Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

ПРИМЕНЕНИЕ АФФИННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ.

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Зазулина Егора Геннадьевича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор ____________ П. А. Терехин

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент ____________ С. П. Сидоров

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Применение нового метода приближенного решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с использованием функций Хаара делает бакалаврскую работу несомненно актуальной в теоретическом плане. С точки зрения практических приложений представляет также интерес осуществленный в бакалаврской работе численный анализ экономической модели Кейнса, описывающей динамику национального дохода на относительно небольшом промежутке времени.

Целью бакалаврской работы является построение алгоритма аппроксимации и оценка погрешности методом Хаара для численного решения задачи Коши.

Методы исследования. В бакалаврской работе используются методы математической экономики, вычислительной математики, дифференциальных уравнений и теории функций.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие **задачи**:

1. Рассмотреть экономические модели Кейнса и Самуэльсона - Хикса;
2. Рассмотреть задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка;
3. Создать программный код для оценки погрешности аппроксимации;

Практическая значимость. Построить алгоритм приближенного решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с использованием функции Хаара, дающий наилучшую погрешность аппроксимации. Создать программный код для построенного алгоритма.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, семи разделов, заключения,списка использованных источников, содержащего 20 наименований , и приложений.Общий объем работы составляет 40 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируются цель работы и решаемые задачи.

Динамические модели

В **первом** разделе ставится задача рассмотреть экономические модели Кейнса и Самуэльсона - Хикса.

Кейнсианское учение представляет собой продолжение основополагающих методологических принципов неоклассического направления экономической мысли, поскольку и сам Дж.М. Кейнс, и его последователи, следуя идее «чистой экономической теории», исходят из приоритетного значения в хозяйственной политике общества прежде всего экономических факторов, определяя выражающие их количественные показатели и связи между ними, как правило, на базе методов предельного и функционального анализа, экономико-математического моделирования. Но в то время как Маршалл рассматривал предложение, спрос, цены преимущественно на уровне отдельных фирм, потребителей, т.е. на микроуровне, Кейнс пришел к выводу, что для начала следует выявить функциональные связи на уровне национального хозяйства. Кейнс показал, что экономический рост зависит от структуры общественного продукта, что все рынки необходимо изучать, как единую систему, за счет их взаимосвязи.

Прежде чем искать наилучшее решение, надо было ответить на вопрос: как решить проблему занятости, преодолеть депрессию? Изменились условия равновесия. Требовался переход к анализу общего спроса, совокупного предложения, инвестиций, потоков доходов, потребления и накопления в масштабе всего общества.

Дж.М. Кейнс также не отрицал влияния меркантилистов на созданную им концепцию государственного регулирования экономических процессов.

Модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса модель, включающая в себя только рынок благ, на котором представлены два экономических субъекта: домохозяйства и фирмы. Допускается, что уровень цен и ставка процента постоянны. Модели, основанные на взаимодействии акселератора и мультипликатора, являются моделями кейнсианского толка и описывают процесс перехода экономики из одного равновесного состояния в другое при изменении экзогенных параметров.

В этих моделях снимаются ограничение на мгновенное восстановление равновесия в экономике и предположение об избыточности производственных мощностей. Основным предметом анализа в моделях взаимодействия мультипликатора и акселератора является переход из одного равновесного состояния в другое: будет ли процесс перехода в новое состояние монотонны или колебательным, сможет ли экономика восстановить равновесие, или будет постоянно испытывать колебания около точки равновесия, или же экономическая система будет безвозвратно нарушена.

Модель Самуэльсона–Хикса рассматривает только события, происходящие на рынке благ, т.е. производство и потребление благ.

Во **втором** разделе ставится задача рассмотреть алгоритм аппроксимации функции, ряд лемм и задачу Коши для численного решения дифференциального уравнения.

Теорема 1

Для любого $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$\| y' - z_n' \| \leq e^{\|a\|}(\Omega_n + Ce^{\|a\|}\Omega_n^*. \tag{1}$$

Неравенство (1) запишем в виде

$$\| y' - z_n' \| = O\left(\omega\left(a, \frac{1}{2^n}\right) + \omega\left(b, \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}\right), n = 1, 2...$$

Такое же соотношение будет иметь место для нормы $\| y' - y_n' \|$ для достаточно больших n. Постоянные в O -соотношениях зависят от величин $\| a \|, \| b \|$ и $| y |$.

Следует заметить , что оценка для уклонения $\| y - z_n \|$ повторяет оценку (1) . Улучшения порядка сходимости, как это имеет место для интерполяционных сплайнов в нашем случае, вообще говоря, не происходит. Простым примерном служит случай $a(x) \equiv 0$, когда теорема 1 дает нам оценку $\| y' - z_n' \| \leq \omega(b, \frac{1}{2^n})$ и при этом оценка $\| y - z_n \| \leq \omega(b, \frac{1}{2^n})$ не улучшаема на классе всех непрерывных функций $b(x) \in C[0, 1]$. В самом деле , при $a(x) \equiv 0$ имеем

$$y(x) = y_0 + \int_0^x b(t)dt,$$

при $\quad z_{n,k} = b_{n,k}, \quad$ откуда

$$y(1) - z_n(1) = \int_0^1 b(x)dx - 2^{-2} \sum_{k=0}^{2^n-1} b_{n,k}.$$

Соотношение

$$\sup_{b(x)\in C[0,1]:b(x_{n,k}=0,k=0,\ldots,2^n-1)} \frac{\int_0^1 b(x)dx}{\left(b,\frac{1}{2^n}\right)},$$

показывает неулучшаемость оценки

$$\| y - z_n \| \le \omega \left(b, \frac{1}{2^n}\right).$$

Свойства приближенного решения. Оценка погрешности

Введем следующие характеристики задачи (2)

$$C = | y_0 | \| a \| + \| b \|, \quad \Omega_n = | y_0 | \omega \left(a, \frac{1}{2^n}\right) + \omega \left(b, \frac{1}{2^n}\right),$$

$$\Omega_n^* = \omega \left(a, \frac{1}{2^n}\right) + \frac{\| a \|}{2^n},$$

где $\omega(f,\delta) = \sup_{|x_1-x_2|\le\delta} | f(x_1) - f(x_2) |$ – равномерный модуль непрерывности , а также характеристики входных интерполяционных и начальных данных:

$$A_n = \max_{0\le k\le 2^n-1} | a_{n,k} |, \quad B_n = \max_{0\le k\le 2^n-1} | b_{n,k} |, \quad C_n = | y_0 | A_n + B_n,$$

и приближенных решений

$$Y_n = \max_{0\le k\le 2^n-1} | y_{n,k} |, \quad Z_n = \max_{0\le k\le 2^n-1} | z_{n,k} |, \quad \triangle_n = \max_{0\le k\le 2^n-1} | y_{n,k} - z_{n,k} | .$$

Построение алгоритма

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), 0 \le x \le 1, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Будем предполагать, что $a(x)$, $b(x) \in C[0,1]$– непрерывные функции.

Будем искать приближенное значение $y_n(x)$ задачи (2), представляя его производную в виде полинома по системе Хаара $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ порядка не выше 2^n

$$y'_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \widehat{y_{n,k}} X_k(x),$$

такой полином является ступенчатой функцией

$$y'_n(x) = y_{n,k}, k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, \quad k = 0, ..., 2^n - 1,$$

которая во внутренних точках разрыва равна полусумме своих односторонних пределов, а в граничных точках 0 и 1 – своему пределу изнутри отрезка $[0, 1]$, т. е.

$$y'_0 = y_{n,0} y'_n(k2^{-n}) = (y_{n,k-1} + y_{n,k})/2,$$

при $k = 1, \ldots.., 2^n - 1, \quad y'_n(1) = y_{n,2n-1}$.

Сразу заметим, что переход от набора $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ значений ступенчатой функции к набору $\{\widehat{y}_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ ее коэффициентов Фурье-Хаара (и обратно) может быть осуществлен с использованием быстрого преобразования Хаара.

Восстановим функцию $y_n(x)$ по ее производной

$$y_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), k2^{-n} \leq x \leq (k+1)2^{-n},$$

где $k = 0, \ldots.., 2^n - 1$.

Функция $y_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$.

Фиксируем набор промежуточных точек

$$x_{n,k} = (k + \theta_{n,k})2^{-n}, 0 < \theta_{n,k} < 1, k = 0, ..., 2^n - 1.$$

Потребуем , чтобы функция $y_n(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (2) на множестве точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$. Получим систему уравнений

$$y'_n(x_{n,k}) + a(x_{n,k})y_n(x_{n,k}) = b(x_{n,k}), k = 0, \ldots.., 2^n - 1.$$

С учетом представления функций $y_n(x)$ и $y'_n(x)$, обозначив для краткости $a_{n,k} = a(a_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$, будем иметь

$$y_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,k} + y_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n}\right) = b_{n,k}, k = 0, ..., 2^n - 1. \qquad (3)$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (3) величины $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно, если только $1 + a_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n} \neq 0$ для всех $k = 0, \ldots.., 2^n - 1$, что заведомо выполняется для достаточно больших n, а именно при

$$2^n \geq \parallel a \parallel = \max_{x\in[0,1]} \mid a(x) \mid .$$

Можно избежать произвола при выборе множества промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ полагая, что $\theta_{n,k} = \frac{1}{2}$.

В таком случае каждая точка $x_{n,k}$ будет серединой отрезка $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$

Далее мы покажем , что от выбора промежуточных точек принципиально не зависят аппроксимативные свойства приближенного решения $y_n(x)$ задачи (2). Для этого определим новые величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ с помощью рекуррентных соотношений:

$$z_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}\right) = b_{n,k}, k = 0, ..., 2^n - 1. \qquad (4)$$

Очевидно, что из уравнений (4) величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно для любого натурального числа n. По построенным величинам $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определим функции $z'_m(x)$ и $z_n(x)$ равенствами

$$z'_n(x) = z_{n,k}, \quad k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, \quad k =, ..., 2^n - 1,$$

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - 2^{-n}), k2^{-n} \leq x \leq (k+1)2^{-n}.$$

Функцию $z_n(x)$ нетрудно определить из рекуррентных соотношений (4) по входным интерполяционным и начальным данным :

$$\{a_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}, \{b_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1} y_0.$$

Леммы. Доказательства Лемм

Лемма 1

Справедливы неравенства:

$$Z_n \leq C_n e^{A_n} \leq C e^{\|a\|}, n = 1, 2....$$

Неравенства из сформулированной леммы дают оценку для приближенных решений $z_n(x)$ и их производных.

Доказательство: Из рекуррентных соотношений (4) для всех $k = 0, ..., 2^n - 1$ получаем оценку

$$\mid Z_{n,k} \mid \leq \mid y_0 \mid\mid a_{n,k} \mid + \mid b_{n,k} \mid + \mid a_{n,k} \mid 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} \leq C_n + A_n 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} \mid z_{n,j} \mid .$$

По лемме 3 отсюда следует неравенства приложения

$$Z_n = Z_n = \max_{0 \leq k \leq 2^n - 1} \mid z_{n,k} \mid \leq C_n e^{A_n 2^{-n}(2^n-1) \leq C_n e^{A_n} \leq C e^{\|a\|}}.$$

Лемма 2

Имеет место оценка

$$\triangle_n \leq \frac{2A_n C_n e^{3A_n}}{2^n} \leq \frac{2C \parallel a \parallel e^{3\|a\|}}{2^n}.$$

Оценка леммы 2 показывает , что $\triangle_n = O(2^{-n})$ при достаточно больших n. Следовательно , переход от приближенного решения $y_n(x) z_n(x)$ оправдан , и независимость аппроксимативных свойств приближенного решения от выбора промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ обоснована. Из лемм 1 и 2 также вытекает равномерная ограниченность функции $y_n(x)$ и их производных, поскольку

$$Y_n \leq Z_n + \triangle_n \leq C e^{\|a\|}(1 + O(2^{-n})).$$

Обозначим через $y(x)$ точное решение задачи (2).

Доказательство: Сравним рекуррентные соотношения (3) и (4), причем последние запишем в виде

$$z_{n,k}+a_{n,k}\left(y_0+2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1}z_{n,j}+z_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n}\right)=b_{n,k}+a_{n,k}z_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n}.$$

При $k=0,.....,2^n-1$ находим

$$\mid y_{n.k}-z_{n.k}\mid\leq\mid a_{n.k}\mid 2^{-n}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\mid y_{n.j}-z_{n.j}\mid+\mid y_{n.k}-z_{n.k}\mid\theta_{n.k}+\mid z_{n.k}\mid\theta_{n.k}\right)\leq$$

$$\leq A_n2^{-n}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\mid y_{n.j}-z_{n.j}\mid+\mid y_{n.k}-z_{n.k}\mid+Z_n\right)$$

Поскольку $1-A_n2^{-n}\geq 1-\parallel a\parallel 2^{-n}\geq\frac{1}{2}$ при $n\geq\log_2\parallel a\parallel+1$, то

$$\mid y_{n.k}-z_{n.k}\mid\leq 2A_nZ_n2^{-n}+2A_n2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1}\mid y_{n.j}-z_{n.j}\mid.$$

По лемме 3 отсюда следуют неравенства

$$\triangle_n=\max_{0\leq k\leq 2^n-1}\mid y_{n,k}-z_{n,k}\mid\leq\frac{2A_nZ_ne^{2A_n}}{2^n}\leq\frac{2A_nZ_ne^{3A_n}}{2^n}\leq\frac{2C\parallel a\parallel e^{3\|a\|}}{2^n}.$$

Учли оценку $Z_n\leq C_neA^n$ из леммы 1.

Лемма 3.

Если набор неотрицательных чисел $\{f_k\}_{k=0}^N$ удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha,\beta>0$ условию

$$f_k\leq\alpha+\beta\sum_{j=0}^{k-1}f_j, k=0,....,N,$$

то выполняется неравенство

$$f_k\leq\alpha e^{\beta k},\quad k=0,....,N.$$

Доказательство: Из условия леммы следует оценка

$$f_k \leq \alpha(1+\beta)^k, \quad k = 0, ..., N,$$

которая легко проверяется по индукции

$$f_{k+1} \leq \alpha + \beta \sum_{j=0}^{k-1} f_j \leq \alpha \left(1 + \beta \sum_{j=0}^{k} (1+\beta)^j \right) = \alpha(1+\beta)^{k+1}.$$

Следовательно, имеем

$$f_k \leq \alpha(1+\beta)^k \leq \alpha e^{\beta k}.$$

Лемма 3 является дискретным вариантов леммы Гронуолла (точнее , ее простейшего частного случая).

Лемма Гронуолла.

Если неотрицательная непрерывная функция $f(x), \quad x_0 \leq x \leq X$ удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} f(t)dt, x_0 \leq x \leq X,$$

то выполняется неравенство

$$f(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)}, x_0 \leq x \leq X.$$

Лемма 4.

Если неотрицательная функция $f(x), x_0 \leq x \leq X$ имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода $\{x_k\}_{k=1}^{N} \subset (x_0, X)$, в которых $f(x_k) \leq \max\{f(x_k - 0), f(x_k + 0)\}, \quad k = 1, ..., N$ и удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha, \beta > 0$ условию

$$\alpha + \beta \int_{x_0}^{x} f(t)dt,$$

хотя бы во всех точках непрерывности(а тогда и вообще во всех точках отрезка $[x_0, X]$) , то при $x_0 \leq x \leq X$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)}. \tag{5}$$

Доказательство:

Пусть $x_0 < x_1 < ... < x_N < x_{N+1} = X$. При $x_0 \leq x \leq x_1$ неравенство (5) выполняется в силу классической леммы Гронуолла. Теперь предположим, что (5) верно при $x_0 \leq x < x_1, ..., x_{k-1} < x < x_k$.

При $x_k < x < x_{x+1}$ по условию имеем:

$$f(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \alpha + \beta \int_{x_0}^{x_k} f(t)dt + \beta \int_{x_k}^{x} f(t)dt,$$

откуда снова в силу классической леммы Гронуолла находим

$$f(x) \leq \left(\alpha + \beta \int_{x_0}^{x^k} f(t)dt \right) e^{b(x-x_k)}. \tag{6}$$

Рассуждая более строго, следовало бы сначала вместо x_k взять $x_k + \varepsilon, \varepsilon > 0$, применить лемму Гронуолла, потом устремить $\varepsilon \to 0$ и получить (6).

Далее подставим в интеграл из (6) оценку $f(t) < \alpha e^{\beta(t-x_0)}, t \neq x_1, ..., x_k$, которая верна по нашему предположению. Будем иметь

$$f(x) \leq \left(\alpha + \beta \int_{x_0}^{x^k} \alpha e^{\beta(t-x_0)} dt \right) e^{\beta(x-x_0)} = \alpha e^{\beta(x-x_0)}.$$

Таким образом, неравенство (5) доказано по индукции для всех $x \neq x_1, ..., x_k$. Тогда в точках разрыва первого рода $f(x_k \pm 0) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)}$ и, следовательно,

$$f(x) \leq \max\{f(x_k - 0), f(x_k + 0)\} \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)}, \quad k = 1, ..., N.$$

(Точно так же проверяется утверждение из формулировки леммы, заключенное в скобки).

Во **втором** разделе рассмотрена практическая часть, в которой реализуется программа на языке C Sharp с использованием технологий объектно-ориентированного программирования. Программа реализует заданный алгоритм аппроксимации функции по заданным точкам. На вход алгоритма подается набор из значений точек из области определения функции и функция, которую необходимо аппроксимировать. Далее на основе этих данных вычисляются промежуточные и вспопогательные значения, которые в дальнейшем используются в расчете конечных точек.

Результаты работы программы

В таблице 1 приведено точное решение , а также погрешность решения, полученного методом Хаара для 8 произвольных точек.

Таблица 1 – Расчет погрешности аппроксимации методом Хаара

x	Y(X)	H(X)	Y(X)-H(X)
0,0625	0,24740	0,24319	0,00421
0,1875	0,68164	0,67160	0,01004
0,3125	0,94898	0,93744	0,01154
0,4375	0,98399	0,97258	0,01141
0,5625	0,77807	0,76597	0,01211
0,6875	0,38166	0,36941	0,01225
0,8125	-0,10820	-0,11739	0,00920
0,9375	-0,57166	-0,57469	0,00313

Таким образом получено приближенное решение дифференциального уравнения, где $Y(X)$ является точным решением задачи Коши, $H(X)$ - приближенным значением по методу Хаара, а $Y(X) - H(X)$ погрешностью решения, которая составила

$$(R_H) = 0,01225 \tag{7}$$

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

Основные результаты. В бакалаврской работе получены следующие результаты:

1. Рассмотрены математические модели различных экономических процессов, приводящих к дифференциальным уравенениям; особое место отведено построению экономической модели Кейнса и ее обобщений;

2. Построен алгоритм приближенного решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с использованием функций Хаара;

3. Осуществлена программная реализация построенного алгоритма.