Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Нижняя оценка площади круга при квазиконформном отображении

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 – Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Джонсон Джайд Мустафа

Научный руководитель
Доцент, к.ф.-м.н. ________________________ Осипцев М. А.
подпись, дата

Зав. кафедрой
Д.ф.-м.н, профессор ________________________ Прохоров Д. В.
подпись, дата

Саратов 2018

Введение. Существует несколько причин, по которым квазиконформные отображения в последнее время стали играть очень активную роль в теории аналитических функций одной комплексной переменной.

1. Самая поверхностная причина в том, что квазиконформные отображения являются естественным обобщением конформных отображений. Если бы это было их единственным утверждением, они бы вскоре были забыты.

2. На ранней стадии было замечено, что многие теоремы о конформных отображениях используют только квазиконформность. Поэтому представляет интерес определить, когда квазиконформные является существенным, и когда это не так.

3.квазиконформные отображения сопоставления менее жесткие, чем конформные отображения, и поэтому их гораздо проще использовать в качестве инструмента. Это было характерно для утилитарной фазы теории. Например, он был использован для доказательства теорем о конформном типе односвязных Римановых поверхностей (теперь в основном забытых).

4.квазиконформные отображения играют важную роль в изучении некоторых эллиптических уравнений в частных производных.

5. Экстремальные задачи в q.c. отображения приводят к аналитическим функциям, связанным с областями или Римановыми поверхностями. Это было глубокое и неожиданное открытие из-за Тейхмюллеру.

6. Проблема модулей была решена с помощью q.c. отображения. Они также проливают свет на Фуксовых и Клейновых групп.

7. Конформные отображения вырождаются при обобщении на несколько переменных, но q.c. сопоставления не делают. Эта теория все еще находится в зачаточном состоянии.

Основные задачи.Основными задачами данной работы являются: Понятие квазиконформного отображения было введено Г. Грёчем в 1928 году в связи со следующей задачей. Если Q– квадрат и R – прямоугольник, не являющийся квадратом, то не существует конформного отображения Q на R, переводящего вершины в вершины. Грёч поставил вопрос о построении такого отображения, наиболее близкого к конформному.

Краткое содержание работы. Для этого понадобилось ввести меру близости отображения к конформному, и, введя такую меру, Грёч сделал первый шаг к созданию теории квазиконформных отображений.

Вернемся к определению Гёрча

Пусть $\omega = f(z)(z = x + iy, \omega = u + iv)$ – гомеоморфизм класса C^1одной области на другую. В точке z_0 он порождает линейное отображение дифференциалов

Которое можно записать также в комплексной форме

$$dw = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z} \tag{0.1}$$

Где

Геометрически (1) представляет собой аффинное отображение плоскости (dx, dy) на плоскость (du, dv)

Оно переводит круги с центром в начале координат в подобные эллипсы. Вычислим отношение длин осей этих эллипсов и их направление.

В классических обозначениях

$$du^2 + dv^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 \tag{0.2}$$

Где

$$E = u_x^2 + v_x^2; \quad F = u_x v_y; \quad G = u_y^2 + v_y^2$$

Соответствующие собственные значения определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} E-\lambda & F \\ F & G-\lambda \end{vmatrix} \tag{0.3}$$

и равны

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{E + G \pm [(E-G)^2 + 4F^2]^{1/2}}{2} \tag{0.4}$$

Отношение $\dfrac{a}{b}$ осей эллипсов равно

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} = \frac{E + G[(E-G)^2 + 4F^2]^{1/2}}{2(EG - F^2)^{1/2}} \tag{0.5}$$

Здесь гораздо удобнее использовать комплексные обозначения. Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y) \\ f_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y) \end{aligned} \tag{0.6}$$

Это дает

$$|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = u_x v_y - v_x v_y = J \tag{0.7}$$

т. е. якобиан отображения $w = f(z)$. Якобиан положителен для отображений, сохраняющих ориентацию, и отрицателен для отображений, меняющих ориентацию. Рассмотрим сначала только случай сохранения ориентации, когда $|f_z| < |f_{\overline{z}}|$.

Из (1.2) следует, что

$$(|f_z| - |f_{\overline{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\overline{z}}|)|dz| \tag{0.8}$$

причем обе оценки могут достигаться. Мы получаем, что отношение большой оси к малой равно

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|} \geq 1 \tag{0.9}$$

величина называется отклонением в точке z. Часто удобнее рассматривать величину

$$d_f = \frac{|f_{\overline{z}}|}{|f_z|} < 1 \tag{0.10}$$

связанную с D_f соотношениями

$$D_f = \frac{1 + d_f}{1 - d_f}; \quad d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1} \tag{0.11}$$

Отображение конформно в точке z тогда и только тогда, когда $D_f = 1$, $d_f = 0$. Максимум величины $\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ достигается, когда отношение

$$\frac{f_z \overline{z}}{f_z dz}$$

Положительно, а минимум – когда оно отрицательно. Введем теперь *комплексная дилатация*

$$\mu_f = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z} \tag{0.12}$$

Где $\mu_f = d_f$. Тогда максимум $\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ соответствует направлению

$$\arg dz = \alpha = \frac{1}{2} \arg \mu_f \tag{0.13}$$

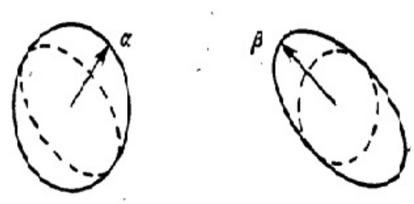
минимум – направлению $\alpha \pm \dfrac{\pi}{2}$ Учитывая это, из (1.1) находим направление большой оси получаемого в плоскости dw эллипса

$$\arg d\omega = \beta = \frac{1}{2} \tag{0.14}$$

где мы положили

$$v_f = \frac{f_{\overline{z}}}{\overline{f_z}} = \left(\frac{f_z}{|f_z|}\right)^2 u_f$$

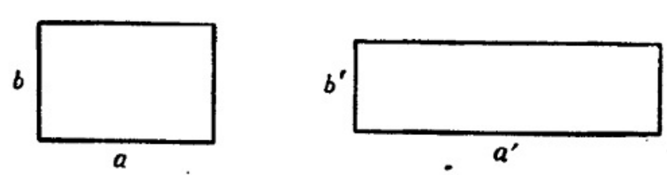
Величину v_f *назвать вторым комплексным отклонением.*
Пояснением к сказанному может служить следующий рисунок, смысл которого ясен сам по себе:
Легко видеть, что β - α=arg f_z



Определение 0.1. *Отображение f называется квазиконформным, если D_f ограничено. Оно называется K-квазиконформным, если $D_f \leq K$. Условие $D_f \leq K$ эквивалентно следующему $d_f \leq k = (K-1)/(K+1)$. Очевидно, что 1-квазиконформное отображение конформно.*

0.1 Решение задачи Греча

Вернемся теперь к задаче Греча и придадим ей точным смысл, считая отображение f наиболее близким к конформному, если $\sup D_f$ принимает наименьшее возможное значение. Пусть R',R'-два прямоугольника со сторонами a, b и a', b'.Можно это считать, что, $a : b \leq a' : b'$ (в противном случае надо поменять местами ab). При этом предположим, что стороны, равен ,переходят при отображение f в стороны, равные a' а сторпоны,равные b - в стороны, b'



вычисления дают

$$a' \leq \int_0^a |d_f(x+iy)| \leq \int_0^a (|f_z| + |f_{\overline{z}}|)dx$$

$$a'b \leq \int\limits_0^a \int\limits_0^b (|f_z| + |f_{\overline{z}}|) dxdy$$

$$a'^2 b'^2 \leq \int\limits_0^a \int\limits_0^b \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|} dxdy = \int\limits_0^a \int\limits_0^b (|f_z|^2 |f_{\overline{z}}|^2) dxdy = a'b' \int\limits_0^a \int\limits_0^b D_f dxdy$$

или

$$\frac{a'}{b'} : \frac{a}{b} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \frac{1}{ab} D_f dxdy \tag{0.15}$$

Откуда

$$\frac{a'}{b'} : \frac{a}{b} \leq \sup D_f$$

Минимум величины $\sup D_f$ достигается для аффинного отображения

$$f(z) = \frac{1}{2}(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b})z + \frac{1}{2}(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}) f_{\overline{z}}$$

Величина стоящая в правой части соотношения (1) называется *средним отклюнением отображения f в* R - *прим ред* Итак, доказана

Теорема 0.1. *в задаче Греча экстремальным является аффинное отображение,имеющее Наименьшее максимальное и наименьшее среднее отклонения.*

Отношения $m = \dfrac{a}{b}$ и $m' = \dfrac{a'}{b'}$ называются *модулями* прямоугольников RR'(с учетом ориентации). Мы доказали, что K-квазиконформное отображение RR' существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{K} \leq \frac{m'}{m} \leq K. \tag{0.16}$$

0.2 Суперпозиции отображении

Определим теперь комлексные проиводные и комплексные отклонения суперпозиции отображений $g \circ f$. Для удобства обозначений введем промеждуточноную переменную $\xi = f(z)$

Применяя правила дифференцирования сложной функции, находим

$$\begin{aligned} (g \circ f)_z &= (g_\xi \circ f) f_z + (g_{\overline{\xi}} \circ f) f_z \\ (g_\xi \circ f) f_{\overline{z}} &= (g_\xi \circ f) f_{\overline{z}} + (g_{\overline{\xi}} \circ f) f_{\overline{z}} \end{aligned} \tag{0.17}$$

Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
g_\xi \circ f = \frac{1}{J}[(g \circ f)_z f_{\overline{z}} - (g \circ f)_{\overline{z}} - (g \circ f)_{\overline{z}} f_{\overline{z}}] \\
g_{\overline{\xi}} \circ f = \frac{1}{J}[(g \circ f)_{\overline{z}} f_z - (g \circ f)_z f_{\overline{z}}]
\end{aligned}
\tag{0.18}
$$

Где $J = f^-1$ приходим к формулам

$$
(f^{-1})_\xi \circ f = f_{\overline{z}}|J, (f^{-1})_{\overline{\xi}} \circ f = -f_{\overline{z}}|J \tag{0.19}
$$

Отсюда, например, получаем

$$
\mu_{f^{-1}} = -v_f \circ f^{-1} \tag{0.20}
$$

и, переходя к абсолютным величинам,

$$
d_{f^{-1}} = d_f \circ f^{-1} \tag{0.21}
$$

Другим словами,взаимно обратные отображения имеют в соответствующих точках одинаковое отклонение. Из (1.19) получаем

$$
\mu_g \circ f = \frac{f_z}{f_{\overline{z}}} . \frac{\mu_{g \circ f} - \mu_f}{1 - \overline{\mu}_f \mu_{g \circ f}} \tag{0.22}
$$

Если g конформное,то $\mu_g = 0$ и

$$
\mu_{g \circ f} = \mu_f \tag{0.23}
$$

Если f конформное,то $\mu_f = 0$ и

$$
\mu_g \circ f = \left(\frac{f'}{|f'|} \right)^2 \mu_{g \circ f} \tag{0.24}
$$

Что можно переписать в виде

$$
v_g \circ f = v_{g \circ f} \tag{0.25}
$$

В любом случае отклонение инвариантно по отношению к конформным отображениям.

Полагая $g \circ f = h$, находим из (1.23), что

$$
\mu_{h \circ f^{-1}} \circ f = \frac{f_z}{f_{\overline{z}}} . \frac{\mu_h - \mu_f}{1 - \overline{\mu}_f \mu_h} \tag{0.26}
$$

Откуда
$$d_{h\circ f^{-1}}\circ f=\left|\frac{\mu_h-\mu_f}{1-\overline{\mu}_f\mu_h}\right| \tag{0.27}$$
и
$$\log D_{h\circ f^{-1}}=[\mu_h,\mu_f], \tag{0.28}$$
Где [,] - неевклидово расстояние (в метрике $ds=2|d\omega|/(1-|\omega|^2)$ при $|\omega|<1$

Мы можем, очевидно, ввести в качестве расстояния между отображениями f и h величину $\sup[\mu_h,\mu_f]$
(расстояние Тейхмюллера). Это будет метрика при условии отожедествление отображений получающихся друг из друга конформным преобразованием.

Для проверки этого утверждения достаточно заметить, что суперпозиция K_1-квазиконформного и K_2-квазиконформного отображении является K_1K_2-квазиконформным отображением.

0.3 Экстремальная длина

Пусть Г-кривых на плоскости. Предполагается, что каждая кривая $\gamma\in\Gamma$ является объединением счетного числа открытых дуг, замкнутых дуг или замкнутых кривых и локально спрямляема. Введем геометрическую характеристику $\lambda(\Gamma)$, называемую экстремальной длиной семейства Г. Ее важность для наших рассмотрений объясняется ее инвариантностью при конформных отображениях и квазиконформных отображениях (последнее означает, что при таких отображениях она умножается на ограниченный множитель).

Функцию ρ определенную во всей плоскости, мы будем называть допустимой, если она удовлетворяет следующим условиям:

1)$\rho\geq 0$ и измерима

2)$A(\rho)=\int\int\rho^2dxdy\neq 0,\infty$ (интеграл берется по всей плоскости)

Для такой функции ρ положим
$$L_\gamma(\rho)=\int\limits_\gamma\rho|dz|$$
если ρ измерила на $L(\rho)=\infty$ в противном случай. Положим
$$L(\rho)=\inf_{\gamma\in\Gamma}L_\gamma(\rho)$$

Определение 0.2. Экстремальной длиной семейства Г *называется*
$$\lambda(\Gamma)=\sup_\rho\frac{L(\rho)^2}{A(\rho)},$$

где $\sup$ *берется по всем допустмым* ρ.

Будем говорить, что $\Gamma_1 < \Gamma_2$, *если каждая кривая* $\gamma_2 \in \Gamma_2$*содержит некоторую (т.е класс беднее, а его кривые длиннее*

Замечание Отметим, что из $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ вытекает $\Gamma_2 < \Gamma_1$!

Определение 0.3. *Если* $\Gamma_1 < \Gamma_2$ *то* $\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$.

Доказательство. Если $\gamma_1 \in \gamma_2$ то

$$L_{\gamma_1}(\rho) \leq L_{\gamma_2}(\rho),$$

$$\inf L_{\gamma_1}(\rho) \leq \inf L_{\gamma_2}(\rho),$$

откуда немедленно следует, что $\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$ ■

Пример 1.1. Пусть Γ – совокупность всех кривых в замкнутом прямоугольнике R, соединяющих пару противоположных сторон, например стороны длины b.

Для любой функции ρ

$$\int\limits_0^a \rho(x+iy)dx \leq L(\rho)$$

$$\int\limits_R\int \rho dxdy \leq bL(\rho)$$

$$b^2 L(\rho)^2 \leq ab \int\limits_R\int \rho^2 dxdy \leq abA(\rho),$$

$$\frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} \leq \frac{a}{b}$$

Это значит, что $\lambda(\Gamma) \leq a/b$

С другой стороны, положим $\rho = 1$ в R, $\rho = 0$ вне R. Тогда $L(\rho) = a$, $A(\rho) - ab$, поэтому $\lambda(\Gamma) \leq a/b$, Итак, мы доказали, что

$$\lambda(\Gamma) = \frac{a}{b}.$$

Пример 1.2. Пусть Γ-совокупность всех кривых в кольце $\gamma_1 \leq |z| \leq \gamma_2$, соединяющих граничные окружности

Произведем вычисление:

$$\int_{r_1}^{r_2} \rho dr L(\rho) \qquad \int\int \rho dr d\theta \leq 2\pi L(\rho),$$

$$4\pi^2 L(\rho)^2 \leq 2\pi \log\frac{r_2}{r_1} \int\int \rho^2 r dr d\theta$$

,

$$\frac{L(\rho)^2}{L(\rho)} \leq \frac{r_1}{r_2}$$

. Равенство достигается для $\rho = \dfrac{1}{r}$

Пример 1.3. Модуль кольца.

Пусть G – двусвязная область в конечной плоскости, и пусть C_1-ограниченная C_1-неограниченная компонента дополнения к G. . Будем говорить, что замкнутая кривая $\gamma \subset G$ разделяет C_1 и C_2, если γ имеет ненулевой индекс относительно точек c_1. Пусть Γ - семейство замкнутых кривых в G, разделяющих C_1 и C_2 Модулем области G называется число M(G)=Модулем области G называется число $M(G) = \lambda(\Gamma)^{-1}$ Рассмотрим, например, кольцо$G = \{r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ Имеем

$$L(\rho) \leq \int_0^{2\pi} \rho(re^{i\theta}) r d\theta,$$

$$\frac{L(\rho)}{r} \leq \int_0^{2\theta} \rho d\theta,$$

$$L(\rho)\log\frac{r_2}{r_1} \leq \int\int \rho dr d\theta,$$

$$L(\rho)^2 \log^2\frac{r_2}{r_1} \leq 2\pi \log\frac{r_2}{r_1} \int\int \rho^2 r dr d\theta,$$

$$\frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} \leq \frac{2\pi}{\log(r_2/r_3)}.$$

С другой стороны, для $\rho = 1/2\theta r$ реализуется равенство. В самом деле, для любой $\gamma \in \Gamma$ имеем

$$1 \leq |n(\gamma, 0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{dz}{z}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dz|}{|z|} = L_\rho(\gamma).$$

Поэтому $L(\rho) = 1$ и $A(\rho) = \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{r_2}{r_1}$. Мы заключаем, что $M(G) = \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{r_2}{r_1}$. Предположим, что все $\gamma \in \Gamma$ содержатся в некоторой области содержатся в некоторой области Ω, и пусть φ-некоторое K-квазиконформное отображение Ω на Ω'. Пусть Γ'-образ семейства кривых Γ.

Теорема 0.2. $K^{-1}\lambda(\Gamma) \leqslant \lambda(\Gamma') \leqslant K\lambda(\Gamma)$.

Доказательство. Для данной функции $\rho(z)$ определим $\rho'(\xi)$, полагая $\rho'(\zeta) = 0$ вне Ω и

$$\rho'(\xi) = \frac{\rho}{|\varphi_z| - |\varphi_{\overline{z}}|} \circ \varphi^{-1}$$

в Ω'. Тогда

$$\int\limits_{\gamma'} \rho'|d\zeta| \geq \int\limits_{\gamma} \rho|dz|,$$

$$\int\int \rho'^2 d\zeta d\eta = \int\limits_{\Omega}\int \rho^2 \frac{|\varphi_z| + |\varphi_{\overline{z}}|}{|\varphi_z| - |\varphi_{\overline{z}}|} dxdy \leq KA(\rho)$$

Этим доказано, что $\lambda' \geq K^{-1}\lambda$, неравенство получается при рассмотрении обратного отображения. ■

Следствие 0.1. *Величина*$\lambda(\Gamma)$ *является конформным инвариантом.*

Приведем два важных принципа композиции семейств кривых. В первом из них

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = (\gamma_1 + \gamma_2 | \gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_2),$$

во втором $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *означает обычное объединение.*

Теорема 0.3. *Если* Γ_1 *и* Γ_2 *расположены соответственно в непересекающихся измеримых множествах* E_1, E_2 *то*

a) $\lambda(\Gamma_1 + \Gamma_2) \leq \lambda(\Gamma_1) + \lambda(\Gamma_2)$

b)$\lambda(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)^{-1} \leq \lambda(\Gamma_1)^{-1} + \lambda(\Gamma_2)^{-1}$.

Доказательство. a) Мы можем считать, что $0 < \lambda(\Gamma_1), \lambda(\Gamma_2) < \infty$, ибо в противном случае неравенство тривиально.

Произведем нормировку так, чтобы иметь

$$L_1(\rho_1) = A(\rho_1),$$

$$L_2(\rho_2) = A(\rho_2),$$

Выберем $\rho = \max(\rho_2, \rho_2)$. Тогда

$$L(\rho) \geq L_1(\rho_1) + L_2(\rho_2) = A(\rho_1) + A(\rho_2),$$

$$A(\rho) \leq A(\rho_1) + A(\rho_2)$$

$$\lambda = \sup \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} \geq A(\rho_1) + A(\rho_2) = \frac{L_1(\rho_1)^2}{A(\rho_1)} + \frac{L_2(\rho_2)^2}{A(\rho_2)}.$$

Отсюда следует, что $\lambda \geq \lambda_1 + \lambda_2$

b)Если $\lambda = \lambda(\Gamma \cup \Gamma) = 0$, то доказывать нечего. Рассмотрим некоторую допустимую функцию ρ для которой $L(\rho) > 0$, и положим $\rho_1 = \rho$ на $E_1, \rho_2 = \rho$ на $E_2, 0$ в остальных точках. Тогда $L_1(\rho_1) \geq L(\rho), L_2(\rho_2) \geq L(\rho)$ и $A(\rho) = A(\rho_1) + A(\rho_2)$. таким образом,

$$\frac{A(\rho)}{L(\rho)^2} \geq \frac{A(\rho_1)}{L_1(\rho_1)^2} + \frac{A(\rho_2)}{L_2(\rho_2)^2}$$

и, следовательно,

$$\lambda^{-1} \geq \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1},$$

что и требовалось доказать. ∎