

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

**Метод Тихонова в задаче восстановления непрерывных функций
с краевыми условиями**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 217 группы

направление 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета

Машковой Ольги Игоревны

Научный руководитель

Профессор, д.ф.-м.н.,
профессор

должность, уч.степень, уч.звание

Г.В.Хромова

инициалы, фамилия

подпись, дата

Зав.кафедрой

Д.ф.-м.н., профессор

должность, уч.степень, уч.звание

В.А.Юрко

инициалы, фамилия

подпись, дата

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ.

При построении математических моделей физических задач мы неизбежно сталкиваемся с тем, что исходные данные этих задач всегда заданы приближенно, поскольку получаются в результате измерений. Поэтому функции f , являющиеся исходными данными нуждаются в предварительной математической «обработке» и заданы с некоторой погрешностью $\|f_\delta - f\|_{X_2} \leq \delta$. Существование и единственность решений таких задач вытекает из их физической сущности. Поэтому некорректность нужно понимать именно в смысле отсутствия непрерывной зависимости решения от исходных данных. К таким задачам сводится ряд важных задач математической физики, вычислительной математики, теории функций, теории интегральных уравнений, а также многие прикладные задачи: обратные задачи геофизики и астрономии, задачи спектроскопии и другие.

Основателями в области некорректно поставленных задач являются А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев, В. К. Иванов и др.. Ими были разработаны так называемые методы регуляризации, которые состоят из двух принципиальных моментов: построение семейства линейных операторов T_α , зависящих от параметра α , и обладающие определёнными свойствами; согласование параметра α с погрешностью δ , $\alpha = \alpha(\delta)$, которое обеспечивает сходимости приближённого решения к точному. Одним из наиболее известных методов является метод Тихонова, но, в работах А. Б. Бакушинского, В. В. Васина, В. А. Морозова, метод Тихонова был развит и обобщён.

Г. В. Хромовой, метод Тихонова, применяемый к интегральному уравнению 1 рода, был перенесен для решения задачи восстановления непрерывной функции по заданному δ -приближению, поскольку задача восстановления функций представляет самостоятельный интерес.

В дипломной работе, используя функционал Тихонова, был разработан новый модифицированный метод, который позволил получить следующие результаты:

- построить семейство интегральных операторов, с помощью которых получаются равномерные приближения к непрерывной функции, удовлетворяющей краевым условиям (при этом указанные приближения удовлетворяют тем же условиям);
- решить задачу типа Колмогорова – Никольского на некотором классе функций;
- с помощью полученного семейства интегральных операторов решить известную задачу из теории некорректно поставленных задач, так называемую задачу восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Исходя из поставленных задач, работа состоит фактически из трех частей.

1. Сначала приводятся некоторые необходимые вводные данные (пункт 1.1) и дается общая постановка задачи (пункт 1.2).

Рассмотрим два банахова пространства X_1 и X_2 .

Пусть

$$\|\cdot\|_{X_2} \leq C \|\cdot\|_{X_1}$$

Пусть некоторый элемент $\bar{f} \in X_1$ задан его δ - приближением f_δ в метрике пространства X_2 , т.е. вместо \bar{f} нам известен элемент f_δ такой, что $\|f_\delta - \bar{f}\|_{X_2} \leq \delta$. Требуется по f_δ и δ построить такую последовательность \tilde{f}_δ , чтобы

$$\|\tilde{f}_\delta - \bar{f}\|_{X_1} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Эта задача называется задачей восстановления элемента f из пространства X_1 по его δ - приближению f_δ в метрике пространства X_2 .

Если $X_1 = C[a, b]$, $X_2 = L_2[a, b]$, то получим задачу восстановления из L_2 в C .

В методе регуляризации Тихонова рассматривается функционал

$$M_\delta^\alpha[f, f_\delta] = \|f - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|f\|_{W_2^1}^2, \quad (1.1)$$

где f аргумент функционала, $\alpha > 0$, W_2^1 пространство Соболева с нормой

$$\|f\|_{W_2^1} = \sqrt{\int_a^b (f'^2(x) + f^2(x)) dx}$$

Ищется функция $f_\delta^\alpha(x)$, дающая минимум функционала, т.е.

$$\min_f M_\delta^\alpha[f, f_\delta] = M_\delta^\alpha[f_\delta^\alpha, f_\delta]$$

Из вариационного исчисления известно, что если функция доставляет экстремум функционалу, то она удовлетворяет некоторому уравнению Эйлера (линейная часть приращения функционала, взятого на экстремальной функции, равна нулю). А если удастся решить это уравнение Эйлера, то можно получить вид операторов T_α , обеспечивающих сходимость для любой непрерывной $f(x)$.

Рассмотрим следующую задачу и получим уравнение Эйлера.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет краевому условию

$$U(f) = \beta_1 f_\delta(0) + \beta_2 f_\delta(1) = 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \quad (1)$$

Необходимо получить равномерные приближения к f , используя модификацию функционала Тихонова.

А именно – рассмотреть функционал \mathcal{J} , где $\alpha > 0$ – параметр,

$$\|f\|_{W_2^1} = \sqrt{\int_0^1 (pf^2 + (qf')^2) dx}, \quad q, p \text{ – положительные константы.}$$

Это так называемый тихоновский функционал, но в данном случае он связывается не с интегральным уравнением 1 рода, как у Тихонова, а с простейшим уравнением 1 рода – уравнением с оператором вложения из пространства $C[a, b]$ в $L_2[a, b]$. При этом будем считать допустимыми функциями функции, удовлетворяющие условию (1.9).

Обозначим через $f_\delta^\alpha(x)$ – функции, минимизирующие функционал при каждом фиксированном α (параметр δ потребуется в дальнейшем, здесь он не

влияет на функцию). Существование таких функций доказывается точно также, как и в классической постановке Тихонова[2].

Теорема 1. Минимизирующие функции $f_\delta^\alpha(x)$ при каждом фиксированном α являются решением краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)y = \frac{1}{\alpha}f_\delta(x) \\ \beta_1y(0) + \beta_2y(1) = 0 \\ \beta_2y'(0) + \beta_1y'(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство.

Даем приращение функции f_δ^α в виде:

$$\Delta f_\delta^\alpha = f_\delta^\alpha + \beta\gamma, \text{ где } \gamma(x) \text{ функция для которой существует } \|\gamma(x)\|_{W_2^1}.$$

Составляем приращение функционала и приравниваем линейную часть к нулю. Приходим к некоторому уравнению Эйлера. Функция, на которой достигается минимум функционала Тихонова, имеет вид:

$$f_\delta^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(x, t, -\alpha_1^2) f_\delta(t) dt$$

Теперь, если удастся решить это уравнение Эйлера, то можно получить вид операторов T_α , обеспечивающих сходимость. Решая задачу (2) с общими краевыми условиями (пункт 2) получаем конкретный вид f_δ^α . Обозначим через T_α оператор, который каждой непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям (1), ставит в соответствие функцию, минимизирующую функционал, т. е f_δ^α (пункт 2) .

Теорема 2.1 При каждом фиксированном α оператор T_α имеет следующий интегральный вид

$$T_\alpha f = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 G\left(x, t, -\frac{1}{\alpha}\right) f(t) dt, \quad (3)$$

где $G\left(x, t, -\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha_1 q} \left[\pm sh\alpha_1(x-t) + \frac{D(x, t, \beta_1, \beta_2, \alpha_1)}{B(\beta_1, \beta_2, \alpha_1)} \right]$ - функция Грина.

Знак «+» соответствует случаю $t \leq x$, знак «-» соответствует случаю $t \geq x$.

$$B(\beta_1, \beta_2, \alpha_1) = (\beta_1^2 + \beta_2^2)ch\alpha_1 + 2\beta_1\beta_2,$$

$$D(x, t, \beta_1, \beta_2, \alpha_1) = (\beta_1^2 - \beta_2^2)ch\alpha_1 sh\alpha_1(x+t) + (\beta_1^2 + \beta_2^2)sh\alpha_1 ch\alpha_1(x-t) - (\beta_1^2 - \beta_2^2)ch\alpha_1 sh\alpha_1, \alpha, p, q - \text{параметры}, \quad \beta_1, \beta_2 - \text{const из (1)},$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{p}{q} + \frac{1}{\alpha q}}.$$

Кроме общего вида этого оператора, показана сходимость семейства таких операторов для любой непрерывной функции при $\alpha \rightarrow 0$ (пункт 2).

Теорема2.

Для любой непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей (1.9), и семейства интегральных операторов T_α имеет место сходимость

$$\|T_\alpha f - f\|_{C[0,1]} \rightarrow 0, \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0.$$

2.Интегральный вид найденных операторов позволяет решить задачу о скорости сходимости полученных приближений на некотором классе функций (пункт 3). Введем в рассмотрение класс функций

$$M_B = \{u \in C_{[0,1]} : U(u) = 0, u = Bv, \|v\|_{L_2} \leq 1\}, \quad (4)$$

где B – интегральный оператор с ядром $B(x, t)$, причем ядро $B(x, t)$ имеет вид:

$$B(x, t) = \begin{cases} \beta_1, & 0 \leq t \leq x \\ -\beta_2, & x < t \leq 1 \end{cases}, \quad (5)$$

и величину $\Delta_1(T_\alpha, M_B) = \sup \{\|T_\alpha u - u\|_{C_{[0,1]}} : u \in M_B\}$.

T_α – семейство интегральных операторов, имеющих вид (3).

Для этого класса решаем задачу типа Колмогорова-Никольского. Эта задача нахождения точных по порядку α оценок верхних граней отклонения функций от их приближений на некотором классе.

Теорема 3.1 Для класса функций M_B , в котором ядро $B(x, t)$ имеет вид (5) справедлива двусторонняя оценка:

$$\frac{1}{2} C^* \tilde{\beta}^2 \alpha^{\frac{1}{4}} - \varphi_1(\alpha) \leq \Delta_1(T_\alpha, M_B) \leq C^* \tilde{\beta}^2 \alpha^{\frac{1}{4}} + \varphi_2(\alpha) \quad (6)$$

где $\varphi_1(\alpha) = O(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha) = O(\alpha)$,

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} \min(\beta_1, \beta_2), & \beta_1, \beta_2 \neq 0, \\ 1, & \beta_1 = 0 \text{ или } \beta_2 = 0 \end{cases}, \quad \tilde{\beta} = \max(\beta_1, \beta_2), \quad C^* = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \cdot q^{\frac{1}{4}}.$$

Доказательство теоремы.

Для оценок величины Δ_1 используем формулу из [4]. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Delta_1(T_\alpha, M_B) &= \sup_{0 \leq x \leq 1} \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^1 K\left(x, \tau, \frac{1}{\alpha}\right) B(\tau, t) d\tau - B(x, t) \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sup_{0 \leq x \leq 1} \left(\int_0^1 (J^*)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Преобразовывая все слагаемые, получаем теорему.

3. В пункте 4 решается задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному δ – приближению. Рассмотрим случай, когда вместо точной функции $\bar{f}(x)$ известна функция f_δ , $\|f_\delta - \bar{f}\|_{X_2} \leq \delta$. Ставится задача получения по f_δ и δ равномерных приближений к $\bar{f}(x)$. Это известная задача из теории некорректно поставленных задач. Она называется задачей восстановления элемента f по его δ -приближению f_δ (см. пункт 1.2). Ее опять же позволяет решить найденный вид интегрального оператора. Кроме того при получении результата потребуется оценка нормы этого оператора (пункт 4.1) и, найденные в теореме 3.1, оценки величины $\Delta_1(T_\alpha, M_B)$.

Теорема 4.1 Для нормы интегрального оператора T_α имеет место равенство

$$\|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} = \frac{\tilde{\beta}^2 \alpha^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2(\beta_1^2 + \beta_2^2)} q^{\frac{1}{4}}} + O\left(\alpha^{\frac{3}{4}}\right)$$

асимптотическое по α , при $\alpha \rightarrow 0$, где $\tilde{\beta} = \max(\beta_1, \beta_2)$.

Теоремы 3.1 и 4.1 дают возможность решить задачу о получении точной по порядку оценки погрешности приближенных решений в задаче восстановления функций на классе M_B и получить согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, обеспечивающее эту оценку (пункт 4.2). Рассматривается величина:

$$\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B) = \sup \left\{ \|T_\alpha f_\delta - f\|_{C_{[0,1]}} : f \in M_B, \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta \right\}$$

Теорема 5.1 Справедлива двусторонняя не улучшаемая по порядку δ , при

$\delta \rightarrow 0$ оценка:

$$C_2 \delta^{\frac{1}{2}} - o\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right) \leq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B) \leq C_1 \delta^{\frac{1}{2}} - o\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right),$$

где

$$\alpha(\delta) = \frac{\delta^2(\beta_1^2 + \beta_2^2)}{2q(\beta_1 + \beta_2)^2},$$

$$C_1 = \frac{2^{\frac{3}{4}} \tilde{\beta}^2 (\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{3}{4}}}, \quad C_2 = \frac{(\tilde{\beta}^2 + 2\tilde{\beta}^2)(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{9}{4}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Этот метод получения оценок погрешностей был разработан Г.В. Хромовой на базе решения задачи Колмогорова –Никольского.

Отправным моментом при доказательстве теоремы является известная оценка для величины $\Delta(\delta, T_\alpha, M_B)$, которая применительно к нашей задаче имеет вид:

$$\frac{1}{2}(\Delta_1(T_\alpha, M_B) + \|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} \delta) \leq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B) \leq \Delta_1(T_\alpha, M_B) + \|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} \delta.$$

Используя Теорему 3.1 и Теорему 4.1 получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} C^* \tilde{\beta}^2 \alpha^{\frac{1}{4}} + \frac{\tilde{\beta}^2 \alpha^{-\frac{1}{4}} \delta}{\sqrt{2(\beta_1^2 + \beta_2^2) q^{\frac{1}{4}}} - \varphi_2(\alpha)} \right) &\leq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B) \leq \\ &\leq \left(C^* \tilde{\beta}^2 \alpha^{\frac{1}{4}} + \frac{\tilde{\beta}^2 \alpha^{-\frac{1}{4}} \delta}{\sqrt{2(\beta_1^2 + \beta_2^2) q^{\frac{1}{4}}} + \varphi_1(\alpha)} \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\varphi_1(\alpha) = O(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha) = O(\alpha)$

Обозначим через

$$\vartheta(\alpha) = C^* \tilde{\beta}^2 \alpha^{\frac{1}{4}} + \frac{\tilde{\beta}^2 \alpha^{-\frac{1}{4}} \delta}{\sqrt{2(\beta_1^2 + \beta_2^2) q^{\frac{1}{4}}}}$$

Исследуем функцию $\vartheta(\alpha)$ на экстремум, т.е. находим производную по α , приравниваем ее к нулю и находим зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$.

$$\vartheta'(\alpha) = \frac{1}{4} C^* \tilde{\beta}^2 \alpha^{-\frac{3}{4}} - \frac{\tilde{\beta}^2 \delta}{4 \sqrt{2(\beta_1^2 + \beta_2^2) q^{\frac{1}{4}}} \alpha^{-\frac{5}{4}}} = 0$$

$$C^* \tilde{\beta}^2 \alpha^{-\frac{3}{4}} = \frac{\tilde{\beta}^2 \delta}{\sqrt{2(\beta_1^2 + \beta_2^2) q^{\frac{1}{4}}} \alpha^{-\frac{5}{4}}},$$

Учитывая, что $C^* = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \cdot q^{\frac{1}{4}}$, получаем

$$\delta \alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} (\beta_1 + \beta_2)}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)},$$

$$\alpha^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} q^{\frac{1}{2}} (\beta_1 + \beta_2)},$$

$$\alpha = \alpha(\delta) = \frac{\delta^2(\beta_1^2 + \beta_2^2)}{2q(\beta_1 + \beta_2)^2}.$$

Подставляем найденное согласование в (5.1):

$$\frac{\tilde{\beta}^2(\beta_1 + \beta_2)q^{\frac{1}{4}}}{4(\beta_1^2 + \beta_2^2)} \cdot \frac{\delta^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\tilde{\beta}^2\delta}{2\sqrt{2}q^{\frac{1}{4}}(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\delta^{-\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{-\frac{1}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{4}}(\beta_1 + \beta_2)^{-\frac{1}{2}}} \leq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B) \quad (5.2)$$

$$\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B) \leq \frac{\tilde{\beta}^2(\beta_1 + \beta_2)q^{\frac{1}{4}}}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)} \cdot \frac{\delta^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\tilde{\beta}^2\delta}{\sqrt{2}q^{\frac{1}{4}}(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\delta^{-\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{-\frac{1}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{4}}(\beta_1 + \beta_2)^{-\frac{1}{2}}} \quad (5.3)$$

Упрощаем (5.2):

$$\frac{\tilde{\beta}^2(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{4}} + 2\tilde{\beta}^2\delta^{\frac{1}{2}}(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{9}{4}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)} \leq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B),$$

$$\frac{\delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{\beta}^2 + 2\tilde{\beta}^2)(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{9}{4}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)} \leq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B),$$

$$\frac{\delta^{\frac{1}{2}}(\tilde{\beta}^2 + 2\tilde{\beta}^2)(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{9}{4}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{3}{4}}} \leq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B).$$

Упрощаем (5.3):

$$\frac{\tilde{\beta}^2(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{4}} + \tilde{\beta}^2\delta^{\frac{1}{2}}(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)} \geq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B),$$

$$\frac{2\tilde{\beta}^2\delta^{\frac{1}{2}}(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}(\beta_1^2 + \beta_2^2)} \geq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B),$$

$$\frac{\frac{3}{2^4}\tilde{\beta}^2\delta^{\frac{1}{2}}(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{2}}}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{3}{4}}} \geq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B).$$

Таким образом теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В дипломной работе, используя функционал Тихонова, был разработан новый модифицированный метод, который позволил получить абсолютно новые результаты: построить семейство интегральных операторов; решить задачу типа Колмогорова – Никольского на некотором классе функций; решить известную задачу восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению.

Этот метод получения оценок погрешностей был разработан Г.В. Хромовой на базе решения задачи Колмогорова – Никольского. Следует отметить, что первоначально поставленные задачи решались в частном случае при $\beta_2 = 0$ и $p = q = 1$ (см. [4]). Обобщение условий привело к появлению в ходе доказательств значительных трудностей как технического, так и теоретического характера. Была проведена проверка результатов общего случая на частный, которая подтвердила правильность выводов.