Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Интеграл типа Коши и его свойства

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 – Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Дроник Марии Дмитриевны

Научный руководитель
Доцент, к.ф.-м.н. ______________________ В.Г. Гордиенко
подпись, дата

Зав. кафедрой
Д.ф.-м.н.,профессор ______________________ Д.В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2018

Введение. Интеграл типа Коши используется в качестве математического аппарата при решении задач во многих областях современной математики, в том числе , и при решении краевых задач теории аналитических функций комплексного переменного. Внимание математиков к данному интегралу было привлечено исследованиями Ю.В. Сохоцкого, который в 1873 году в своей докторской диссертации впервые исследовал поведение интеграла типа Коши на контуре интегрирования.

Целью моей работы является изучению этого интеграла и его свойств. Работа состоит из пяти разделов. В первом разделе: "Основные определения и понятия"формулируются определения математических понятий, необходимых для дальнейшего изложения материала и даются общие сведения об интеграле типа Коши. Во втором разделе: "Интеграл типа Коши"рассматривается условие Гёльдера и определяется главное значение особого интеграла в смысле Коши. В третьем разделе: "Главное значение особого криволинейного интеграла"изучаются условия существования особого интеграла, выводятся формулы интегрирования по частям и замены переменной, рассматривается вопрос о предельных значениях интеграла типа Коши и свойства этих значений.В четвёртом разделе: "Формулы Гильберта"устанавливается связь между интегралом Шварца и интегралом типа Коши, откуда выводятся формулы Гильберта. В пятом разделе: "Поведение интеграла на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности"рассматривается поведение интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности.

Основное содержание работы.

Интеграл типа Коши. Пусть L - некоторый гладкий замкнутый контур плоскости комплексного переменного z. Область, лежащую внутри контура L, будем называть внутренней и обозначать через D^+, а дополнительную к $D^+ \cup L$ область будем называть внешней и обозначать D^-.

Если $f(z)$ - функция аналитическая в D^+ и непрерывная в $D^+ \cup L$, то согласно формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases} \tag{1}$$

Если же $f(z)$ аналитична в области D^- и непрерывна в $D^- \cup L$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+, \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^-. \end{cases} \tag{2}$$

Положительное направление обхода контура L, будем брать так, чтобы область D^+ оставалась слева.

Формула Коши дает возможность вычислить значение функции в любой точке области, если известны ее значения на границе области. Интеграл, стоящий в левой части формул (1) и (2) называется интегралом Коши.

Путь теперь L - гладкий замкнутый или незамкнутый контур, целиком расположенный в конечной части плоскости, где τ - комплексная координата его точек и $\varphi(\tau)$ - непрерывная функция точек контура.

Определение 1. *Интеграл*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \tag{3}$$

называется интегралом типа Коши, где функция $\varphi(\tau)$ называется его плотностью, а $\dfrac{1}{\tau - z}$ - ядром.

Интеграл типа Коши представляет собой функцию, аналитическую во всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек контура L. Аналитичность интеграла типа Коши следует из теоремы

Теорема 1. *Пусть L - гладкий контур (замкнутый или незамкнутый), $f(\tau, z)$ - функция, непрерывная по переменной $\tau \in L$ и аналитическая по z в некоторой области для вех значений τ. Тогда функция, представленная криволинейным интегралом*

$$F(z) = \int\limits_L f(\tau, z)\,d\tau, \tag{4}$$

есть аналитическая функция переменной z.

Те значения z, при которых функция $f(\tau, z)$ перестает быть аналитической, будем называть особыми точками функции $F(z)$.

Для интеграла типа Коши с непрерывной плотностью $\varphi(\tau)$ единственными точками, где подынтегральная функция перестает быть аналитической относительно z, являются точки контура L. Последний является особой линией для функции $\Phi(z)$ (3).

Если L - незамкнутый контур, то $\Phi(z)$ будет функцией, аналитической во всей плоскости с линией особенностей L. Пусть теперь L - замкнутый контур. Тогда $\Phi(z)$ распадается на две самостоятельные функции: $\Phi^+(z)$, определенную в области D^+, и $\Phi^-(z)$ определенную для точек области D^-. Функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ не являются аналитическим продолжением друг друга.

Аналитическую функцию $\Phi(z)$, определяемую в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях D^+,D^- двумя самостоятельными выражениями $\Phi^+(z)$,$\Phi^-(z)$, будем называть кусочно аналитической функцией.

Заметим, что $\Phi(z)$, представленная интегралом типа Коши (3) в бесконечно удаленной точке обращается в нуль.

Пусть L - гладкая кривая и $\varphi(t)$ - функция точек этой кривой, причём аргумент t и функция $\varphi(t)$ могут быть как действительными, так и комплексными.

Определение 2. *Говорят, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет на кривой условию Гёльдера, если для любых двух точек этой кривой выполняется неравенство*

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_2 - t_1|^\lambda, \tag{5}$$

где A и λ -положительные числа. A называется постоянной Гёльдера, а λ-показателем Гёльдера.

Главное значение особого криволинейного интеграла. Пусть L -гладкий контур, τ, t - комплексные координаты его точек. Рассмотрим криволинейный особый интеграл

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau. \tag{6}$$

Если σ, s - длины дуг, отсчитываемые от начальной точки интегрирования до точек τ, t, и $\tau = \tau(\sigma)$ - уравнение контура в комплексной форме, то, подставляя в интеграл $\tau = \tau(\sigma)$, $t = t(s)$, $d\tau = \tau'(\sigma)\, d\sigma$, мы привели бы его к двум действительным особым интегралам. Однако, при решении большого числа краевых задач целесообразней рассматривать особый интеграл как функцию комплексного переменного.

Проведем из точки t контура, как из центра, окружность радиуса ϱ и пусть t_1, t_2 - точки пересечения этой окружности с кривой. Радиус будем считать настолько малым, чтобы окружность не имела с кривой L других точек пересечения, кроме t_1, t_2. Обозначим часть контура L, вырезаемой окружностью, через l и возьмем интеграл по оставшейся дуге.

Определение 3. *Предел интеграла*

$$\int\limits_{L\setminus l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \qquad \text{при } \varrho \to 0$$

называется главным значением особого интеграла

$$\int\limits_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

Формулы интегрирования по частям и замены переменной в интеграле Коши.

Теорема 2. *(правило замены переменной). Если функция $\tau = \alpha(\zeta)$ имеет непрерывную производную $\alpha'(\zeta)$, нигде не обращающуюся в нуль, и взаимно-однозначно преобразует контур L в контур L', то имеет место равенство*

$$\int\limits_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \int\limits_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)}\, d\zeta, \tag{7}$$

где

$$t = \alpha(\xi).$$

Теорема 3. *(интегрирование по частям). Если функция $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция и точка t не совпадает с концами контура $L(a$ или $b)$, то справедлива следующая формула интегрирования по частям:*

$$\int\limits_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \pm i\pi\varphi(t) + \varphi(b)\ln(b - t) - \varphi(a)\ln(a - t) - \int\limits_{L} \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\, d\tau. \tag{8}$$

Предельные значения интеграла типа Коши. Основная лемма. Доказываются следующие утверждения

Лемма 1. *Если плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера и точка t не совпадает с концами контура, то функция*

$$\psi(z) = \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau$$

ведет себя при переходе через точку $z = t$ контура как функция непрерывная, т.е. она имеет определенное предельное значение при приближении z к t с любой стороны контура по любому пути:

$$\lim_{z \to t} \psi(z) = \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}\, d\tau = \psi(t).$$

Теорема 4. *Пусть L-гладкий контур (замкнутый или незамкнутый)и $\varphi(t)$ - функция точек контура, удовлетворяющая условию Гёльдера. Тогда интеграл типа Коши*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

имеет предельные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ во всех точках контура L, не совпадающих с его концами, при приближении к контуру слева или справа по любому пути, и эти предельные значения выражаются через плотность интеграла $\varphi(t)$ и особый интеграл $\Phi(t)$ по формулам Сохоцкого

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau. \end{aligned}\right\}$$

где особый интеграл

$$\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau$$

понимается в смысле главного значения.

Свойства предельных значений интеграла типа Коши.

Теорема 5. *Если L - гладкий замкнутый контур и $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию Гёльдера с показателем λ, то предельные значения интеграла типа Коши $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ также удовлетворяют этому условию, причем с тем же показателем, если $\lambda < 1$, и с показателем, сколь угодно мало отличающимся от λ, если $\lambda = 1$.*

Следствие. Если $\varphi(t)$ на гладком замкнутом контуре L удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ, то

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} \, d\tau$$

также удовлетворяет этому условию, причем с тем же показателем, если $\lambda < 1$, и с показателем $1 - \varepsilon$, где ε - сколь угодно малое положительное число, если $\lambda = 1$.

Формулы Гильберта. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ есть функция, аналитическая в единичном круге. Через s и σ обозначим длины дуг окружности, отсчитываемых от точки пересечения ее с положительным направлением оси абсцисс. Пусть далее непрерывная функция $u(s)$ есть предельное значение действительной части функции $f(z)$ на контуре круга.

Тогда, как известно, формула Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} \, d\sigma + iv_0 \tag{9}$$

дает возможность выразить аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию $f(z)$ через значения ее действительной части на окружности с точностью до постоянного мнимого слагаемого iv_0. Полагая в (9) $z = 0$ и пользуясь теоремой о среднем, найдем, что

$$v_0 = v(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2} v(\sigma) \, d\sigma \tag{10}$$

Определение 4. *Выражение* $\dfrac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}$ *называется ядром Шварца.*

Между ядрами Шварца и Коши имеется простое соотношение. Обозначая через τ комплексную координату точки окружности ($\tau = e^{i\sigma}$), получим:

$$\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} \, d\sigma = \left(-1 + \frac{2e^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - z} \right) d\sigma = \frac{2}{i} \frac{d\tau}{\tau - z} - d\sigma. \tag{11}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2u(\sigma)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\sigma)\,d\sigma. \qquad (12)$$

Последняя формула,устанавливает связь между интегралом Шварца и интегралом типа Коши с действительной плотностью, взятым по контуру единичного круга.

Выведем соотношения между предельными значениями на контуре действительной и мнимой частей аналитической в единичном круге функции. Получим:

$$\upsilon(s) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma + \upsilon_0. \qquad (13)$$

и

$$u(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \upsilon(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + u_0 \quad (u_0 = u(0,0)). \qquad (14)$$

Определение 5. *Симметричные формулы (13) и (14) носят название формул обращения Гильберта, а выражение* $\operatorname{ctg}\dfrac{\sigma - s}{2}$ *называется ядром Гильберта.*

Поведение интеграла на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности. Рассмотрим поведение интеграла типа Коши на концах контура интегрирования.

Пусть L - не замкнутый контур с концами a и b и $\varphi(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на всей кривой, включая концы.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

и представим его в виде

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}\,d\tau =$$

$$= \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}\,d\tau,$$

где t - любая точка контура L.

При $z = t$ последний интеграл существует как несобственный. Поэтому он представляет собой функцию, ограниченную и стремящуюся к определенному пределу при приближении точки z ко всякой точке контура, включая концы. Главную особенность для $\Phi(z)$ на концах дает первый член.

Полагая в последнем выражении последовательно $t = a$, $t = b$, получим:

$$\Phi(z) = -\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\ln(z-a) + \Phi_1(z), \tag{15}$$

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(b)}{2\pi i}\ln(z-b) + \Phi_2(z), \tag{16}$$

где $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ - функции, ограниченные в окрестности соответствующих концов и стремящиеся к определенным пределам, когда z стремится соответственно к a или b.

Таким образом, на концах контура интеграл типа Коши имеет особенности логарифмического характера, полностью определяемые значениями $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$.

Пусть c - точка разрыва первого рода. Тогда

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(c-0) - \varphi(c+0)}{2\pi i}\ln(z-c) + \Phi_0(z), \tag{17}$$

где $\Phi_0(z)$ в окрестности точки c обладает теми же свойствами, что и функции $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ в формулах (15),(16).

Далее в работе рассматриваются частные случаи особенностей других типов. Показано, в частности, что для интеграла типа Коши вида

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\ln^{p-1}(\tau-a)}{\tau-z}\,d\tau, \tag{18}$$

где p - целое положительное число, для точек контура вблизи точки a справедливо равенство:

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\ln^{p-1}(\tau-a)}{\tau-t}\,d\tau = \frac{1}{2}\Big[\omega_p^+(t,a) - \omega_p^-(t,a)\Big] + \Omega_0(t), \tag{19}$$

где $\Omega_0(z)-$ аналитическая в окрестности точки a функция.

Заключение. В работе изучен интеграл типа Коши и рассмотрены свойства этого интеграла. Изучены условия существования особого интеграла в смысле главного значения, выводятся формулы интегрирования по частям и замены переменной, рассмотрен вопрос о предельных значениях интеграла типа Коши и свойства этих значений. Изучено поведение интеграла на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности. Приведены некоторые частные случаи особенностей других типов.