Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Методика обучения решению тригонометрических уравнений

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы

направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль – математическое образование)» механико-математического факультета

Слезкиной Дарьи Сергеевны

Научный руководитель
к.п.н., доцент ___________________________ Т.А. Капитонова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ___________________________ И.К. Кондаурова

Саратов 2017

Введение. В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования (ФГОС С(П)ОО) перечислены требования к предметным результатам освоения базового курса математики, в том числе «владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств; владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач»; а также требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики, в частности, «сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач».

Многие этапы решения таких задач у учеников приобретают автоматический характер, и они не вдумываются в каждое выполняемое ими действие. Отсюда нерациональное, а иногда и неправильное решение задачи.

Основная задача учителя математики – развитие ребенка, а не заполнение ячеек памяти формулами. В связи с этим необходимо пересмотреть методические традиции в преподавании тригонометрии.

В школьном курсе математики в разные годы использовались различные подходы при изучении темы «Тригонометрические уравнения». В современных учебных пособиях предпочтение отдается такой схеме изучения этой темы: тригонометрические формулы – преобразование тригонометрических формул – решение тригонометрических уравнений, а также присущ один и тот же недостаток – недооценка важности вывода формул самостоятельно.

Разработкой методики обучения решению тригонометрических уравнений занимались многие математики и методисты (А. В. Шевкин, Ю. М. Колягин, А. Г. Мордкович, В. Н. Литвиненко, И. Ф. Шарыгин, С. В. Королев и др.) Многочисленные статьи по данной теме регулярно публикуются в журналах «Математика в школе», «Математика для школьников» и др.

Однако на практике далеко не все учащиеся осваивают решение тригонометрических уравнений даже на базовом уровне. Причинами этого являются: плохое знание основных тригонометрических формул; непонимание возможности и неумение вывести одну формулу из другой; отсутствие навыков в использования различных видов и способов кодирования и переработки информации, например, визуальной (построение графика, в частности, с помощью онлайн-построителя, решение уравнения с помощью онлайн-калькулятора).

Все выше изложенное обуславливает актуальность темы исследования.

Цель бакалаврской работы: теоретическое описание содержания темы «Тригонометрические уравнения» и разработка методического обеспечения обучения решению тригонометрических уравнений.

Задачи бакалаврской работы:

1. Изучить содержание темы «Тригонометрические уравнения и методы их решения» и рассмотреть различные методические схемы изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе алгебры;
2. Разработать средства, в том числе с использованием информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), по теме «Методы решения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики».

Методы исследования: анализ методико-математической литературы и ИКТ-ресурсов (онлайн-построители / калькуляторы); изучение нормативных документов; педагогическое анкетирование; разработка методических материалов.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Теоретические аспекты изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики»; «Практические аспекты изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики»); заключение; список использованных источников; два приложения.

Основное содержание работы. Первая глава «Теоретические аспекты изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики» была посвящена решению первой задачи бакалаврской работы. Изучив содержание темы «Тригонометрические уравнения и методы их решения» и рассмотрев различные методические схемы изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе алгебры, мы установили, что: (1) под тригонометрическим уравнением понимается уравнение, в котором неизвестная находится под знаком тригонометрических функций; (2) неизвестным в тригонометрическом уравнении является угол (дуга); (3) решение тригонометрического уравнения не отличается от решения алгебраического, но в тригонометрическом уравнении каждому значению тригонометрической функции соответствует неограниченное множество углов, что приводит к неограниченному множеству решений, и состоит из двух этапов: преобразование с помощью стандартных приемов к одному или нескольких простейшим уравнениям и решение полученных простейших уравнений.

Существует два основных метода решения тригонометрических уравнений:

1) метод разложения на множители – в результате разложения на множители решение заданного уравнения сводиться к решению совокупности, а метод замены переменной;

2) метод замены переменной – замена неизвестного, переход к алгебраическому, а возвращение к тригонометрии происходит лишь на этапе решения элементарных тригонометрических уравнений. Данным методом решаются следующие виды уравнений: (1) сводящееся к квадратному (с помощью подстановки ($t = = \sin x$ ($t = \cos x,\ t = \operatorname{tg} x$)); (2) уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$ (с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$); (3) «введение вспомогательного угла» (так называется методический прием, связанный с решением уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$ ($a,\ b,\ c\ \neq 0$); (4) уравнения вида $f(\sin(nx) \pm \sin(mx)) = 0$, $f(\cos(nx) \pm \cos(mx)) = 0$ – решают путем преобразования суммы тригонометрических функций в произведение; (5) уравнения вида $f(\sin(\cos)(nx) \cdot \sin(\cos)(mx)) = 0 -$

решаются путем преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

В классах с углубленным изучением математики учащихся знакомят с универсальной тригонометрической подстановкой $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, позволяющей преобразовать тригонометрическое уравнение в алгебраическое.

Также, при решении тригонометрических уравнений применяют свойства функции такие как: (1) область определения; (2) ограниченность; (3) монотонность; (4) периодичность; (5) четность и нечетность.

Краткий анализ школьных учебников показал, что

1) наиболее удачным для использования является учебник С. М. Никольского и др.: (1) изучение материала происходит в следующей последовательности: *тригонометрические функции – преобразование тригонометрических выражений – тригонометрические уравнения,* что с методической точки зрения является правильным; (2) все виды уравнений изложены доступно и подкреплены достаточным количеством примеров и упражнений;

2) преобладающими являются простейшие тригонометрические уравнения, решение которых основано на определениях соответствующих функций в понятиях арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа;

3) рассматривается недостаточное количество уравнений: (1) уровня ЕГЭ с отбором корней; (2) способ решения которых основан на использовании свойств функций; (3) решаемых графическим способом;

4) на изучение темы тригонометрических уравнений отводится недостаточное количество времени; дополнительное время возможно за счет использования современных технологий: технологий УДЕ, ИКТ-технологий.

Во второй главе «Практические аспекты изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики» для реализации второй задачи бакалаврской работы проведено два опроса среди учителей и учащихся (29 человек) с целью выявления проблем, возникающих при изучении темы

«Тригонометрические уравнения и методы их решения».

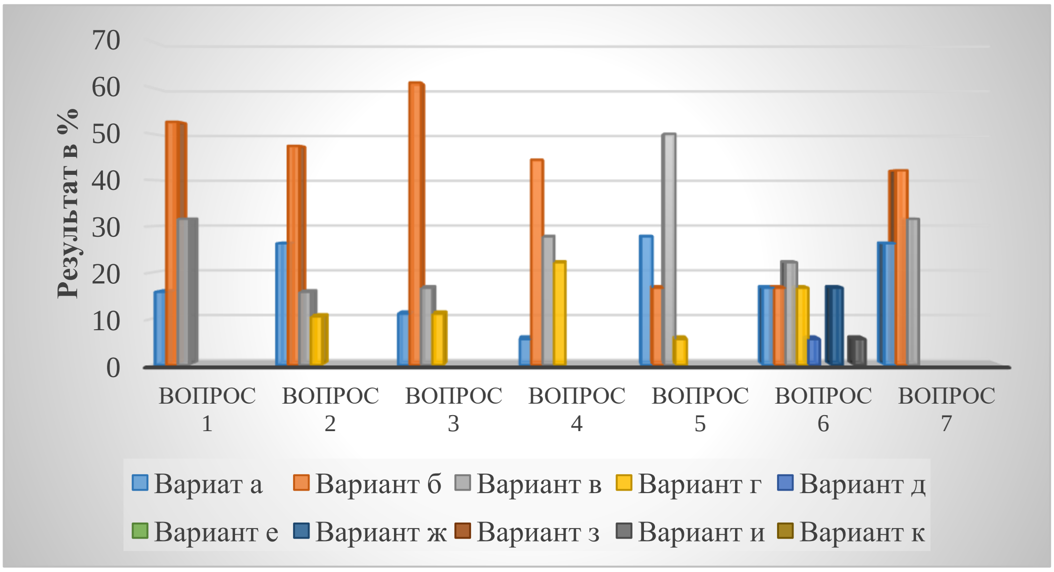

Рисунок 1 – Диаграмма результатов №2

Из проведенных опросов было выявлено, что во-первых, у большей части учащихся отсутствует интерес к изучению данной темы, поэтому целесообразно изменить форму проведения традиционного урока на форму математического квеста или онлайн-урока, урок-лекции; во-вторых, использовать на уроках при изучении данной темы ИКТ-ресурсы, а именно, онлайн-калькуляторы и онлайн-построители; в-третьих, уделить особое внимание группе учащихся, испытывающих трудности при изучении данной темы, посредством специально разработанной системы тренировочных упражнений.

На основании выводов, полученных в результате опросов, были реализованы направления дальнейшего исследования.

I. Проведен анализ ИКТ-ресурсов – онлайн-построителей.

Для работы подходят все онлайн-построители. У каждого из них есть как преимущества, так и недостатки (это видно по оценке в таблице), но в целом, для работы подходит каждый з них, выбор предоставлен пользователю.

Таблица 1 – Оценка онлайн-построителей

Название построителя; № параметра	Граф. Решишь	График функции. Онлайн помощник	Построитель график функции онлайн	Онлайн помощник в изучении математики
1	5	3	4	4
2	5	4	4	4
3	5	4	4	5

Продолжение таблицы 1

4	4	3	4	3
5	5	5	0	4
6	0	5	0	4
7	5	5	5	5
8	5	0	0	0
9	5	3	3	2
Итого	39	32	24	29

II. Проведен анализ ИКТ-ресурсов – онлайн-калькуляторов.

Для работы подходят Math.Solution и Math24.biz онлайн-калькуляторы, так как:

1) в каждом из них приведено подробное решение тригонометрического уравнения;

2) данные калькуляторы многоцелевые, то есть можно использовать не только при тригонометрических уравнений, но и при изучении логарифмических, иррациональных уравнений и неравенств, а также считать производные, матрицы и т. д.;

3) при работе с ними учащий минимально будет отвлекаться на рекламу, она практически отсутствует.

III. Разработана система тренировочных упражнений с целью помощи учащимся в усвоении пройденного материала.

1. Записать решения простейших уравнений с помощью обратных тригонометрических функций.

1) $\sin(2x) = \frac{2}{3}$;

2) $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{3}$;

3) $3\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = -1$.

2. Определить, сколько корней имеет уравнение на отрезке.

1) $-2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sqrt{3}, x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$;

2) $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, x \in [-\pi; 2\pi]$;

3) $2\,\mathrm{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{12}, x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

3. Записать решения простейших уравнений с помощью обратных тригонометрических функций.

4) $\sin(2x) = \frac{2}{3}$;

5) $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{3}$;

6) $3\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = -1$.

4. Определить, сколько корней имеет уравнение на отрезке.

4) $-2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sqrt{3}, x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$;

5) $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, x \in [-\pi; 2\pi]$;

6) $2\,\mathrm{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{12}, x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

IV. Спроектирован урок-лекцию по теме «Методы решения тригонометрических уравнений»

Класс: 10

Тема урока: Методы решения тригонометрических уравнений

Тип урока: урок – лекция, урок изучения нового материала

Цели урока:

– предметные: научить решать некоторые виды тригонометрических уравнений (квадратные) относительно одной из тригонометрических функций; однородные уравнения первой и второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$.

– метапредметные: развивать культуру мысли, культуру речи и умение работать с тетрадью и доской;

– личностные: воспитывать самостоятельность и умение преодолевать трудности.

Оборудование: компьютер с выходом в Интернет, мультимедийный проектор, презентация по теме урока

Рассмотрим примеры на использование метода ведения новой переменной.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1. \ (1)$$

Решение. Обозначим $t = 3x - \frac{\pi}{2}$ и перепишем уравнение (1) в виде $\sin t = 1$, все решения которого составляют единственную серию $t_n = \frac{\pi}{2} + 2\,\pi n$, $n \in Z$.

Теперь найдем все решения уравнения (1):

$$3x_n - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\,\pi n,$$

$$3x_n = \pi + 2\,\pi n,$$

$x_n = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$\cos^2 x$ - $4\cos x + 3 = 0.$ (2)

Решение. Уравнение (2) квадратное относительно $\cos x$.

Обозначим $t = \cos x$ и перепишем уравнение(2) в виде:

$t^2 + 4\,t + 3 = 0.$ (3)

Перед нами стандартное квадратное уравнение. Решаем его по известным нам формулам. Получаем два корня: $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$, следовательно, множество решений уравнения (2) является объединением множества решений двух уравнений:

1) $\cos x = 1$,

$x_n = 2\,\pi n,\ n \in Z;$

2) $\cos x = 3$ – решений нет, так как 3 > 1, а $\cos x \leq 1$ для любого x.

Ответ: $2\,\pi n,\ n \in Z$.

Подведем итог и выведем алгоритм для решения уравнений методом замены переменной.

Алгоритм

1. *Внимательно рассмотреть уравнение;*
2. *Обозначить неизвестную функцию за новую переменную t;*
3. *Решить уравнение относительно t;*
4. *Вернуться к исходной функции и получить ответ.*

Предлагаю Вам просмотреть подробное решение Примера 2 в электронной среде при помощи онлайн-калькулятора Math24.Biz на проверку правильности решения и построить график функции при помощи онлайн – построителя Граф.Решишь.

Заключение. Результаты, полученные при написании бакалаврской работы.

1. В ходе изучения методико-математической литературы определено основное содержание темы «Тригонометрические уравнения и методы их решения». К основными методам относятся метод разложения на множители и метод замены переменной.

2. Рассмотрены методические схемы изучения курса тригонометрии в различных школьных учебниках. Анализ содержания материала (теоретического и задачного) учебников показал, что методическая схема в учебнике С. М. Никольского: *тригонометрические функции – преобразование тригонометрических функция – тригонометрические уравнения* наиболее правильная, так как к рассмотрению тригонометрических уравнений приступают после изучения тригонометрических функций, их свойств и ознакомления с различными преобразованиями тригонометрических выражений.

3. Во всех проанализированных учебниках все виды уравнений изложены доступно и подкреплены достаточным количеством примеров и упражнений. Задачный материал учебников требует дополнения за счет включения уравнений: (1) уровня ЕГЭ с отбором корней; (2) способ решения которых основан на использовании свойств функций; (3) решаемых графическим способом.

4. В ходе анализа ИКТ-ресурсов были выделены наиболее удобные в использовании онлайн-построители и онлайн-калькуляторы, включение которых в учебный процесс, по мнению учителей и учащихся, будет способствовать повышению интереса к изучению данной темы.

5. Разработаны

1) система тренировочных упражнений, дополняющая материал школьных учебников и нацеленная на формирование: (1) умение проводить анализ предложенного уравнения с целью получения оснований для отнесения уравнения к одному из известных видов; (2) умение осуществить обоснованный выбор приема решения; (3) умение решать простейшие тригонометрические уравнения и иллюстрировать решение с помощью графика; (4) умение применять свойства тригонометрических функций при решении уравнений; (5) умение выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений, которое, в свою очередь, предполагает умение применять приемы преобразований алгебраических выражений и соответствующие тригонометрические формулы;

2) план урока-лекции по теме «Методы решения тригонометрических уравнений».