Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

МАРТИНГАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К РАСЧЕТУ ОПЦИОНОВ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Зайцева Николая Николаевича

Научный руководитель доцент, к. ф.-м. н.	______________	С. С. Волосивец
Заведующий кафедрой д. ф.-м. н., доцент	______________	С. П. Сидоров

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Оценка различных опционов имеет прикладное значение при разработке стратегий на финансовых и фондовых рынках. На сегодняшний день для оценки опционов создана сложная математическая теория, которой посвещано множество книг и научных статей. Стоит отметить таких ученых, как Самуэльсон, Мертон, Шоулс, внесших основополагающий вклад в создание этой математической теории. Данная теория является уникальным инструментом для ресчетов цен опционов.

Среди объектов изучения теории вероятностей выделяются два класса зависимых случайных велечин, образующих марковские цепи и мартингалы. Параллельно в теории ортогональных рядов были изучены ряды по системам Хаара и Уолша. Оказалось, что частичные суммы рядов интегрируемой функций по этим системам с номерами 2^n совпадают и представляют собой мартингал по отношению к σ-алгебрам, порожденным набором полуинтервалов $[(i-1)/2^n, i/2^n)_{i=1}^{2^n}$. Для этих систем и их обобщений было хорошо известно понятие квадратичной функции. Для системы Уолша она была введена Р.Пэли в 1932 г., в пространствах L^p со степенным весом ее изучал И.Хиршмин (1955). В этоже время изучались различные варианты понятия максимальной функции, предложенной Г.Харди и Дж.Литтлвудом (1930). В частности двоичная максимальная функция $Mdf(x)$ определялась как максимум усреднений модуля функции по $I_n(x)$, где $I_n(x)$ - прамежуток вида $[(i-1)/2^n, i/2^n)$, содержащий Х.Буркхольдер и Ганди (1970) установили эквивалентность описания пространств. $L^p(1 < p < \infty)$ мартингалов в терминах квадратичной функции и максимальной функции, а Б.Девис в том же году рапспространил их результаты на случай $p = 1$, где уже рассматривалось пространство Харди. Эти результаты обобщались в разных направлениях: /beginenumerate /item на более общие классы пространств, включая весовые; /item с использованием различных модификаций квадратичной и максимальной функций. /endenumerate

В разделе 1 данной работы аналог теорем Буркхольдера-Девиса-Ганди доказывается для одного класса симметричных пространств, более широкого, чем те для которых раньше были установленны эти результаты.

Другим важным результатом гармонического анализа стала эквивалентность обычной максимальной функции и ее шари варианта. Аналог этих результатов Ч.Феффермана-Стейна для мартингальных пространств был получен в монографии А.Гарсии. В разделе 1 доказываются подобные результаты для одного класса симметричных пространств.

В продолжении данной выпускной квалификационной работы рассматривается биномиальная модель (B, S)-рынка, а также разбираются понятия верхних и нижний цен в классической модели с дискретным временем.

Биномиальный (B, S)-рынок является наиболее простой моделью рынка с дискретным временем, который широко используется в стохастической финансовой математике для исследования различных финансовых инструментов.

Были поставлены следующие задачи:

— изучение теории (B, S)-рынка;
— разбор основных понятий в более общих моделях с дискретным временем;
— написание программного кода для расчёта вспомогательной величины нахождения цены опциона;
— расчет величин для конкретных опционов.

В разделе 2 данной работы приводятся основные понятия и факты теории (B, S)-рынка, а так же верхних и нижних цен в одношаговой модели. Рассуждения данного раздела основываются на работах А.Н.Ширяева, Л.Рушндорфа, А.В.Мельникова, где подробно и понятно рассматривается теория (B, S)-рынка и теория верхних и нижних цен опционов, в частности. Так же в этом разделе описывается переход от биномиальной к непрерывной модели рынка.

В разделе 3 рассматривается случай более общей N-периодической модели. В качестве основного источника используется статья Л.Рушндорфа, в которой автор рассматривает случай N-периодической модели и её сопоставление с моделью Кокса-Росса-Рубинштейна.

В разделе 4 описывается алгоритм програмного кода на языке Python, расчитывающего вспомогательную величину нахождения цены опциона по формуле, рассмотренной во втором разделе работы. Данный програмный код представлен в приложении А.

Результаты работы были представлены на студенческой научной конференции механико-математического факультета, апрель 2018, Саратов, Саратовский государственный университет. Принимала участие в XIX международной Саратовской зимней школе, 29 января - 2 февраля 2018, Саратов. Также результаты работы были представлены и опубликованы в рамках V Международной молодежной научно-практической конференции «Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками», ноябрь 2016, Саратов, Саратовский государственный университет.

1 Основное содержание работы

В теории мартингалов хорошо известны неравенства Буркхольдера-Ганди-Дэвиса, согласно которым L^p-норма максимальной функции мартингала слабо эквивалентна L^p-норме квадратичной вариации мартингала при $1 < p < \infty$. Для перестановочно инвариантных банаховых функциональных пространств (r.i. BFS, точное определение см. ниже) аналогичный результат был получен У.Джонсоном и Г.Шехтманом.

Мартингальный аналог известной теоремы Ч.Фефффермана-И.Стейна об оценке L^p-нормы максимальной функции через L^p-норму шарп-функции был установлен А.Гарсиа. Для пространств Орлича аналог теоремы Ч.Фефффермана-И.Стейна был получен Р.Лонгом, а для пространств Лоренца близкие результаты доказаны И.Реном.

Для так называемых перестановочно инвариантных квази-банаховых функциональных пространств аналоги неравенств Буркхольдера-Ганди-Дэвиса и Ч.Фефффермана-И.Стейна были установлены К.Хо.

Так как понятие симметричного пространства не совпадает с понятием r.i. BFS, мы доказываем аналоги указанных выше результатов для одного класса симметричных пространств, введенного В.А.Родиным при некоторых ограничениях.

Пусть (Ω, Σ, P) — полное вероятностное пространство, $M(\Omega)$ — множество измерисых на Ω относительно P функций. Для $f : \Omega \to \mathbb{R}$ функцией распределения назовем $P_f(\lambda) = P\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}$, невозрастающая перестановка функции f задается равенством $f^*(t) = \inf\{\lambda : P_f(\lambda) \le t\}$, $t > 0$.

Если $\widetilde{X} = \widetilde{X}(\mathbb{R}_+)$ — банахово пространство измеримых функций на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ (т.е. $\widetilde{X} \subset M(\mathbb{R}_+)$), такое что

1) из неравенства $|x(t)| \le |y(t)|$ на $\mathbb{R}_+$ и $y \in \widetilde{X}$ следует, что $x \in \widetilde{X}$ и $\|x\|_{\widetilde{X}} \le \|y\|_{\widetilde{X}}$;

2) из равноизмеримости $|x|$, $|y|$ и $x \in \widetilde{X}$ следует, что $y \in \widetilde{X}$ и $\|x\|_{\widetilde{X}} = \|y\|_{\widetilde{X}}$,

то $\widetilde{X}$ называется симметричным. Соответственно, банахово пространство $X \subset M(\Omega)$ называется симметричным, если существует симметричное пространство $\widetilde{X}$ на $\mathbb{R}_+$, такое что для любого $f \in X$ верно равенство $\|f\|_X = \|f^*\|_{\widetilde{X}}$.

Определим оператор растяжения равенством $(\sigma_\tau x)(t) = x(t/\tau)$ для

$x \in \widetilde{X}$. Известно, что σ_τ непрерывно в симметричном пространстве $\widetilde{X}$ и что существуют величины

$$\alpha_X = \lim_{\tau \to 0+0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X} \to \widetilde{X}}}{\ln \tau} = \sup_{0<\tau<1} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X} \to \widetilde{X}}}{\ln \tau} \tag{1.1}$$

и

$$\beta_X = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X} \to \widetilde{X}}}{\ln \tau} = \inf_{1<\tau<\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X} \to \widetilde{X}}}{\ln \tau}, \tag{1.2}$$

называемые нижним и верхним индексами Бойда пространства X.

Другой важной характеристикой симметричного пространства X является фундаментальная функция $\varphi_X(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_{\widetilde{X}}$, где χ_E — индикатор множества E. Можно ввести функцию $m_X(t) = \sup_{0<s<\infty} \varphi_X(st)/\varphi(s)$, $t > 0$, и определить другие индексы

$$\alpha_X^* = \sup_{0<\tau<1} \frac{\ln m_X(\tau)}{\ln \tau}, \quad \beta_X^* = \inf_{1<\tau<\infty} \frac{\ln m_X(\tau)}{\ln \tau}.$$

Известно, что $0 \le \alpha_X \le \alpha_X^* \le \beta_X^* \le \beta_X \le 1$ и что для α_X^*, β_X^* верны аналоги (1.1) и (1.2). В работе Т.Шимогаки приведен пример пространства X, такого что $\alpha_X^* = \beta_X^* = 1/2$, $\alpha_X = 0$, $\beta_X = 1$.

Если симметричное пространство X обладает также свойством Фату (т.е. условия $x_n \ge 0$, $x_n \uparrow x$ п.в. на Ω и $\|x_n\|_X \le C < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, влекут $x \in X$ и $\|x\|_X = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X$), то оно называется перестановочно-инвариантным банаховым функциональным пространством (r.i. BFS).

Следуя В.А.Родину, будем рассматривать симметричные пространства X, удовлетворяющие неравенству

$$\|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X} \to \widetilde{X}} \le C \sup_{t>0} \frac{\varphi_X(t\tau)}{\varphi_X(t)}, \quad \tau > 0. \tag{1.3}$$

Отметим, что пространства L^p, $1 \le p \le \infty$, Орлича, Лоренца удовлетворяют условию (1.3).

Важную роль играют слудующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть симметричное пространство X удовлетворяет условию (1.3) и $\beta_X^* < 1$. Тогда найдется $\gamma \in (0,1)$, такое что $\|\sigma_t\|_{\widetilde{X} \to \widetilde{X}} = O(t^\gamma)$, $t \to \infty$.*

Лемма 2. *Пусть симметричное пространство X удовлетворяет условию* (1.3) *и* $\alpha_X^* > 0$. *Тогда при некотором* $\gamma > 0$ *верно соотношение* $\|\sigma_t\|_{\widetilde{X}\to\widetilde{X}} = O(t^\gamma)$, $t \to 0+0$.

Теорема 3. *Пусть* $1 \le r < \infty$, X *— симмметричное пространство, удовлетворяющее условию* (1.3) *и такое, что* $\alpha_X^* > 0$. *Для любого равномерно интегрируемого мартингала* $f = \{f_n\}_{n\ge0}$ *справедливы неравенства*

$$\|M(f)\|_X \le C\|f^\sharp\|_X, \quad \|S(f)\|_X \le C\|f_r^S\|_X, \quad \|s(f)\|_X \le C\|f_r^s\|_X.$$

Теорема 4. *Пусть X — симметричное пространство, удовлетворяющее условию* (1.3) *и такое что* $0 < \alpha_X^* \le \beta_X^* < 1$. *Существуют константы* $C_2 > C_1 > 0$, *такие что для любого равномерно интегрируемого мартингала* $f = \{f_n\}_{n\ge0}$ *справедливо неравенство Буркхольдера-Дэвиса-Ганди*

$$C_1\|M(f)\|_X \le \|S(f)\|_X \le C_2\|M(f)\|_X.$$

Далее рассмотрим модель биномиального рынка. Своё название данная модель получила по причине того, что в ней рассматриваются два вида ценных бумаг: облигации (безрисковый актив) и акции (рисковый актив).

Рассмотрим модель рынка с дискретным временем: на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ цена акции в n-й момент времени задана по формуле

$$X_n = X_0 \prod_{k=1}^{n} Y_k, 1 \le n \le N,$$

где (Y_k, A_k) стохастическая последовательность и Y_k ограниченно $1 \le a_k \le Y_k \le b_k$.

Положим B_n - облигации с постоянными процентами $r_i \ge 0, a_i \le 1+r_i \le b_i$

$$B_n = B_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + r_k).$$

Определение 5. *Стохастическая последовательность* $\pi = (\beta, \gamma)$ *с* $\beta = (\beta_n)$ *и* $\gamma = (\gamma_n)$*; где* β_n *и* γ_n *являются* F_{n-1} *- измеримыми при всех* $n \geq 0$*, называется портфелем ценных бумаг инвестора на биномиальном рынке.*

Определение 6. *Капиталом портфеля ценных бумаг* π *называется стохастическая последовательность* $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\geq 0}$ *с* $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n X_n$*.*

Из рисковых и безрисковых активов формируются портфели ценных бумаг.

Определение 7. *Портфель ценных бумаг* $\pi = (\beta, \gamma)$*, где* $\beta = (\beta_n)$ *и* $\gamma = (\gamma_n)$*,* $n = 0, 1, ..., N$*, называется верхним* (x, f_N) *—хеджем (нижним* (x, f_N) *—хеджем), если* $X_0^\pi \equiv x,\ x \geqslant 0$*,* $X_N^\pi \geqslant f_N$ *п.н. (соответственно,* $X_N^\pi \leqslant f_N$ *п.н.).*

Обозначим

$$H^*(x, f_N, P) = \{\pi : X_0^\pi = x,\ X_N^\pi \geqslant f_N\,(P-\ \text{п.н.})\}$$

- класс верхних (x, f_N) —хеджей

$$H_*(x,\ f_N, P) = \{\pi :\ X_0^\pi = x,\ \ X_N^\pi \leqslant\ f_N\,(P-\ \text{п.н.})\}$$

- нижних (x, f_N) —хеджей.

$f_N -$ платёжное обязательство, тогда величины

$$C^*(f_N, P) = \inf\{x : \exists\pi,\ \text{для которого}\ X_0^\pi = x \text{ и } X_N^\pi \geqslant f_N\}, \tag{1.4}$$

$$C_*(f_N, P) = \sup\{x : \exists\pi,\ \text{для которого}\ X_0^\pi = x \text{ и } X_N^\pi \leqslant f_N\}, \tag{1.5}$$

называются верхней и нижней ценой (хеджирование платежного обязательства f_N).

Определение 8. *Рынок называется безарбитражным, если для любогй стратегии* pi*, такой что* $X_0^\pi = x$ *и* $X_N^\pi \geq 0$ *п.н. следует, что* $X_N^\pi = 0$ *п.н.*

Теорема 9. *(достаточное условие безарбитражности) Пусть существует мера* $\widetilde{P}$*, эквивалентная исходной мере* P *и такая, что* $\widetilde{X}_N$ *является мартингалом относительно* $(\Omega, F_N, \widetilde{P})$*, тогда "ранок безарбитражный.*

Цены (1.4) и (1.5) порождены классом верхних $H^*(x, f_N, P)$ и нижних $H_*(x,\ f_N, P)$ стратегий хеджирования соответственно. На безарбитражном рынке цены имеют следующие представления

$$C^*(f_N, P) = \sup_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(P)} B_0\, E_{\tilde{P}}\, \frac{f_N}{B_N}, \tag{1.6}$$

$$C_*(f_N, P) = \inf_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(P)} B_0\, E_{\tilde{P}}\, \frac{f_N}{B_N}, \tag{1.7}$$

где $\mathcal{P}(P)$ — множество всех мартингальных мер $\mathcal{P}$ для дисконтированного процесса (S_N/B_N) эквивалентных P, которое не пусто.

Для одношаговой модели $N = 1$,

$$B_1 = B_0(1 + r), \quad X_1 = X_0(1 + \rho), \tag{1.8}$$

где процентная ставка $r(r \geq 0)$ есть константа, процентная ставка $\rho(\rho \geq 0)$ является случайной величиной.

Поскольку вся "случайность"в модель входит через значение ρ, то достаточно оперировать с распределением вероятностей $= (d\rho)$ на числовой прямой $\mathbb{R} = \rho : |\rho| < \infty$ с борелевской системой $\mathscr{B}(\mathscr{P})$.

Будем предпологать, что носитель меры $(d\rho)$ сосредоточен на интервале $[a, b]$, где $0 \leqslant a < b < \infty$. Если мера $(d\rho)$ сосредоточена в точках a и b, то (1.8) является одношаговой моделью Кокса-Росса-Рубинштейна.

Тогда имеем

$$C^*(P) = \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(P)} (\beta + \gamma\, X_0), \tag{1.9}$$

$$C_*(P) = \sup_{(\beta,\gamma)\in H^*(P)} (\beta + \gamma\, X_0), \tag{1.10}$$

где

$$H^*(P) = \{(\beta, \gamma) : \beta\, B_1 + \gamma\, X_1 \geqslant f(X_1)\,(P - \text{п.н.})\} \tag{1.11}$$

$$H_*(P) = \{(\beta, \gamma) : \beta\, B_1 + \gamma\, X_1 \leqslant f(X_1)\,(P - \text{п.н.})\} \tag{1.12}$$

Рассмотрим входящее в $H^*(P)$ ограничение

$$\beta(1 + r) + \gamma X_0(1 + \rho) \geq f(X_0(1 + \rho))(P - \text{п.н.}) \tag{1.13}$$

и введем класс $\mathscr{P}(P) = \widetilde{P} = \widetilde{P}(d\rho)$ распределений на $[a, b]$, обладающих следующими свойствами:

1. $\widetilde{P} \sim P$

   (т.е. меры $\widetilde{P}$ и P взаимно абсолютно непрерывны: $\widetilde{P} \ll P, P \ll \widetilde{P}$)

2. $$\int_a^b \rho \widetilde{P}(d\rho) = r \tag{1.14}$$

Будем предпологать, что этот класс $\mathscr{P}(P) \neq \varnothing$.

Сделаем теперь следующее предложение относительно множества мартингальных мер $\mathscr{P}(P)$:

(A^*): существует подпоследовательность мер, скажем $(\widetilde{P}_n)_{n\geq 1}$, из $\mathscr{P}(P)$, слабо сходящаяся к мере P^*, сосредоточенной в двух точках a и b.

Теорема 10. *Пусть функция платежного обязательства $f(X_0(1+\rho))$ является выпуклой и непрерывной по ρ на $[a, b]$, и выполнено условие слабой компактности (A^*). Тогда верхняя цена*

$$C^*(P) = \sup_{\widetilde{P} \in \mathscr{P}(P)} E_{\widetilde{P}} \frac{f(X_0(1+\rho))}{1+r}. \tag{1.15}$$

При этом $\sup$ достигается на мере P^* и

$$C^*(P) = \frac{r-a}{b-a}\frac{f_b}{1+r} + \frac{b-r}{b-a}\frac{f_a}{1+r}, \tag{1.16}$$

где $f_{a,b} = f(X_0(1+\rho))$.

Предположим, что выполнено следующее условие.

(A_*): существует подпоследовательность мер $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geq 1}$ из $\mathscr{P}(P)$, слабо сходящаяся к мере P_*, сосредоточенной в одной точке f_ρ.

Для N-периодической модели верхняя граница возникает из модели Кокса-Росса-Рубинштейна, а нижняя соответствует константе $Y_i = 1 + r_i$.

Такое утверждение базируется на сверх-хеджировании портфелей в случае, когда $Y_1, ..., Y_N$ -независимы, $f_N = f(X_N)$, f -выпуклая, $a_k = 1+u$, $r_k = r$, а $d < r < u$. В этом случае, при соответственном аппроксимирующем предположении, верхняя цена определяется следующим образом:

$$C^*(f_N, P) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^{N} C_n^k \left(\frac{r-d}{u-d}\right)^{N-k} \times$$
$$\times \left(\frac{u-r}{u-d}\right)^k f\left(X_0(1+u)^{N-k}(1+d)^k)\right) \tag{1.17}$$

$$C_*(f_N, P) = \frac{(f(X_0(1+r)^N))}{(1+r)^N} \tag{1.18}$$

Рассмотрим технику увеличения риска распределения, основанную на идее сохранения среднего. Вероятностная меря Q_2 сохраняет среднее Q_1 на заданном интервале $[a, b]$ если на этом интервале масса смещена к границам, в то время как среднее сохраняется. В терминах случайных переменных Z сохраняет среднее Y на интервале $[a, b]$, если

1. $P^Z(B) = P^Y(B)$ при $B \cap [a, b] = \oslash$;
2. $P^{Y1_{[a,b]}(Y)} \preceq_{cx} P^{Z1_{[a,b]}(Z)}$;

где $\preceq_{cx}$ - это выпуклое упорядочивание.

В теории вероятностей и математической статистике, стохастический порядок определяет критерий, по которому можно судить, когда одна случайная переменная больше другой. Для выпуклого упорядочивания A меньше, чем B если и только если для любых выпуклых u, $E[u(A)] \leq E[u(B)]$.

Отношения 1 и 2 подразумевают, что

$$EZ1_{[a,b]}(Z) = EY1_{[a,b]}(Y).$$

Далее, для некоторой выпуклой функции f, такой что $Ef(Z)$ существует, утверждается неравенство:

$$Ef(Y) \leq Ef(Z) \tag{1.19}$$

отсюда, Y меньше чем Z в выпуклом упорядочивании, $Y \preceq_{cx} Z$.

Пусть (X_n, A_n) неотрицательная стохастическая последовательность $X_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i$, где $a_i \leq Y_i \leq b_i$, $a_i \leq 1 \leq b_i$, и $f(x_1, ..., x_N)$ - выпуклая функция. Значение выпуклой функции платёжного обязательства $f(X_1, ..., X_N)$ можно соотносить со значением из модели Кокса-Росса-Рубинштейна.

Утверждение 11. *(сравнительная лемма) Пусть $Q \in \mathcal{P}(P)$ - произвольная эквивалентная мартингальная мера для (X_n). Тогда*

$$E_Q f(X_1, ..., X_N) \leq E_Q f(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_N),$$

где $\tilde{X}_n = \prod_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i$, $(\tilde{Y}_i)$ - независимые с распределениями $Q^{\tilde{Y}_i} = Q^{(Y_i)\binom{a_i}{b_i}}$, $\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_N$ - это CRR- модель и

$$E_Q f(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_N) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{T \subset 1,...,N} \prod_{l \in T} q_l^* \prod_{l \notin T} p_l^* f\left(X_*^{k,T}\right), \tag{1.20}$$

где $X_*^{k,T} = (c_1, ..., c_N)$, $c_j = \prod_{i=1}^{j} d_i$ и $d_i = \begin{cases} a_i, & i \in T \\ b_i, & i \notin T \end{cases}, p_k^* = \frac{1-a_k}{b_k-a_k} u q_k^* = \frac{b_k-1}{b_k-a_k}$.

Утверждение 11 позволяет сравнивать мартингал $X_1, ..., X_N$ с мартингалом CRR-модели $\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_N$, который порождает верхнюю цену функции платёжного обязательства $f_N = f(X_1, ..., X_N)$, повышая риск.Рассмотрим следующую модель рынка с дискретным временем: на вероятностном пространстве (Ω, A, P) цена акции в n-й момент времени задана по формуле

$$X_N = X_0 \prod_{k=1}^{n} Y_k, \quad 1 \leq n \leq N, \tag{1.21}$$

где (Y_k, A_k) стохастическая последовательность и Y_k ограничено $0 \leq a_k \leq$ $\leq Y_k \leq b_k$.

Положим B_n - облигации с постоянными процентами $r_i \geq 0$,
$a_i \leq 1 + r_i \leq b_i$

$$B_N = B_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + r_k) \tag{1.22}$$

Допустим следующие аппроксимирующие условия:

(A^*) Пусть существует последовательность $(Q_n) \subset \mathcal{P}(P)$, такая что

$Q_n^{X_1,\dots,X_n}$ слабо сходится к мере CRR-модели $Q^* = \bigotimes_{i=1}^N Q_i^*$, причём

$$Q_k^*(\{b_k\}) = p_k^* = \frac{1 + r_k - a_k}{b_k - a_k},$$
$$Q_k^*(\{a_k\}) = q_k^* = \frac{b_k - 1 - r_k}{b_k - a_k}.$$

Условие (A^*) выполняется для $\forall \epsilon > 0$ и $T \subset \{1, \dots, N\}$,

$$P\left(\prod_{k\in T}[a_k, a_k + \epsilon] \times \prod_{k\notin T}[b_k - \epsilon, b_k]\right) > 0.$$

(A_*) Пусть существует последовательность $(\bar{Q}_n) \subset \mathcal{P}(P)$, такая что $\bar{Q}_n^{X_1,\dots,X_n}$ слабо сходится к мере CRR-модели $Q_* = \bigotimes_{i=1}^N (Q_i)_*$, где

$$(Q_i)_*(\{1 + r_i\}) = 1,$$

это одноточечная мартингальная мера для $\left(\frac{X_N}{B_N}\right)$.

Теорема 12. *(формула верхней и нижней цены) При условии (A^*) и (A_*), верхняя и нижняя цены для N-мерной модели с дискретным временем определяются по формулам*

$$C^*(f_N, P) = B_0 E_{Q^*} \frac{f_N}{B_N}$$

и

$$C_*(f_N, P) = B_0 E_{Q_*} \frac{f_N}{B_N}.$$

Здесь Q^* - CRR-мартингальная мера, в то время как Q_* - мера определенная в (A_*).

Как было показано в данной работе, формула 1.20 имеет важное значение, а именно позволяет найти величину $E_Q f(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_N)$ необходимую для расчета цен опционов. Поэтому было принято решение написать програмный код, расчитывающий эту величину.

Напомним, что формула имеет вид

$$E_Q f(\tilde{X_1}, ..., \tilde{X_N}) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{T\subset 1,...,N} \prod_{l\in T} q_l^* \prod_{l\notin T} p_l^* f\left(X_*^{k,T}\right),$$

где

$$X_*^{k,T} = (c_1, ..., c_N),$$

$$c_j = \prod_{i=1}^{j} d_i,$$

$$d_i = \begin{cases} a_i, & i \in T \\ b_i, & i \notin T \end{cases},$$

$$p_k^* = \frac{1 - a_k}{b_k - a_k} \text{ и } q_k^* = \frac{b_k - 1}{b_k - a_k}.$$

Для реализации было решено использовать язык программирования Python.

Следуя принципам объктно-ориентированного программирования, данный програмный код разделен на классы для наглядности и лучшей расширяемости.

Главным классом и основной точкой входа является ласс Main.py. Для получения результата необходимо запустить этот класс, при условии, что имеются все последующие. Здесь происходит взаимодействие программы с пользователем, а именно:

1. Запрос и получение необходимых входных данных от пользователя;
2. Обработка полученных данных и вызов основного кода для расчета формулы;
3. Вывод результата работы программы.

Рассмотрим пункты подробнее.

1. С помощью команды вывода текста в консоль (print ("text")) программа выводит сообщение для пользователя с просьбой ввести необходимые дан-

ные, а именно, N, a_i и b_i для $\forall i = 1, ..., N$, функцию платежного оябзательства f. Причем в качестве функции необходимо ввести ее идентификатор, с помощью которого будет определяться требуемая функция.

В свою очередь пользователь должен ввести все необходимые данные в консоль.

2. Данные, полученые от пользователя из консоли передаются в метод getFormula класса Formula для дальнейшего расчета необходимого значения.

3. После всех расетов программа выводит результат сообщением: "$E_Q f(X_1, ..., X_N) <=$ полученный результат".

Итак, из главного класса Main вызывается метод метод getFormula класса Formula. Данный класс занимается непосредственным расчетом формулы, а также является входной точкой для подпрограмм.

Непосредственно метод getFormula получает на вход данные N, a_i и b_i для $\forall i = 1, ..., N$, идентификатор функции платежного оябзательства f, полученные в Main. Далее внутри рассчитывается внешняя сумма формулы.

Метод накапливает значение результата внутренней суммы в переменной result внутри цикла for. Стоит отметить, что изначально данная переменная пологается равной нулю для при инициализации для корректности расчетов. В конечном итоге метод возвращает resault = значению формулы.

Второй метод класса Formula, а именно innerSum расчитывает внутреннюю сумму формулы.

В качестве входных данных метод принимает все теже параеметры N, a_i и b_i для $\forall i = 1, ..., N$, идентификатор функции платежного оябзательства f и переменную-индикатор, которая по сути является номером шага итерации внешней суммы.

Сумма накапливается с помощью цикла for, где количество итераций равно количеству массивов Т. Таким образом, считается сумма произведений PQ (полученных с помощью метода intersectionPQ класса helperFormula) и значений вункции f (полученных с помощью метода getFunction класса Function) и записывается в переменную resault, которая также, как и в предыдущем методе, инициализируется как 0.

В качестве результата метод возвращает внутреннюю сумму для требуемого номера итерации внешней суммы - индикатор.

Значение функции для предыдущего метода рассчитывается в методе

$getFunction$ класса $Function$. Данный метод принимает в качестве входного параметра идентификатор пфункции f платежного обязательства в виде строки и массив элементов $c_j, j = 1, ..., N$. Метод обрабатывает полученный идентификатор и преобразует ее в формулу.

Причем данный модуль является точкой расширения для внедрения других функций. когда пользователь вводит идентификатор, соответствующий определенной константе, программа выбирает необходимую функцию и подставляет ее в формулу. На данный момент представленны еонстанты "evro" (идентификатор функции европейского опциона) и "asia" (идентификатор функции азиатского опциона).

Далее, программа подставляет массив c_j в полученную формулу и возвращает значение функции в качестве результата.

Для нахождения всех массивов $T(T \subset 1, ..., N)$ в методе innerSum класса Formula используется метод getAllT класса Sochetania. Данный метод находит все множества T содержащиеся в $1, ..., N$, используя технику поиска сочетаний. Для поиска всех T, в классе также приссутствуют методы нахождения факториала и сочетаний. В качестве результата метод getAllT возвращает двумерный массив множеств T.

Последним классом, помогающим рассчитать значение метода innerSum класса Formula является класс helperFormula. В данном классе приведены следующие вспомогательные методы:

1. getQk - метод, принимающий на вход начения a_k и b_k и расчитывающий q_k;
2. getPk - метод, принимающий на вход начения a_k и b_k и расчитывающий p_k;
3. getDi - метод, принимающий на вход начения a_i, b_i, i и множество T и расчитывающий d_i;
4. getCj - метод, принимающий на вход начения a_k, b_k, j и множество T и расчитывающий C_j;
5. getAllCj - метод, принимающий на вход начения a_k, b_k, N и множество T и заполняющий массив c_j в цикле, рассчитанных с помощью метода getCj;
6. isContain - вспомогательный метод, показывающий, содержится ли элемент one в массиве two. В качестве входных данных принимает число

one и множество чисел two. В результате возвращает true, если элемент содержится в массиве и false, если не содержится;

7. intersectionPQ - накапливает внутреннюю сумму.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опцион - это некоторый контракт, в котором оговариваются покупатель и продавец, а так же их права и обязательсятва. Покупатель имеет право исполнить или не исполнить данный контракт. Продавец имеет определенные в контракте финансовые обязательства перед покупателем. Например, купить или продать в будущем актив по оговоренной цене.

Биномиальная модель оценивания опционов является широко распространенным и с точки зрения математики достаточно простым численным методом расчета цен опционов. Своё название данная модель получила по причине того, что в ней рассматривается два вида ценных бумаг: акции и облигации.

Дискретная модель рынка была разработана в статьях Кокса, Росса, Рубинштейна, Харрисона, Крепса и Ширяева.

В данной работе были рассмотренны базовые понятия теории биномиального рынка, верхней и нижней цены опционов в общих моделях с дискретным временем. Были приведены основные понятия теории биномиального рынка, понятия верхних и нижних цен опционов. Рассмотренны в случае одношаговой модели (B, S)-рынка и способ расчета указанных цен. Так же каснулись теории перехода от биномиальной к непрерывной модели рынка и формулы Блека-Шоулса.

На основе одношаговой модели был рассмотрен случай более общей N-периодической модели. Данная теория основывается на статье Рушендорфа, в которой были обнаруженны неточности в формулировке одного из утверждений. Они были исправленны и приведено доказательство неточности изначальной формулировки, а именно контр-пример.

В последней части работы был описан алгоритм програмного кода (Приложения А) на языке Python для расчетов вспомогательной величины нахождения цены опциона по формуле, рассмотренной в первом разделе работы.

Программа была написана на принципах объектно-ориентированного программирования, что позволяет сделать ее расширяемой и использовать в дальнейшем для любых функций, удовлетворяющих условиям из первого раздела. Так же были приведены опционы: азиатский и европейский с функцией платежного обязательства $f(X_1, ..., X_N) = max(X_1, ..., X_N)$. Для указанных примеров были показаны результаты работы программы.

Таким образом, задачи выпускной квалификационной работы были достигнуты. Результаты работы могут использоваться для дальнейшего изучения теории верхних и нижних цен, а так же для их расчета.