

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

## Приложение гармонического анализа к обработке сигналов

### АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления *02.03.01 – Математика и компьютерные науки*

*механико-математического факультета*

Буймистрюка Льва Александровича

Научный руководитель

ассистент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Г.С. Бердников

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Д.В. Прохоров

Саратов 2018

**Введение.** Обработка изображений играет важную роль в современном мире и применяется в множестве областей: науке, промышленности, искусстве, медицине и может осуществляться как для получения изображения на выходе (например, подготовка к полиграфическому тиражированию, к телетрансляции и т.д.), так и для получения другой информации (например, распознавание текста, подсчёт числа и типа клеток в поле микроскопа и т.д.).

В данной работе будет рассмотрено одно из направлений обработки изображений - их улучшение. Под улучшением изображения понимают визуальное (заметное глазом) улучшение качества изображения (коррекция яркости и контраста, цветокоррекция и т.п.); объективное улучшение качества изображения (устранение искажений типа дисторсия, размытие, шум, расфокусировка и т.п.);

Цель бакалаврской работы: рассмотрение методов обработки цифровых изображений, основанных на частотном анализе и вейвлет-анализе.

Задачи:

1. Ввести понятия цифрового изображения, рассмотреть различные цветовые модели представления цифровых изображений.
2. Дать определение преобразования Фурье и вейвлет-преобразования Хаара (а также дискретный, быстрый и двумерный случаи) и дать оценку сложности в терминах  $O$ .
3. Рассмотреть различные алгоритмы обработки изображений, основанные на этих преобразованиях и провести анализ результата их действия на изображения.
4. Программно реализовать описываемые алгоритмы.

Во введении обоснована актуальность исследования, показана практическая значимость работы, определена цель, сформулированы задачи.

Первая глава «Основные понятия обработки изображений» состоит из двух разделов, в которых даются различные определения цифрового изображения, рассматриваются часто используемые цветовые модели, вводится понятие обработки частотной и пространственной области, градационного преобразования.

Вторая глава «Преобразование Фурье» состоит из четырех разделов, в которых даются определения прямого и обратного преобразования Фурье, рассматривается алгоритм быстрого преобразования Фурье и их расширения на

двухмерные случаи. Так же дается сравнительная оценка вышеперечисленных преобразований в терминах  $O$ . Рассматриваются понятия Фурье-спектра, его сдвига и приводятся примеры преобразования Фурье от двухмерных изображений.

Третья глава «Фильтрация в частотной области» состоит из двух разделов, которые включают в себя описание алгоритмов размытия изображения и выделения границ, основанные на фильтрации в частотной области.

Четвёртая глава «Вейвлет-анализ» состоит из четырёх разделов, в которых вводятся основные понятия вейвлет-анализа, даются определения пирамиды изображений и преобразования Хаара (а так же выводится быстрый алгоритм его вычисления), проводится сравнительный анализ сложности в терминах  $O$ . Так же описываются алгоритмы шумоподавления и выделения границ, основанные на преобразовании Хаара.

В заключении проводится сравнительный анализ рассмотренных алгоритмов, выделяются их плюсы и минусы.

Бакалаврская работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Общий объем работы – 79 страниц, из них 56 страниц – основное содержание, включая 36 рисунков и список использованных источников из 20 наименований.

**Основное содержание бакалаврской работы.** В первой главе «Основные понятия обработки изображений» дается определение цифрового изображения как дискретной функции  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ , где константа  $d$  определяется размерностью цветовой модели. Так же изображение можно рассматривать в виде матрицы размерности  $N \times M$ , где  $\forall x \in [0, N - 1], y \in [0, M - 1]$  значение функции  $f(x, y)$  будет находиться на пересечении  $x$ -той строки и  $y$ -того столбца.

Цветовой моделью называют некую систему координат, в которой каждый цвет задан единственным вектором. Для представления изображений будем использовать модели Grayscale (градации серого) и RGB (цвет задан красной, зеленой и синей компонентой).

Обработкой (фильтрацией) изображения  $f$  называют получение на его основе изображения  $g(x, y) \equiv T(f(x, y))$ , где  $T$  - оператор, определенный в каждой точке  $(x, y)$  и называемый фильтром.

Различают два вида операций по обработке (фильтрации) изображений: обработку в *пространственной области* и обработку в *частотной области*. Примером простейших пространственных операторов являются операторы градационного преобразования [3]. Например, логарифмическое преобразование описывается как  $T(x) = c \log(1 + x)$ , ( $c \equiv \text{const}$ ).

Пороговым преобразованием называют функцию, в общем случае заданную уравнением вида:  $p(x, c) = \begin{cases} 0, & |x| < c \\ T(x), & |x| \geq c \end{cases}$ , при этом различают жёсткое и мягкое пороговое преобразование. При жёстком преобразовании  $T(x) \equiv x$ , а при мягком преобразовании в качестве  $T(x)$  берется некоторое градационное преобразование. При правильно подобранных коэффициентах мягкое пороговое преобразование позволяет избежать разрыва значений вблизи порога, характерного для жёсткого преобразования.

Во второй главе «Преобразование Фурье» вводятся понятия прямого и обратного преобразования Фурье (для краткости будем рассматривать только дискретные случаи):

**Определение 2.1.** *Фурье-преобразование дискретной функции одной переменной  $f(x)$ , где  $x = \overline{0, N-1}$ , задается равенством:*

$$F(u) = \Delta t \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{\frac{-2\pi i u x}{N}} \quad (2.1)$$

где  $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{N}}$ ,  $u = \overline{0, N-1}$ .  $F(u)$  называется Фурье-образом функции  $f(x)$ . Равенство (2.1) называют дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

**Теорема 2.1.** (Обратное ДПФ). Вектор  $(f(0), \dots, f(N-1))$  можно восстановить по дискретному спектру (2.1) с помощью обратного ДПФ, определяемого формулой

$$f(x) = \Delta v \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{\frac{2\pi i u x}{N}} \quad (2.2)$$

где  $\Delta v = \frac{1}{N\Delta t}$ ,  $x = \overline{0, N-1}$ .

**Определение 2.2.** *Определение 2.1 можно расширить на двумерный случай, как для прямого, так и для обратного ДПФ:*

$$F(u, v) = \Delta t \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-2\pi i \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right)} \quad (2.3)$$

$$f(x, y) = \Delta v \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) e^{2\pi i \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right)} \quad (2.4)$$

$$\text{где } \Delta t = \frac{1}{\sqrt{NM}}, \Delta v = \frac{1}{NM\Delta t}, x = \overline{0, N-1}, y = \overline{0, M-1}.$$

Сложность алгоритма ДПФ составляет  $O(N^2 M^2)$ .

**Теорема 2.2.** *Применив одномерное ДПФ к каждому вектору-строке, а затем к каждому вектору-столбцу, получим тот же самый результат, что и в результате преобразования (2.3).*

Сложность одномерного ДПФ (2.1), расширенного на двухмерный случай с помощью данного метода равна  $O(N^2 M + NM^2)$ .

Рассмотрим ДПФ вида (2.1) для одномерного вектора размерности  $2^n$ , обозначив  $\omega_n = e^{\frac{-2\pi i}{2^n}}$ . Запишем ненормированное ДПФ, т.е.  $\Delta t \tilde{F}(u) = F(u)$  и обозначим

$$f_0 = (f(0), f(2), \dots, f(2^n - 2)) = (f_0(0), f_0(1), \dots, f_0(2^{n-1} - 1))$$

$$f_1 = (f(1), f(3), \dots, f(2^n - 1)) = (f_1(0), f_1(1), \dots, f_1(2^{n-1} - 1))$$

– вектора четных и нечетных компонент вектора  $f$  соответственно. Получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u) &= \sum_{x=0}^{2^{n-1}-1} \left( f(2x) \omega_n^{u2x} + f(2x+1) \omega_n^{u(2x+1)} \right) = \\ &= \underbrace{\sum_{x=0}^{2^{n-1}-1} f_0(x) \omega_n^{ux}}_{\text{Обозначим } \tilde{F}_0(u)} + \omega_n^{ux} \underbrace{\sum_{x=0}^{2^{n-1}-1} f_1(x) \omega_n^{ux}}_{\text{Обозначим } \tilde{F}_1(u)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tilde{F}(u) &= \tilde{F}_0(u) + \omega_n^u \tilde{F}_1(u) \\ \tilde{F}(u + 2^{n-1}) &= \tilde{F}_0(u) - \omega_n^u \tilde{F}_1(u) \end{cases} \quad k = \overline{0, 2^{n-1} - 1} \quad (2.5)$$

Формулы (2.5) задают быстрое преобразование Фурье (БПФ), имеющее сложность  $O(N \log_2 N)$ .

БПФ очевидно расширяется и на двухмерный случай, в котором сложность оценивается как  $O(NM \log_2(NM))$

Подставив формулу Эйлера в ДПФ, увидим, что *каждый* элемент фурье-преобразования состоит из суммы по *всем* значениям функции  $f(x)$ . Значения функции  $f(x)$ , в свою очередь, умножаются на синусы и косинусы разных частот. Область значений переменной  $u$ , на которой принимает свои значения функция  $F(u)$ , естественно назвать *частотной областью*, поскольку значение переменной  $u$  определяет частоты слагаемых, составляющих преобразование.

Величины  $|F(u)| = \sqrt{\text{Re}^2(F(u)) + \text{Im}^2(F(u))}$  называют *Фурье-спектром*.

**Теорема 2.3.** *(Циклический сдвиг вправо.) Сдвигу компонент вектора*

$$f = (f(0), f(1), \dots, f(N-1)) \rightarrow f' = (f(N-1), f(0), f(1), \dots, f(N-2))$$

*соответствует такое изменение в области дискретного спектра*

$$F = (F(0), F(1), \dots, F(N-1)) \rightarrow F' = (F'(0), F'(1), \dots, F'(N-1))$$

$$\text{что } \forall u : F'(u) = e^{\frac{-2\pi i u}{N}} F(u).$$

**Следствие.** Домножение  $f(x, y)$  на  $(-1)^{x+y}$  смещает центр фурье-спектра в точку с координатами  $(u_0, v_0)$ , где  $u_0 = M/2$ ,  $v_0 = N/2$ .

Частоты в фурье-преобразовании связаны с скоростью изменения яркости на изображении. Низкие частоты, отвечающие точкам вблизи начала координат фурье-преобразования, соответствуют медленно меняющимся компонентам изображения. По мере удаления от начала координат, высокие частоты начинают соответствовать быстрым изменениям яркости, которые соответствуют границам объектов и шуму.

В третьей главе «Фильтрация в частотной области» рассматриваются алгоритмы фильтрации, основанные на ДПФ.

Процедура фильтрации в частотной области проста и состоит из следующих шагов:

1. Исходное изображение умножается на  $(-1)^{x+y}$ , чтобы центрировать его фурье-преобразование.
2. Вычисляется ДПФ  $F(u, v)$  изображения, полученного после шага 1.
3. Функция  $F(u, v)$  умножается на функцию *фильтра*  $H(u, v)$ .
4. Вычисляется обратное ДПФ от результата шага 3.
5. Выделяется вещественная часть от результата шага 4.
6. Результат шага 5 умножается на  $(-1)^{x+y}$ .

$H(u, v)$  называется *фильтром* т.к. он подавляет некоторые частоты преобразования, оставляя при этом другие без изменения. Низкочастотными и высокочастотными фильтрами называются фильтры, оставляющие только низкие и высокие частоты соответственно (и ослабляющие высокие и низкие частоты соответственно).

Обозначим через  $D(u, v) = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}$  расстояние от точки с координатами  $(u, v)$  до центра изображения.

Фильтр вида  $H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq r \\ 0, & D(u, v) > r \end{cases}$ , где  $r$  – радиус, называется идеальным низкочастотным фильтром.

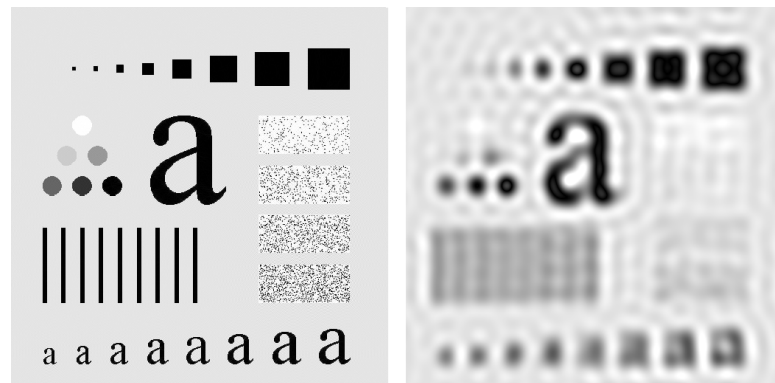


Рисунок 3.1 — Оригинал изображения (слева), изображение, к которому был применен идеальный низкочастотный фильтр при  $r = 15$  (справа)

Для изображений, к которым был применен идеальный фильтр, характерен «звон», выражающийся в появлении ложных контуров вокруг реальных. Это объясняется тем, что ДПФ от  $H(u) = \text{sinc}(x)$ .

Фильтр вида  $H(u, v) = e^{\frac{-D^2(u, v)}{2r^2}}$  называется Гауссовым фильтром низких частот.



Рисунок 3.2 — Оригинал изображения (слева), изображение, к которому был применен низкочастотный фильтр Гаусса при  $r = 5$  (справа)

Высокочастотные фильтры получают из низкочастотных путём их инвертирования, т.е.  $H_1(u, v) = 1 - H(u, v)$ . После их применения останутся только высокочастотные составляющие, соответствующие границам объектов на изображениях.

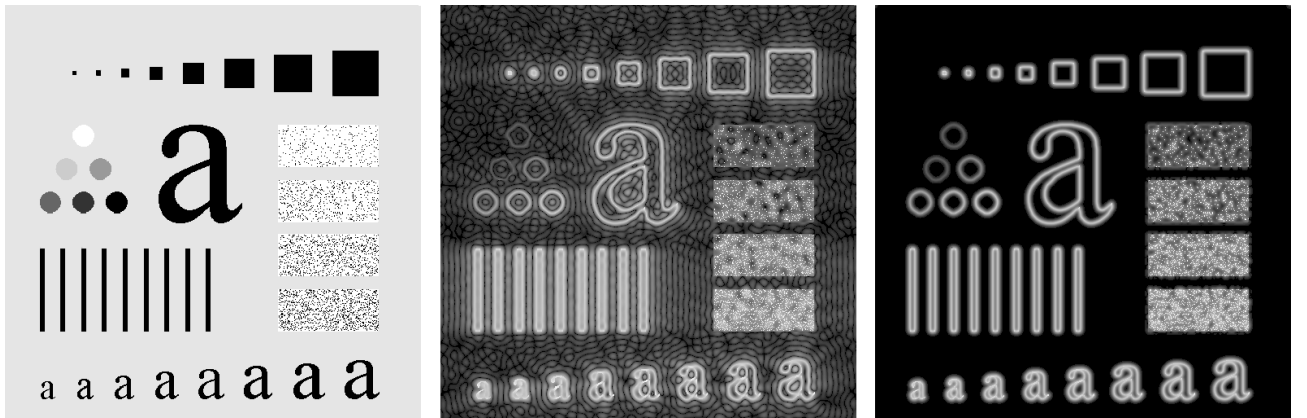


Рисунок 3.3 — Оригинал (слева), результат работы идеального высокочастотного фильтра (в центре) и высокочастотного фильтра Гаусса (справа)

В четвёртой главе «Вейвлет-анализ» вводится понятие пирамиды изображений и вейвлет-преобразовании Хаара.

**Определение 4.1.** *Изображение, представленное в нескольких масштабах, называют пирамидой изображений [7]. В основании (на  $n$ -ом слое) этой пирамиды находится оригинальное изображение  $f^{(n)}$ , имеющее размеры  $2^n \times 2^n$  на остальных слоях  $\forall i = \overline{n-1, 0}$  находятся уменьшенные изображения  $f^{(i)}$ , имеющее размеры  $2^i \times 2^i$ .*

Использование пирамидальной структуры данных в алгоритмах обработки изображений имеет две основные цели:

1. Сокращение времени обработки изображений
2. Определение более точных начальных приближений для обработки нижних уровней по результатам обработки верхних уровней.

**Определение 4.2.** [10] Функция  $\psi \in L_2$ , имеющая нулевое среднее значение:

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \psi(t) dt = 0$$

называется вейвлетом.

**Определение 4.3.** Вейвлет с параметром растяжения  $m$  и параметром сдвига  $n$  обозначается  $\psi_{n,m}$  и может быть получен из вейвлета  $\psi$  (называемого «материнским вейвлетом») следующим образом:

$$\psi_{n,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \psi\left(\frac{t-n}{m}\right)$$

**Определение 4.4.** Свёртка функции  $f$  с вейвлетом  $\psi$  называется вейвлет-преобразованием и обозначается как

$$W(x) = (f \star \psi)(x) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(t) \psi(x-t) dt$$

Вейвлет-преобразование переводит сигнал из временного представления в частотно-временное (частотно-пространственное).

**Определение 4.5.** Вейвлет-преобразование  $W$  дискретной функции одной переменной  $f(x)$ , где  $x = \overline{0, N-1}$  задается равенством:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} W(j) \varphi_j(x)$$

и называется дискретным вейвлет-преобразованием (ДВП) [12].

**Определение 4.6.** *Функция*

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & t \notin [0, 1) \end{cases} \quad (4.6)$$

*называется функцией Хаара.*

**Определение 4.7.** *Вейвлет Хаара получается из «материнской» функции следующим уравнением:*

$$\chi_{n,m}(t) = \chi(2^n t - m) \quad (4.7)$$

**Определение 4.8.** [14] *Дискретное вейвлет-преобразование, в котором в качестве вейвлета используется вейвлет Хаара, называется дискретным преобразованием Хаара (ДПХ), обозначается  $H(x)$  и задается формулой*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} H(j)\chi_j(x) \quad (4.8)$$

Двумерное ДВП определяется аналогично двумерному ДПФ (с.м. теорему 2.2). Сложность одномерного и двумерного ДВП составляет  $O(N^2)$  и  $O(N^2M + NM^2)$  соответственно.

**Определение 4.9.** *Пусть*

$$(\lambda_n) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, \dots, \lambda_{2^N-1})$$

*есть вектор значений функции  $f^N$ . Равенства*

$$\begin{aligned} \lambda_j &:= \frac{1}{2}(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}) & \text{где } j = \overline{0, 2^{N-1}-1} \\ \lambda_{2^{N-1}+j} &:= \frac{1}{2}(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}) & \text{где } j = \overline{0, 2^{N-1}-1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

*называют быстрым дискретным преобразованием Хаара (БПХ).*

**Определение 4.10.** *Равенства*

$$\begin{aligned}\lambda_{2j} &:= \lambda_j + \lambda_{j+2^{N-1}} & \text{где } j = \overline{0, 2^{N-1} - 1} \\ \lambda_{2j+1} &:= \lambda_j - \lambda_{j+2^{N-1}} & \text{где } j = \overline{0, 2^{N-1} - 1}\end{aligned}\tag{4.10}$$

называют обратным БПХ [16].

Сложность одномерного и двухмерного БПХ равна  $O(2N)$  и  $O(4NM)$  соответственно.

Под  $n$ -кратным двухмерным вейвлет-преобразованием понимается применение  $N$  раз двухмерного вейвлет-преобразования, причём очередное двухмерное вейвлет-преобразование применяется к младшей четверти матрицы (квадрат  $LL$ ).

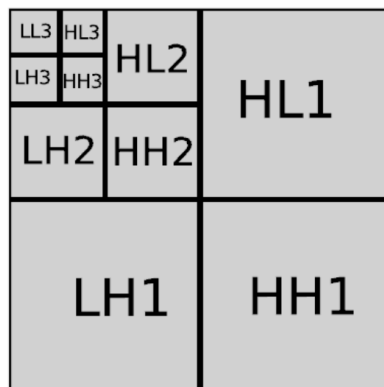


Рисунок 4.1 — Обозначения областей изображения при трёхкратном применении двухмерного вейвлет-преобразования к изображению [18]

В области  $LL$  находится уменьшенное в два раза изображение, в областях  $LH$ ,  $HL$  и  $HH$  находятся коэффициенты, отвечающие за резкие перепады в интенсивности по вертикали, горизонтали и диагонали соответственно.

Основанный на вейвлет-анализе общий метод устранения шума (т.е. подавления шумовой составляющей) состоит в следующем:

1. Вычисляется  $n$ -кратное ДПХ изображения  $f$ .
2. Коэффициенты деталей подвергаются пороговому преобразованию. при этом может использоваться как жёсткое, так и мягкое пороговое преобразование.
3. Производится обратное преобразование, восстанавливающее изображение по полученным на шаге 2 коэффициентам.



Рисунок 4.2 — изображение с равномерным шумом (слева), сглаженное изображение (справа)

Алгоритм обнаружения границ объектов с помощью вейвлет-анализа выглядит следующим образом:

1. Вычисляется  $n$ -кратное ДПХ изображения  $f$ .
2. Обнуляется область  $LL$ .
3. (Опционально) Если требуется найти только горизонтальные или вертикальные границы, то обнуляется область  $LH$  или  $HL$  соответственно.
4. Производится обратное преобразование, восстанавливающее изображение по полученным на шаге 4 коэффициентам.

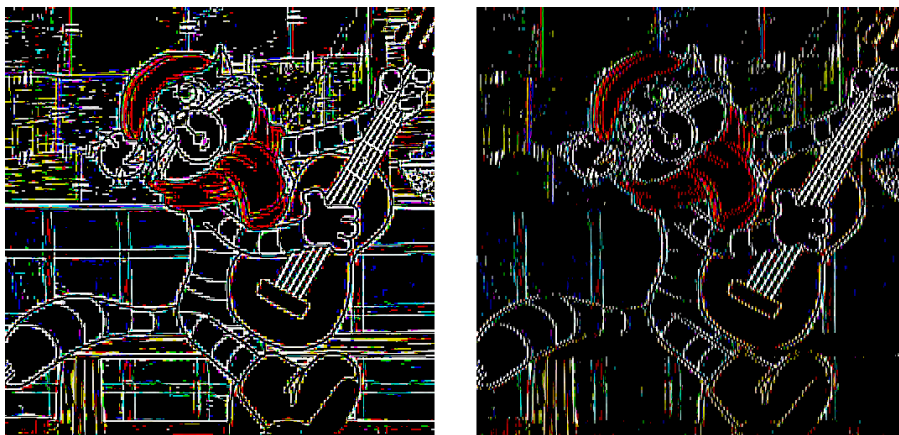


Рисунок 4.3 — Изображение с обнулённой областью  $LL$  (слева), и с обнулёнными областями  $LL$  и  $LH$  (справа)

Данный алгоритм имеет большой недостаток по сравнению с схожим алгоритмом, основанным на преобразовании Фурье. Линии, выделяющие границы объектов, теряют свою «плавность» при увеличении кратности преобразования Хаара. Это объясняется локальностью частотных составляющих в ДПХ.

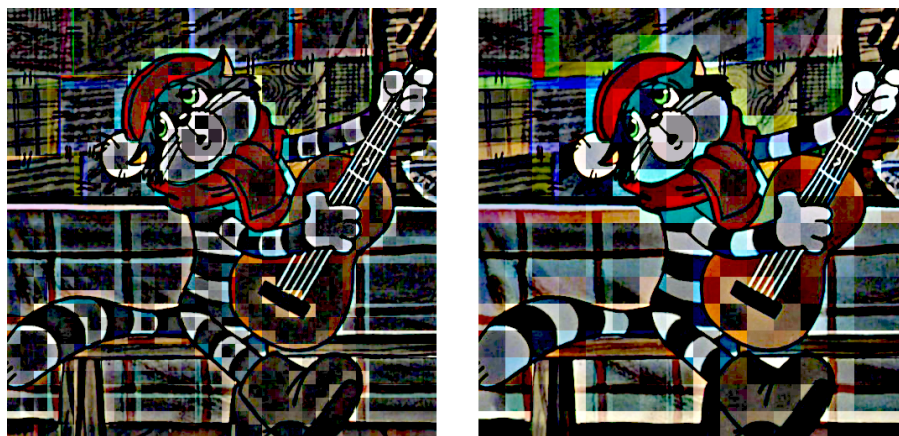


Рисунок 4.4 — Восстановленные изображения с обнулённой областью  $LL$  при значениях  $n = 4, 5$  соответственно

**Заключение.** В данной бакалаврской работе было введено понятия цифрового изображения, рассмотрены различные цветовые модели представления цифровых изображений. Было дано определение преобразования Фурье и вейвлет-преобразования Хаара (а также дискретный, быстрый и двумерный случаи) и дана оценка сложности в терминах  $O$ . Были рассмотрены различные частотные и пространственные фильтры и анализ результата их действия на изображения.

При сравнении алгоритмов удаления шума и обнаружения границ объектов, основанных на преобразованиях Фурье и Хаара, были выделены основные плюсы и минусы этих преобразований:

- БПХ, в отличие от БПФ, имеет линейную, а не логарифмическую сложность, что сильно ускоряет работу основанных на нём алгоритмов.
- БПХ гораздо проще в понимании и вычислении благодаря простым арифметическим операциям.
- Алгоритм выделения границ объектов, основанный на БПХ позволяет выделять различные направления границ (всеенаправленные, вертикальные, горизонтальные).
- Алгоритм выделения границ объектов, основанный на БПХ дает нечеткие границы объектов, захватывая область вокруг них. Это связано с локальностью коэффициентов преобразования Хаара. Алгоритм, основанный на БПФ таким недостатком не обладает.

В приложениях 1 и 2 приведены исходные коды программ реализующих темы, рассмотренные в этой работе.