжа.

Определение 2. *Основной изопериметрической задачей называется экстремальная задача следующего вида:*

$$
J_0(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^n(t))\, dt \to extr
$$

$$
J_i(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^n(t))\, dt \le 1, \qquad i = 1, ..., m;
$$

где $f_i(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^n(t)), i = 1, ..., m$ - данные функции $n+1$ переменных, называемые интегрантами. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным.

Определение 3. *Экстремум функционала ищется среди функций* $x \in C_n[t_0, t_1]$, *удовлетворяющих изопериметрическим условиям. Такие функции называются допустимыми в изопериметрической задаче.*

Определение 4. *Функцией Лагранжа для данной задачи будет следующая функция*

$$\mathcal{L} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^n(t))\, dt.$$

Определение 5. *Лагранжианом задачи называется функция*

$$L = L(t) = L(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^n(t)).$$

Теорема 1. *Пусть функция* x_t *доставляет слабый локальный экстремум в изопериметрической задаче в пространстве* $C_n[t_0, t_1]$. *Тогда найдутся множители Лагранжа* $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$, *не все равные нулю и такие, что справедливы следующие условия:*

1) стационарности по x *- уравнение Эйлера-Пуассона для лагранжиана*

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k L_{(k)}(t) = 0$$

2) трансверсальности по x

$$L_{\dot{x}_0}(t_0) = 0$$
$$L_{\dot{x}_0}(t_1) = 0$$

3) дополняющей нежесткости

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^n(t))\, dt = 1, \qquad i = 1, ..., m;$$

4) неотрицательности

$$\lambda \geq 0, \qquad i = 1, ..., m.$$

Задача 1. *Рассмотрим функционалы следующего вида:*

$$I_s(x)=\begin{cases}\int\limits_{-1}^{1}|x(t)|^s\,dt=\|x\|_s^s, & 1\le s<\infty,\\ vrai\max\limits_{t\in[-1,1]}|x(t)|=\|x\|_\infty, & s=\infty,\end{cases}$$

$$\tilde{I}_s(x)=\begin{cases}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x(t)|^s\,dt, & 1\le s<\infty,\\ vrai\max\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|x(t)|, & s=\infty,\end{cases}$$

Задачи можно записать в следующем виде:

$$I_s(x)\to\sup,\qquad I_p(x^{(r)})\le 1;$$

$$\tilde{I}_s(x)\to\sup,\qquad \tilde{I}_p(x^{(r)})\le 1,$$
$$x^{(k)}(-\pi)=x^{(k)}(\pi),\qquad 0\le k\le r-1.$$

Их будем называть основными изопериметрическими задачами.

Определение 6. *Величины $I_s^{-1/s}(x_{nrps})$ и $\tilde{I}_s^{-1/s}(\tilde{x}_{nrps})$ обозначим соответственно λ_{nrps} и $\tilde{\lambda}_{nrps}$. Их совокупность назовем спектром задач.*

Положим $\lambda_{nrps}=0$ при $0\le n\le r-1$ и рассмотрим случай $r=1$.

Теорема 2. *Спектр задачи* (1) *при* $r=1$, $1\le n<\infty$, $1<s<\infty$ *имеет вид*

$$\lambda_{n1ps}=\Gamma_{ps}n,\qquad n=0,1,2,...,$$

где

$$\Gamma_{ps}=2^{1-\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{p'}\right)}s^{\frac{1}{s}}(p')^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{s}+\frac{1}{p'}}\times\frac{\Gamma\Big(1+\frac{1}{s'}\Big)\Gamma\Big(1+\frac{1}{p}\Big)}{\Gamma\Big(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{p'}\Big)}$$

$\Gamma(x)$ - *гамма функция и* $(p')^{-1}+p^{-1}=1$.

Решение задачи, основанное на применении принципа Лагранжа, разбивается на несколько стандартных этапов [6, 7].

Глава 3. В этой главе рассмотрено неравенство Адамара [10, 11]

$$\|\dot{x}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq K\|x\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|\ddot{x}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}. \tag{3}$$

и показано с помощью нескольких теорем, что $K = \sqrt{2}$ является наилучшей константой.

Теорема 3. *Пусть $x \in L_2(\mathbb{R}_+)$, производная $\dot{x}$ локально абсолютно непрерывна и $\ddot{x} \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда неравенства*

$$\|\dot{x}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{2}\|x\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|\ddot{x}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

и

$$\|\dot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \|x\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|\ddot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

эквивалентны.

Теорема 4. *Пусть $x \in L_2(\mathbb{R}_+)$, производная $\dot{x}$ локально абсолютно непрерывна и $\ddot{x} \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда следующее неравенство справедливо:*

$$\|\dot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \|x\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|\ddot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Теорема 5. *Пусть $x \in L_2(\mathbb{R})$, производная $\dot{x}$ локально абсолютно непрерывна и $\ddot{x} \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда следующее неравенство справедливо:*

$$\|\dot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|x\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \cdot \|\ddot{x}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Неравенство Адамара на полуоси рассмотрим теперь как задачу вариационного исчисления. Вычисление константы Колмогорова равносильно нахождению точного решения задачи:

$$\int\limits_0^\infty \dot{x}^2(t)\,dt \to \max, \int\limits_0^\infty x^2(t)\,dt \leq \gamma_1, \int\limits_0^\infty \ddot{x}^2(t)\,dt \leq \gamma_2$$

Для этой задачи по предложению 1 имеет место неравенство (3)

Действительно,

$$\alpha = \alpha(p,q,r,k,n) = \frac{n-k-r^{-1}+q^{-1}}{n-r^{-1}+p^{-1}} = \frac{2-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\beta = \beta(p,q,r,k,n) = \frac{k-q^{-1}+p^{-1}}{n-r^{-1}+p^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Положим $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$. Тогда задача принимает следующий вид:

$$\int\limits_0^\infty \dot{x}^2(t)\,dt \to \max, \int\limits_0^\infty [x^2(t) + \ddot{x}^2(t)]\,dt \le 1$$

Решение задачи, основанное на применении принципа Лагранжа, разбивается на несколько стандартных этапов [6, 7, 8].

И в итоге доказано, что $K = \sqrt{2}$ является наилучшей константой, а неравенство

$$\|\dot{x}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \le \sqrt{2}\|x\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|\ddot{x}\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

является точным.

Глава 4. Данная глава посвящена задаче, которая применяется в радиофизике для оценки потери качества сигнала при управлении [12].

Рассмотрим функционал следующего вида, который оценивает величину переходных искажений сигнала в линейных системах автоматического регулирования:

$$J = \int\limits_0^\infty (a^2b^2 + b^2\dot{x}^2)\,dt$$

или

$$J = \int\limits_0^T (a^2b^2 + b^2\dot{x}^2)\,dt,$$

Были построены оптимальные траектории для указанного функционала:

$$\int\limits_0^T (x_1^2 + \beta^2 x_2^2)\,dt = \int\limits_0^T (x_1 + \beta x_2)^2\,dt - 2\beta\int\limits_0^T x_1x_2\,dt.$$

Первый член правой части минимален при $x_1 + \beta x_2 = 0$, а второй зависит только от начальной и конечной точек, а не от траектории, соединяющей эти точки.

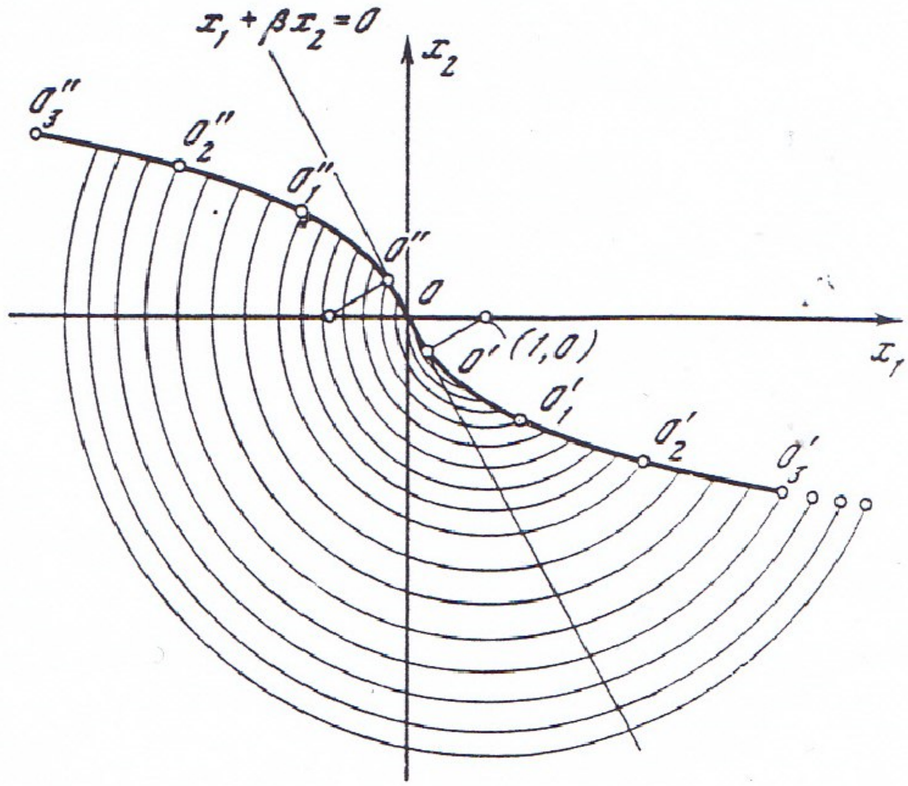

Рисунок 1 — Оптимальные траектории

По траекториям движение происходит к началу координат и возможно лишь в пределах отрезка $|x_1| \leq \beta^2(1+\beta^2)^{-1}$ из-за ограничения $|u| \leq 1$. Этот отрезок обозначен $O'O''$(См. Рисунок 1).

Изображены линия переключения и экстремальные траектории (См. Рисунок 2). Линия переключения - гладкая кривая с горизонтальными асимптотами

$$x_2 = \frac{4}{\pi(1+\beta^2)} \text{ при } x_1 < 0 \text{ и } x_2 = -\frac{4}{\pi(1+\beta^2)} \text{ при } x_1 > 0$$

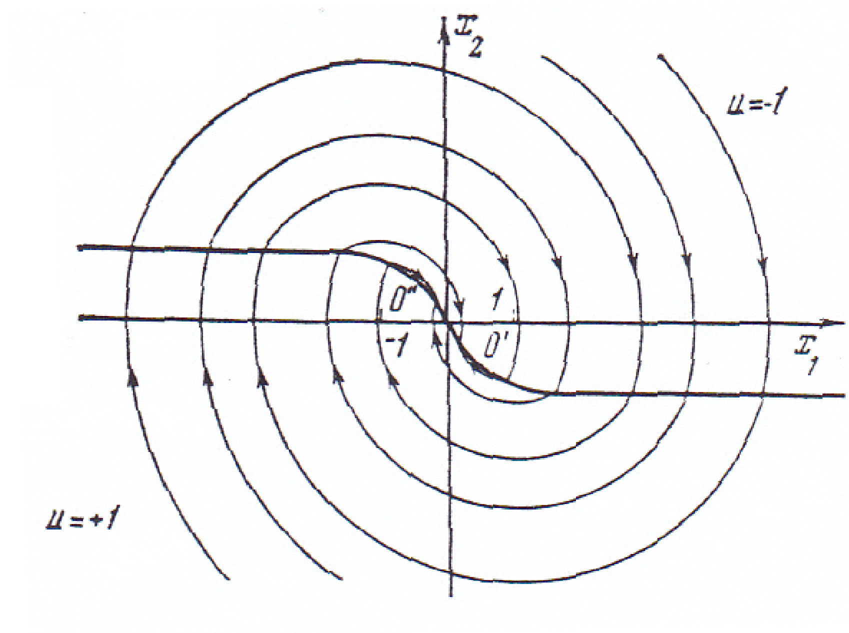

Рисунок 2 — Линия переключения

Линия переключения может пересекать свои асимптоты. В частности, при $\beta \geq \frac{4}{\pi}$ отрезок $O'O''$ пересекает прямые $x_2 = \pm\eta_0$. Если точка переключения лежит на границе полосы $x_2 = \pm\eta_0$, то и все её последующие также удовлетворяют условию $|x_2| = \eta_0$. Однако на конечном отрезке может быть лишь конечное число таких пересечений.

Оптимальность управления.

Полученное экстремальное управление $u(t)$ принадлежит $L_2(0, \infty)$. Так как найденное экстремальное управление единственно, то оно и является оптимальным [15].

Рассмотрим теперь случай, когда один из коэффициентов a, b равен нулю.

Пусть $a = 0$, тогда особый отрезок $O'O''$ переходит в отрезок $[-1, 1]$ оси абсцисс, и движение вдоль него невозможно. Управление $u = const$ может удерживать фазовую точку на этом отрезке, при этом на отрезке $[-1, 1]$ величина J не возрастает. Значит, оптимальная задача может быть сформулирована как задача приведения фазовой точки на отрезок $[-1, 1]$ оси абсцисс за T - конечное время с минимальным значением J. Таким образом, рассматриваемый функционал примет вид:

$$J = \int_0^T \dot{x}\, dt \to \min .$$

Предложение 2. *Оптимальное управление в этой постановке существует.*

Теорема 6. *Предел последовательности линий L_β при $\beta \to 0$ существует и будет являться линией переключения при $\beta = 0$.*

Заключение. Целью работы были рассмотрение неравенств Колмогорова и применение принципа Лагранжа для получения определенного класса точных неравенств Колмогорова. В работе рассмотрено неравенство Адамара, которое относится к неравенствам типа Колмогорова. Применив принцип Лагранжа, была указана наилучшая константа для неравенства Адамара, и доказано, что оно является точным.