Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

О решениях дифференциальных уравнений с неинтегрируемой особенностью

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 411 группы
направления 01.03.02-Прикладная математика и информатика
Механико-математический факультета
Внукова Вадима Валерьевича

Научный руководитель
к.ф-м.н., доцент Игнатьев М.Ю.

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор Юрко В.А.

Саратов, 2018 год

Р ВЪ™Р ВЪ™Р ВЪЎР ВЪЌР ВЪЎР СЊР ПЇSР ВЪЎ

В данной работе исследуются решения дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля с Бесселевой неинтегрируемой особенностью в нуле. Исследуются функции Бесселя, которые являются решениями поставленного уравнения с нулевым потенциальм. Основной целью работы является получение решений уравнения с ненулевым потенциалом.

Данная работа состоит из двух основных разделов :"Решение уравнения Штурма-Лиувилля с Бесселевой особенностью с нулевым потенциалом" , "Исследование решений уравнения в общем случае со сведением к интегральному уравнению".

В первом разделе "Решение уравнения Штурма-Лиувилля с Бесселевой особенностью с нулевым потенциалом" будут получены решения уравнения с нулевым потенциалом. Будет показано что уравнение Штурма-Лиувилля сводится к извесному уравнению Бесселя порядка ν. Будут получены ассимптотические оценки для решений. Так же будут рассмотрены основные свойства функций Бесселя и Гамма-функций.

Во втором разделе "Исследование решений уравнения в общем случае со сведением к интегральному уравнению" будут исследованы решения уравнения с потенциалом не равным нулю. Будут получены интегральные уравнения для решений исходного уравнения.

Большое число самых разнообразных задач, относящихся практически ко всем важнейшим разделам математической физики и призванных ответить на актуальные технические вопросы, связано с применением функций Бесселя. Функции Бесселя широко используются при решении задач акустики, радио физики, гидродинамики, задач атомной и ядерной физики. Многочисленны приложения функций Бесселя к теории теплопроводности и теории упругости(задачи о колебаниях пластинок, задачи теории оболочек, задачи определения концентрации напряжения вблизи трещин).

Такая популярность функций Бесселя объясняется тем, что решение уравнений математической физики, содержаших оператор Лапласса в цилиндрических координатах, классическим методом разделения переменных приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, служащему для определения этих функций.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе будет получено решение уравнения Штурма-Лиувилля с нулевым потенциалом.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$-y''(x) + \left(q(x) + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right) y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < T, \quad T < \infty \tag{1}$$

где точка $x = 0$ является особой регулярной точкой, а ν и λ - любые числа.

В данном разделе будем искать решения уравнения (1), когда потенциал $q(x) \equiv 0$.

Рассмотрим теперь решения уравнения:

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

вблизи начала координат. Если $p(x)$ и $q(x)$ являются аналитическими функциями, регулярными в окресности $x = 0$, то точка $x = 0$ называется *обыкновенной точкой* данного дифференциального уравнения. В этом случае функции $p(x)$ и $q(x)$ разлагаются в сходящиеся степенные ряды с нулевым радиусом сходимости, причем решение y также можно представить в виде сходящегося степенного ряда по степеням переменной x. В случае если одна из функций $p(x)$ и $q(x)$ или обе они одновременно оказываются нерегулярными в начале координат, тогда точка $x = 0$ называется *особой точкой* исходного дифференциального уравнения. Если $p(x)$ имеет в этой точке полюс максимум первого порядка, а $q(x)$ - полюс второго порядка, тогда точка $x = 0$ называется регулярной особой точкой. При этом по крайней мере одно из решений представляется в виде:

$$y = Cx^{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{3}$$

Если $p(x)$ имеет в точке $x = 0$ полюс порядка выше первого, или $q(x)$ имеет в этой точке полюс порядка выще второго, или это имеет место одновременно, тогда точка $x = 0$ называется *иррегулярной особой точкой.* Покажем теперь как строятся решения уравнения (2).

Пусть теперь $p(x) = \frac{1}{x}$ и $q(x) = \frac{\lambda x^2 - \nu^2}{x^2}$, домножая на x^2 получаем:

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda x^2 - \nu^2) y = 0 \tag{4}$$

это уравнение Бесселя порядка ν.

Показано, что решениями будут являться ряды:

$$y_1(x) = a_0 x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k! \prod_{s=1}^{k} (s - \nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{5}$$

Заметим, что (5) будет являться решением только тогда, когда $\nu \neq 1, 2, \dots$. Если проделать те же вычисления для $\sigma = \nu$ получим:

$$y_2(x) = a_0 x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k! \prod_{s=1}^{k} (s + \nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{6}$$

этот ряд будет являться решением при любых ν. Таким образом для нецелых ν общим решением будет:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{7}$$

Мы решили уравнение (4), теперь перейдем к решению уравнения (1) с потенциалом $q(x) = 0$. Сделаем замену $y(x) = x^{-\frac{1}{2}} u(x)$ в (4)

$$\begin{gathered} y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} u + x^{-\frac{1}{2}} u' \\ y'' = \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} u - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} u' - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} u' + x^{-\frac{1}{2}} u'' \end{gathered} \tag{8}$$

Подставляя получаем:

$$x^{\frac{3}{2}} u'' + \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} u + \lambda x^{\frac{3}{2}} u - \nu^2 x^{-\frac{1}{2}} u = 0 \tag{9}$$

делим на $x^{\frac{3}{2}}$ и домножаем на -1, получаем:

$$-u'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} u = \lambda u \tag{10}$$

следовательно решение $u(x)$ уравнения (1) при $q(x) = 0$ получается при обратной замене $u(x) = x^{\frac{1}{2}} y(x)$, получаем:

$$u(x) = C_1 x^{\frac{1}{2}} y_1(x) + C_2 x^{\frac{1}{2}} y_2(x). \tag{11}$$

Выражение решения через функции Бесселя

Рассмотрим решение уравнения (1):

$$y(x) = a_0 x^{\frac{1}{2}+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k! \prod_{s=1}^{k}(s+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{12}$$

Воспользуемся свойствами гамма-функции

$$\Gamma(n+k+1) = \Gamma(n) n (n+1)(n+2) \dots (n+k) \tag{13}$$

но

$$\Gamma(n) n = \Gamma(n+1) \quad k! = \Gamma(k+1). \tag{14}$$

Выберем a_0 следующим образом:

$$a_0 = \frac{\rho^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{15}$$

где $\rho = \sqrt{\lambda}$ и получим:

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{\rho x}{2}\right)^{2k+\nu} = x^{\frac{1}{2}} J_\nu(\rho x), \tag{16}$$

где $J_\nu(\rho x)$ - функция Бесселя порядка ν.
Аналогичным образом получаем при замене ν на $-\nu$ и $a_0 = \frac{\rho^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$:

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{\rho x}{2}\right)^{2k-\nu} = x^{\frac{1}{2}} J_{-\nu}(\rho x). \tag{17}$$

Общее решение уравнения (1) при $q(x) = 0$ и не равному целому числу ν имеет вид:

$$y(x) = C_1 x^{\frac{1}{2}} J_\nu(\rho x) + C_2 x^{\frac{1}{2}} J_{-\nu}(\rho x). \tag{18}$$

Как следует из (16) и (17) для нецелых ν функции J_ν и $J_{-\nu}$ по-разному ведут себя в окресности $x = 0$:

$$J_\nu(\rho x) = \frac{(\rho x)^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}[1 + O(x^2)], \quad x \to 0 \tag{19}$$

$$J_{-\nu}(\rho x) = \frac{2^\nu}{(\rho x)^\nu \Gamma(-\nu+1)}[1 + O(x^2)], \quad x \to 0 \tag{20}$$

Одна функция ограничена в окресности точки $x = 0$, другая неограниченна. Поэтому при нецелых ν функции $x^{\frac{1}{2}} J_\nu$ и $x^{\frac{1}{2}} J_{-\nu}$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) при $q(x) = 0$.

Выражение решения для любого ν

Определим функцию Неймана индекса ν при нецелых ν по формуле

$$N_\nu(\rho x) = \frac{J_\nu(\rho x) cos \pi\nu - J_{-\nu}(\rho x)}{sin \pi\nu}, \quad \nu \neq n. \tag{21}$$

Очевидно, что функция Неймана является решением уравнения (1) при $q(x) = 0$, как линейная комбинация решений $J_\nu(\rho x)$ и $J_{-\nu}(\rho x)$. Покажем, что при нецелых $\nu > 0$ функции Неймана и Бесселя линейно независимы. Для этого достаточно привести асимптотические формулы этих функций при малых значениях аргумента x. Для функции Бесселя ранее были получены формулы, для функции Неймана:

$$N_\nu(\rho x) \sim \frac{J_{-\nu(\rho x)}}{sin \pi\nu} \sim \frac{2^\nu}{(\rho x)^\nu sin \pi\nu \Gamma(-\nu+1)}, \quad x \to 0. \tag{22}$$

Таким образом, в окрестности точки $x = 0$ функция Бесселя ограничена, а функция Неймана - неограничена. Такие функции не могут быть линейно зависимыми. Поэтому при нецелых ν общее решение может быть записано в виде:

$$y(x) = C_1 x^{\frac{1}{2}} J_\nu(\rho x) + C_2 x^{\frac{1}{2}} N_\nu(\rho x). \tag{23}$$

Подстановка в правую часть функции Неймана $\nu = n$, где $n = 1, 2, \ldots,$ давет неопределенность типа $\frac{0}{0}$, так как $cos\pi n = (-1)^n, sin\pi n = 0, J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Однако неопределенность раскрывается по правилу Лопиталя. Поэтому определим функцию Неймана с индексом n как предел:

$$N_n(\rho x) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(\rho x). \tag{24}$$

В работе будет показано, что

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\{2\left(ln\frac{x}{2} + C\right) J_n(x) - \tag{25}$$

$$- \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{x}{2}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)} \left[\sum_{p=1}^{k+n} \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}\right]\Bigg\}. \tag{26}$$

Разложение функции $N_0(x)$ получается аналогично. Формально оно получается из последней формулы, если положить $n = 0$ и отбросить конечные суммы:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\left(ln\frac{x}{2} + C\right) J_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma^2(k+1)} \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}\right\}. \tag{27}$$

Из двух последных формул следует асимптотические формулы для функций Неймана при $x \to 0$:

$$N_n(x) \sim -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \frac{\Gamma(n)}{\pi}, \quad n \geq 1; \quad N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} ln\frac{x}{2}. \tag{28}$$

Как видим, функция Неймана в окрестности точки $x = 0$ неограниченна. Поэтому общее решение уравнение (1) при $q(x) = 0$ можно записать в виде (23) при любых ν.

Свойства гамма-функции

1. В комплексной полуплоскости $Rez > 0$ гамма-функция определяется интегралом:
$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{A.1}$$
Гамма функция аналитична в области $Rez > 0$ и $\Gamma(1) = 1$.
2. Гамма-функция удовлетворяет функциональному уравнению
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{A.2}$$
3. При всех целых положительных $z = n$ имеет место соотношение
$$\Gamma(n+1) = n! \tag{A.3}$$
4. Функциональное уравнение (A.2) можно обобщить следующим образом:
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \tag{A.4}$$
5. Справедлива формула
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin\pi z}, z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{A.5}$$
6. Функция $\Gamma(z)$ с помощью формулы (A.4) можно аналитически продолжить на всю плоскость комплексной переменной z, кроме точек $z = 0, -1, -2, \dots,$ в которых $\Gamma(z)$ имеет полюча первого рода.
7. Функция $\Gamma(z)$ не имеет нулей.
8. Функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$ - целая функция. В точках $z = -k, k = 0, 1, 2, \dots,$ функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$ обращается в ноль.

Регулярные особые точки

Многие задачи математики, механики, физики приводят к уравнениям второго порядка вида:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

коэффициенты которых - рациональные функции

$$p(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}, \quad q(x) = \frac{q_1(x)}{q_2(x)},$$

где $p_j(x), q_j(x)$ - многочлены. Можно считать, что это дроби несократимы; тогда в точках, в которых $p_2(x) = 0$ или $q_2(x) = 0$, хотя бы один из коэффициентов уравнения обратится в бесконечность. Такие точки называются особыми точками уравнения. Решения уравнения будут, вообще говоря, иметь особенности в этих точках. Изучение поведения решений вблизи особых точек - это один из разделов аналитической теории дифференциальных уравнений.

Простейшие особеннности - это так называемые регулярные особые точки.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$(x-a)^2 y''(x) + (x-a)p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{29}$$

где a -комплексное число. Если функции $p(x), q(x)$ аналитичны в некотором круге $|x-a| < R$, и точка a - особая, то a называется регулярной особой точкой.

Во втором разделе рассмотрим уравнение

$$-y''(x) + \left(q(x) + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right) y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < T, \quad T < \infty \tag{30}$$

но теперь будем искать решения при $q(x) \not\equiv 0$.

Рассмотрим фукнции

$$C_j(x,\lambda) = (x-a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{jk}(\rho(x-a))^{2k}, j = 1,2$$

где $\mu_j = (-1)^j \nu + 1/2, \quad C_{10}C_{20} = (2\nu)^{-1}, \quad a = 0$

$$C_{kj} = (-1)^k C_{j0}(\prod_{s=1}^{k}((2s+\mu_j)(2s+\mu_j-1)-\nu_0)^{-1}$$

где $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$

$C_j(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (30) при $q(x) \equiv 0$.

Будет показано, что решениями уравнения (30) в общем виде являются:

$$S_j(x,\lambda) = C_j(x,\lambda) + \int_0^x g(x,t,\lambda)q(t)S_j(t,\lambda)dt, \tag{31}$$

где $g(x,t,\lambda) = C_1(t,\lambda)C_2(x,\lambda) - C_1(x,\lambda)C_2(t,\lambda)$. При каждом фиксированном х функции $S_j(x,\lambda)$ являются целыми по λ порядка 1/2 и образуют фундаментальную систему решений уравнения (30).

Заключение

В заключении хочется отметить, что дифференциальные уравнения с особенностями часто возникают при решении многих физических задач. Понимание и усвоение этой теории носит необходимый характер для углубления в математику или физику. Поэтому в данной работе был сделан акцент на самое основное и нужное для понимания темы. Хочется отметить, что данной теорией занималось множество математиков, благодаря которым существует большое число литературы. При желании, в списке источников можно найти очень подробные изложения этой темы.