Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ В СТРАХОВОМ БИЗНЕСЕ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Копнина Игоря Андреевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ____________ В. Р. Шебалдин

Заведующий кафедрой
доцент, д. ф.-м. н. ____________ С. П. Сидоров

Саратов 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Страхование считается одним из основных звеньев финансовой системы страны. История страхования - одна из древнейших категорий в развитии общественных отношений. Начало периода страхования относится к далекому прошлому в истории человечества.

Страхование является категорией исторической, оно возникло на первых этапах развития общественного производства как некий механизм защиты товаропроизводителей от рисков, связанных с общественным производством, стихийными бедствиями, потерей здоровья. Зародившись как случайное явление, оно расширяло сферу своего влияния и стало объективной необходимостью, выражая постоянные связи между участниками воспроизводственного процесса.

В современных реалиях процесс страхования можно описать следующим образом. *Страхование* - специальный механизм перераспределения риска между сторонами при заключении страховой сделки. Обычная схема такой сделки состоит в следующем [1]. В качестве покупателя риска выступает страховая компания (страховщик); продавцами риска является группа независимых индивидуумов (страхователей), каждый из которых в соответствии со своей системой предпочтений оценивает угрозу реализации в будущем своего индивидуального риска. Содержание сделки состоит в том, что клиент, желая избавиться от риска и иметь компенсацию в случае возможного ущерба, платит страховой компании определенную сумму и, тем самым, покупает себе ’спокойный сон’ на весь оговоренный период страхования. Страховая компания, получив такие взносы от клиентов, полагает: вероятность того, что у значительной части клиентов произойдут страховые случаи и придется выплачивать огромную сумму компенсаций, мала, и поэтому суммарных взносов хватит, чтобы покрыть реализовавшиеся ущербы клиентов и собственные издержки. Условие совершения сделки - выгодность ее как для клиентов, так и для страховщика, причем решение об этом каждый участник принимает в соответствии со своей системой предпочтений. Для формализации этих предпочтений служит теория полезности. Это теория, которая оценивает вероятную полезность действия - когда есть неопределенность в отношении результата. Он предполагает, что рациональным выбором является выбор действия с самой высокой ожидаемой полезностью.

Теория отмечает, что полезность денег не обязательно совпадает с общей стоимостью денег. Это объясняет, почему люди могут взять страховку. Ожидаемая стоимость от выплаты страховки будет заключаться в потере денежных средств. Но возможность крупномасштабных потерь может привести к серьезному снижению полезности из-за уменьшения предельной полезности богатства [2].

Выпускная квалификационная работа состоит из четырёх разделов. В первом разделе данной работы будет рассмотрено такое понятие как полезность в целом, что из себя представляет направление Теория полезности. В подразделе "Аксиоматика функции полезности"вводятся общие понятия и на основе четырех Аксиом вводится определение функции полезности. Далее, приведен алгоритм построения функции полезности, рассмотрены ее виды, и показано построения функции полезности на примере двух задач.

Во втором разделе поднимается проблема определения страховых взносов. Рассмотрены страховые задач, в которых используется функция полезности. Приведены 3 модели задач:

1. Задача выбора страхового взноса
2. Случай стандартных функций полезности
3. Выбор размера взноса, обеспечивающего заданную вероятность.

В третьем разделе будет рассмотрено такое понятие как Функция неприятия риска. Четвертый раздел является практической частью дипломной работы. Целью является решение задача возможности страхования однородных групп. Зная такие параметры как риск X_i каждого из n клиентов однородной группы, начальные капиталы S клиентов и компании, квадратичные функции полезности $u_0(y)$ и $u_1(y)$. Выяснить, выполнено ли здесь условие возможности страхования, и если да, то определить взаимоприемлемую величину взноса d^0, считая компанию равноправной в сделке всей группе клиентов в целом. Для решения задачи, требуется написать программу, которая проводит все вычисления и выводит решение. Программа написана на языке программирования C++, с использованием свободной интегрированной средой разработки приложений для языков программирования Dev-C++.

Результаты работы были представлены на студенческой научной конференции механико-математического факультета, апрель 2018, Саратов, Саратовский государственный университет. Кроме того, результаты приняты в печать в статье [3] в Сборнике научных статей выпуск 7: Экономика и управление: Проблемы, тенденции, перспективы .

1 Основное содержание работы

Основные определения и понятия будут проходить в рамках статической модели страхования или модели индивидуального риска. Суть ее состоит в следующем. Портфель полисов, проданных страховщиком клиентам, рассматривается как сформированный единовременно и с одинаковым сроком действия договоров: в течение этого периода страхования не появится новых клиентов, и в начале периода каждый из рассматриваемой группы клиентов оплатил свой полис. Последнее условие можно обобщить, предполагая, что вся оговоренная сумма взносов собирается с помощью некоторого механизма многократных выплат в течение всего периода страхования, в этом случае мы будем считать, что компания выполняет свои обязательства по погашению ущербов только в конце периода. Таким образом, в статической модели [5] процесс оплаты исков клиентов сводится к вычитанию суммарного ущерба из суммы собранных взносов (плюс, возможно, дополнительный собственный капитал страховщика).

Суммарный ущерб клиентов обозначим через $X = X_1 + ... + X_n$, где n - численность группы клиентов, $X_i, i = 1, ..., n$ - независимые неотрицательные случайные величины (с.в.) ущербов или рисков отдельных клиентов в денежном выражении. Обозначим через $F(x)$ и $F_i(x)$ соответственно функции распределения (ф.р.) случайных величин и X_i. Группа клиентов называется однородной, если все X_i одинаково распределены $F_1(x) = \cdots = F_n(x)$.

Характерная особенность ф.р. $F_i(x) = P\{X_i \leqslant x\}$ - скачок в нуле, равный вероятности того, что у i-го клиента не произойдет страхового случая [6]. Заплатив *страховой взнос* d_i т.е. цену полиса, i-й клиент получает от компании обязательство погасить всю величину возможного ущерба, компания же имеет в начале периода полученный от клиентов суммарный взнос $D = \sum_1^n d_i$, а также *собственный капитал* или *резерв* S и, с другой стороны, принятый риск . Тогда ее остаточный капитал к концу периода есть случайная величина $Y = S + D - X$.

В теории страхования [7] принято разделять взнос D на две величины: пусть $M = EX < \infty$, тогда положим $D = M + L$. Константу называют *рисковой премией*, а L - *нагрузкой*; часто L измеряется в процентах от M, в этом случае величина $L = \alpha M$ задается *коэффициентом нагрузки* α. Нагрузка разделяется на два слагаемых, первое называют рисковой надбавкой, второеоперационными издержками. Индивидуальные взносы аналогично разделятся на рисковые премии и нагрузки $d_i = M_i + L_i$, где $M_i = EX_i$.

Важный показатель, характеризующий устойчивость страховой компании - это *вероятность неразорения (надежность)* $P\{S + D \geqslant X\}$, она равна значению функции распределения $F(x)$ в точке $S + D$, $P\{S + D \geqslant X\} = F(S + D)$.

Рисковая ситуация, определяющая финансовое положение компании, характеризуется тройкой $(S, D, F(x))$, где $S + D$ образуют страховое покрытие, имеющееся у страховщика, $F(x)$ - распределение суммарного риска. Необходимо отдельно выделить объем собственных средств S в страховом покрытии, так как этот капитал занимает особое место в балансе активов компании: его величина специально контролируется надзорными органами и, с другой стороны, на периоде страхования он находится в форме резерва из высоко ликвидных активов, что приводит к определенным вмененным издержкам страховщика, поскольку эти средства не могут быть использованы в инвестиционных проектах.

Сравнение качества или разных вариантов рисковой ситуации, отвечающих различным схемам страхования, происходит для каждого ее участника согласно шкале предпочтений. Так, для страховщика важным является его остаточный капитал Y на конец страхового периода, который есть случайная величина, причем распределение Y определяется выбранной схемой страхования. Наиболее разработанной и широко используемой на сегодняшний день количественной теорией описания предпочтений на множестве случайных величин является линейная теория полезности, базирующаяся на системе аксиом фон Неймана и Моргенштерна [8].

Пусть принимающий решения индивидуум (ИПР) поставлен перед задачей сравнения случайных величин(выигрышей) из некоторого заданного семейства с.в. $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$, которые могут принимать, вообще говоря, как положительные, так и отрицательные значения. Множество, в котором выигрыши принимают свои возможные значения, обозначим через B; в терминологии теории вероятностей B есть борелевское пространство [9]. Для наших целей достаточно считать B отрезком числовой прямой либо бесконечным интервалом (полуинтервалом).

В силу самой постановки задачи, ИПР фактически сравнивает распределения $F_\alpha(y)$ случайных величин Y_α из $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и, таким образом, предметом изучения являются предпочтения ИПР на множестве вероятностных распределений. Будем считать, что его предпочтения удовлетворяют некоторому набору аксиом, которые можно охарактеризовать как 'разумные' или 'эмпирически' обоснованные.

Аксиома 1 (О сравнимости выигрышей). *Для любых выигрышей Y_1 и Y_2 ИПР всегда может указать, какой ему более предпочтителен, $Y_1 > Y_2$ или $Y_2 > Y_1$, или же они оба эквивалентны $Y_1 \sim Y_2$. Иными словами, все выигрыши для него сравнимы так же, как и числа из подмножества вещественной прямой.*

Интуитивно кажется, что для такого ИПР должен существовать некоторый *функционал полезности* выигрышей $U[Y]$, который сопоставляет каждому случайному выигрышу Y вещественное число так, что $Y_1 > (\sim) Y_2$ тогда и только тогда, когда $U[Y_1] > (=) U[Y_2]$. Следствием приведенных ниже будет формальное обоснование существования такого $U[Y]$ и, более того, определение вида функционала $U[Y]$. Можно сказать, что $U[Y]$ окажется линейным функционалом интегрального типа $U[Y] = \int_B u(y)dF(y)$, определенным на множестве функций распределения $F(y)$ выигрышей, где подынтегральная функция $u(y)$ есть функция полезности нашего ИПР. Именно линейность $U[Y]$ по распределению $F(y)$ определила название 'линейная теория полезности', которая известна также и как 'теория ожидаемой полезности'.

Аксиома 2 (транзитивности). *Если $Y_1 > Y_2$ и $Y_2 > Y_3$, то $Y_1 > Y_3$. Аналогично для соотношения эквивалентности: если $Y_1 \sim Y_2$ и $Y_2 \sim Y_3$, то $Y_1 \sim Y_3$.*

Аксиома 3 (независимости). *Пусть $Y_1 > Y_2$, и Y_3 - произвольный случайный выигрыш из Y_α из $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Тогда для любого $\alpha \in (0,1)$ выигрыш $Y_{1,3}^\alpha$, который определяется как равный с.в. Y_1 с вероятностью α и равный с.в. Y_3 с вероятностью $1-\alpha$, предпочтительнее $Y_{2,3}^\alpha$, аналогично составленного из Y_2 и Y_3.*

Если перейти к функциям распределения доходов, то аксиома независимости сводится к тому, что для сравнения распределений $P\{Y_{1,3}^\alpha \le x\} = \alpha F_1(x) + (1-\alpha)F_3(x)$ и $P\{Y_{2,3}^\alpha \le x\} = \alpha F_2(x) + (1-\alpha)F_3(x)$ общий закон распределения F_3, выбираемый в обоих выигрышах с вероятностью $1-\alpha$

Аксиома 4 (устойчивости предпочтений)**.** *Пусть для некоторых трех выигрышей выполнено* $Y_1 < Y < Y_2$*. Тогда найдутся числа* $\alpha, \beta \in (0,1)$*, такие, что* $Y < Y_{1,2}^{\alpha}$ *и* $Y > Y_{1,2}^{\beta}$.

В частности, это говорит о том, что если Y не самый 'худший' выигрыш из всех ($Y_1 < Y$), то никакой другой выигрыш Y_2 не может быть полезным настолько, чтобы для любой(малой) вероятности $1 - \beta > 0$, приписанной Y_2, выполнялось бы $Y < Y_{1,2}^{\beta}$.

Основной результат, лежащий в основе линейной теории полезности, утверждает, что следствием этих аксиом будет существование скалярной функции $u(y)$ на B, называемой функцией полезности ИПР, такой, что для каждой пары выигрышей выполнено: $Y_1 > (\sim) Y_2$ тогда и только тогда, когда $Eu(Y_1) > (=) Eu(Y_2)$, т.е. функционал полезности ИПР имеет вид:

$$U[Y] = Eu(Y)U[Y] = \int_B u(y)dF(y).$$

Более того, если $U_1[Y]$ - другой функционал полезности данного ИПР, то $U_1[Y] \equiv kEu(Y) + C$ для некоторых констант $k > 0$ и C; другими словами, функция полезности $u(y)$ определяется однозначно с точностью до положительного линейного преобразования [6].

Пусть начальный капитал ИПР есть детерминированная сумма x, тогда вместе с выигрышем Y общий капитал составит с.в. $x + Y$. Предположим, что функция полезности ИПР $u(y)$ определена на выпуклом множестве $B \subseteq R^1$, не убывает и кусочно-непрерывна; выигрыш Y назовем *допустимым при капитале* x, если

1. $x + Y$ принимает значения в B
2. $EY < \infty$,
3. $Eu(Y) < \infty$,

Определение 1. *Число* $eq = eq[x, Y]$ *- денежный эквивалент* Y *при капитале х, если оно является наименьшим обобщенным корнем уравнения*

$$u(x + eq) = Eu(x + Y) \tag{1.1}$$

Определение 2. *Число* $\pi = \pi[x, Y]$ *- плата за риск для выигрыша* Y *при* *капитале x, если оно является наибольшим обобщенным корнем уравнения*

$$u(x + EY - \pi) = Eu(x + Y) \tag{1.2}$$

Следующая ниже теорема устанавливает, что 'осторожность' ИПР, понимаемая в описанном выше смысле, означает вогнутость его функции полезности $u(y)$.

Теорема 1. *Пусть $u(y)$ - неубывающая функция, тогда:*

1. *если для любой лотереи Y с двумя возможными исходами: $P\{Y = y_1\} = p$ и $P\{Y = y_2\} = 1 - p$, плата за риск $\pi[Y] = \pi[0, Y] \geqslant 0$, то $u(y)$ вогнута;*
2. *если $u(y)$ вогнута, то для любого выигрыша Y и капитала x выполнено $\pi[x, Y] \geqslant 0$.*

Теорема 2. *Пусть $u(y)$ - возрастающая функция, тогда:*

1. *если для любой лотереи $Y : P\{Y = y_1\} = p$ и $P\{Y = y_2\} = 1 - p$, где $y_1 \neq y_2$ и $p \in (0, 1)$, плата за риск $\pi[Y] > 0$, то $u(y)$ строго вогнута;*
2. *если $u(y)$ строго вогнута, то для любого капитала x и недетерминированного выигрыша Y выполнено $\pi[x, Y] \geqslant 0$.*

В втором разделе рассмотрены основные типы функций полезности, а также модели задач, в которых применяют функцию полезности Участники страховой сделки, описанные раннее, - страховщик и страхователи - для того, чтобы сделка состоялась, должны прийти к взаимоприемлемому решению о величине взносов (тарифов); при этом страховщика, принимающего суммарный риск, интересует прежде всего суммарный взнос D, а каждого отдельного клиента - величина его индивидуального взноса d_i. Формализация понятия 'взаимоприемлемости' и составляет предмет изучения в данном разделе. Ниже будут рассмотрены: вычисление D и d_i как Парето-оптимального решения некоторой многокритериальной задачи, а также установившийся в страховой практике способ расчета взносов начислением рисковой надбавки (нагрузки) с помощью экзогенного показателя типа коэффициента нагрузки.

Рассмотрим первый вид задач: *задача выбора страхового взноса* в рамках теории полезности. Исходя из того, что каждый из $n+1$ участников сделки стремится максимизировать свою ожидаемую полезность [15], мы приходим к следующей многокритериальной задаче максимизации

$$\begin{cases} J_0(d) \equiv Eu_0(S + \sum_1^n d_i - X) \to max \\ J_i(D) \equiv u_i(S_i - d_i) \to max \\ i = 1, \dots, n \\ d = (d_1, ..., d_n) \in A \end{cases} \tag{2.3}$$

Утверждение 1. *Пусть d_0 является решением задачи*

$$\begin{cases} \sum_0^n \lambda_i J_i(d) \to max \\ d \in A \end{cases}$$

где λ_i - произвольные константы, такие что $\lambda_i > 0, \sum_0^n \lambda_i = 1$. Тогда d_0 - одна из Парето-оптимальных точек в задаче (2.3)

Утверждение 2. *Пусть A - выпуклое множество и $J_i(d), i = 0, \dots, n$, вогнуты на A. Если d_o оптимальна на Парето в (2.3), то существуют такие константы $\lambda \geq 0, \sum_0^n \lambda_i = 1$, что d^0 есть точка максимума $\sum_0^n \lambda_i J_i(d)$ на A.*

Следующие модели страховых задач в данной главе, будут рассматриваться только при случаях однородной группы клиентов, когда все риски X_i одинаково распределены, $u_1(y) = u_2(y) = \cdots = u_n(y)$ и $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$. В силу симметрии (все клиенты ведут себя одинаково), в искомом векторе взносов $(d_1, \dots, d_n)$ все компоненты можно полагать одинаковыми $d_i = d, i = 1, \dots, n$, тогда условие возможности страхования (2.2) имеет вид

$$D^*/n \leq d^* \tag{2.4}$$

множество допустимых размеров взносов есть отрезок $A = [d^*/n, d^*]$, а общая задача (2.3) сводится к двухкритериальной задаче

$$\begin{cases} Eu_0(S + nd - X) \to max \\ u_1(S_1 - d) \to max \\ d \in [D^*/n, d] \end{cases} \tag{2.5}$$

Рассмотрим случай стандартных экспоненциальных функций полезности и примеры задачи, использующие экспоненциальную функцию полезности.

1. Найдем величину приемлемого взноса для страхования однородной группы из n клиентов, считая равноправными в сделке страховую компанию и группу клиентов в целом. Пусть функции полезности экспоненциальны и стандартизованы, $u_i(y) = c_i^{-1}[1 - \exp(-c_i y)], i = 0, 1$, и выполнено условие допустимости рисков $E\exp(c_i X_1) < \infty$.

Предполагая выполненным условие возможности страхования $D^*/n \leq d^*$, вернемся к задаче минимизации свертки, которую можно переписать как

$$J\left(d\right) \equiv -\frac{a}{c_0}\exp\left(-c_0 n d\right) - \frac{b}{c_1}\exp\left(c_1 d\right) \rightarrow max, \quad d \in [D^*/n,\ d^*]$$

где мы обозначили через $a = \exp(-c_0 S)[E\exp(c_0 X_1)]^n$, $b = \exp(-c_1 S_1)$. Поскольку $J(d)$, очевидно, вогнута, то приравнивая к нулю производную $J'(d) = an\exp(-c_0 nd) - b\exp(c_1 d) = 0$, получим, что максимум $J(d)$ на $(-\infty, \infty)$ достигается в единственной точке

$$d' = (c_0 n + c_1)^{-1}\ln[an/b] \tag{2.6}$$

Проверяя расположение d' относительно граничных точек отрезка $[D^*/n, d^*]$, находим в итоге точку максимума свертки на этом отрезке и, таким образом, находим Парето-оптимальное решение задачи (2.5) в нашем случае:

$$d^0 = \begin{cases} D^*/n, d' \leq D^*/n \\ d', D^* < d' < d^*, \\ d^*, d' \geq d^* \end{cases}$$

где d' определено в (2.6).

2. Рассмотрим решение данное задачи для случая, когда *компания считается равноправной каждому из клиентов*.

Решение. Поскольку свертка критериев здесь выглядит как

$$J(d) \equiv \frac{1}{n+1}Eu_0(S + nd - X) + \frac{n}{n+1}u + 1(S_1 - d),$$

то проводя рассуждения, получим вогнутую задачу оптимизацию

$$\begin{cases} -\frac{a}{c_0}\exp(-c_0 nd) - \frac{nb}{c_1}\exp(c_1 d) \to max \\ d \in [D^*/n, d^*] \end{cases}$$

где $a, b, D^* d^*$ те же, что и в предыдущей задаче. Ее единственное решение есть

$$d^0 = \begin{cases} D^*/n, d' \leq D^*/n \\ d', D^* < d' < d^*, \\ d^*, d' \geq d^* \end{cases}$$

где d' определяется формулой

$$d' = (c_0 n + c_1)^{-1} \ln[a/b]$$

Выбор размера взноса, обеспечивающего заданную вероятность неразорения

Приведем еще один способ расчета взносов для однородной группы клиентов, предполагая, что функция полезности компании $u_0(y)$ имеет специальный вид индикаторной функции:

$$u_0(y) = l(y), l(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ 1, y \geq 0. \end{cases}$$

Для такого страховщика ожидаемая полезность $Eu_0(S+D-X) = \int_0^\infty l(S+d-x)dF(x) = F(S+D) = PS+D \geq X$ совпадает с вероятностью неразорения, и все рисковые ситуации с одинаковой вероятностью неразорения для него эквивалентны. Целью является не извлечение прибыли из разницы $S+D-X$, а перераспределение риска между страхователями с максимально возможной надежностью покрытия их возможного ущерба.

Утверждение 3. *Пусть* $u_0(y) \equiv l(u), u_1(y)$ *- возрастающая функция на* $(-\infty, \infty)$ *и выполнено условие (2.8). Тогда* $\widetilde{d}$ *есть Парето-оптимальная точка задачи*

$$\begin{cases} Eu_0(S + nd - X) \to max \\ u_1(S_1 - d) \to max \\ d \in [0, d^*] \end{cases} \tag{2.9}$$

В третьей разделе рассмотрена функция неприятия риска. Практическое использование $\pi[x, Y]$ как меры осторожности ИПР влечет определенные трудности, поскольку эта величина зависит не только от x и функции полезности $u(\cdot)$, но и от ф.р. рассматриваемого выигрыша $F(\cdot)$, входящей в левую и правую части уравнения (1.2), соответственно, в виде $EY = \int_B ydF(y)$ и $Eu(x+Y) = \int_B u(x+y)dF(y)$. Вводимая ниже иная характеристика осторожности ИПР свободна от этого недостатка, поскольку определяется только его функцией полезности.

Определение 3. *Пусть $u(y)$ дважды дифференцируема, причем $u'(y) > 0$ на B. Функцию*

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

назовем функцией неприятия риска.

Для реального ИПР имеют значение не малые выигрыши с распределением, сосредоточенным около нуля, а вполне конкретные с.в Y с ненулевым математическим ожиданием. Следующая теорема, принадлежащая Пратту [20], устанавливает связь между $r(x)$ и $\pi[x, Y]$ в этом общем случае.

Теорема 3. *Пусть имеются две функции полезности $u_i(y), i = 1, 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $r_1(x) \geq r_2(x)$ для всех x;

2. $\pi_1[x, Y] \geq \pi_2[x, Y]$ для всех x, Y;

3. $u_1(u_2^{-1}(t))$ вогнута по t.

Четвертый раздел является практической частью дипломной работы. Вычисления проводятся с помощью консольной программы, написанной на объектно-ориентированном языке программирования C++. Код программы представлен в Приложении А.

Задача имеет следующие цели:

1. Выяснить,выполнено ли условие возможности страхования клиента,
2. Определить взаимоприемлемую величину взноса d^0

В формулировке задачи которая приведена ниже, некоторые параметры имеют конкретные численные значения. В программе данные значения требуется вводить вручную, тем самым получив частично универсальное решение в рамках конкретной задачи.

Постановка задачи.

Пусть риск X_i каждого из $n = 10$ клиентов однородной группы распределены по экспоненциальному закону $P\{X_i \le x\} = 1 - e^{-2x}, x \ge 0$. Компания и отдельные клиенты имеют, соответственно, начальные капиталы $S = 2$, и $S_1 = 0$, квадратичные функции полезности $u_0(y) = -y^2/30 + y$ и $u_1(y) = -y^2/10 + y$. Выяснить, выполнено ли здесь условие возможности страхования, и если да, то определить взаимоприемлемую величину взноса d^0, считая компанию равноправной в сделке всей группе клиентов в целом.

По итогу решения задачи и результатов программы, можно сделать вывод, что возможность страхования зависит от набора параметров: количество клиентов в группе, и начальные капиталы компании и клиентов. Данная программа является частично универсальным решением для задачи с конкретными функциями полезности и распределением риска.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставленные цели данной работы выполнены в полном объеме. А именно: В первой главе данной работы будет рассмотрено такое понятие как полезность в целом, что из себя представляет направление Теория полезности. В подразделе "Аксиоматика функции полезности"вводятся общие понятия и на основе четырех Аксиом вводится определение функции полезности. Далее, приведен алгоритм построения функции полезности, рассмотрены ее виды, и показано построения функции полезности на примере двух задач.

Во второй главе поднимается проблема определения страховых взносов. Рассмотрены модели страховых задач, в которых используется функция полезности. Приведены 3 модели задач:

1. Задача выбора страхового взноса
2. Случай стандартных функций полезности
3. Выбор размера взноса, обеспечивающего заданную вероятность.

Четвертая глава является практической частью дипломной работы. Целью - решение задачи возможности страхования однородных групп. Зная такие параметры как риск X_i каждого из n клиентов однородной группы, начальные капиталы S клиентов и компании, квадратичные функции полезности $u_0(y)$ и $u_1(y)$. Выяснить, выполнено ли здесь условие возможности страхования, и если да, то определить взаимоприемлемую величину взноса d^0, считая компанию равноправной в сделке всей группе клиентов в целом. Для решения задачи написана программу, проводящая все вычисления и выводит решение, все результаты представлены в 4 главе. Программа написана на на объектно-ориентированном языке программирования C++, с использованием платформы Dev-C++.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Гербер Х.* Математика страхования жизни / Х. Гербер. М.: Мир, 1995.
2. *Колемаев В.А*. Математическая экономика / В.А. Колемаев. -М.:ЮНИТИ, 1988.
3. *Копнин И.А* Выбор клиента страховой фирмы с известными функциями полезности / И.А. Копнин // Экономика и управление: Проблемы, тенденции, перспективы: Сборник научных статей выпуск 7: Издат. центр "Наука".-2018.
4. *Бенинг В.Е.* Введение в математическую теорию страхования / В.Е. Бенинг, В.И. Ротарь. Обозр. прикл. и промышл. математики, 1994.- Т.1 ,698-779.
5. *Ермаков С.М.* Курс статистического моделирования /С.М. Ермаков , Г.А. Михайлов. М.: Наука, 1976.
6. *Голубин А.Ю.* Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация / А.Ю Голубин. М.: Анкил, 2003.
7. *Королюк В.С.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк , Н.И. Портенко , А.В. Скороход , А.Ф. Турбин/ М.: Наука, 1985.
8. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения / М. Де Гроот. М.: Мир, 1974.
9. *Ширяев А.Н.* Вероятность / А.Н.Ширяев. М.: Наука, 1989.
10. *Розен В.В.* Математические модели принятия решений в экономике. Учебное пособие / В.В. Розен. М.: Книжный дом "Университет Высшая школа, 2002.
11. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей / В.П.Чистяков. М.: Наука, 1978.
12. *Базара М.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М.Базара , К.Шетти М.: Мир, 1982.
13. *Демиденко Е.З.* Оптимизация и регрессия / Е.З. Демиденко. -М.:Наука,1989.
14. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. М.: Наука, 1980.

15 *Golubin A.Y.* Franchise Optimization in the Static Insurance Model / A.Y Golubin. Journal of Mathematical Sciences, v.112. No. 2, 2002, 4126-4140 p.

16 *Подиновский В.В.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский , В.Д. Ногин. -М.:Наука,1982.

17 *Ланге О.* Оптимальные решения / О.Ланге. -М. Прогресс, 1967.

18 *Borch K.* The Mathematical Theory of Insurance / K.Borch. -Lexington Books, 1974.

19 *Raviv A.* The Design of an Optimal Insurance Policy / A. Raviv. - American Economic Review, 1979, p. 84-96.

20 *Pratt J. W.* Risk Aversion in the Small and in the Large / J. W. Pratt - Econometrica, 1964, v.32, p.122-136.