Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Цепные конгруэнции графов

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Смирнова Олега Евгеньевича

Научный руководитель

профессор, к.ф.-м.н. ___________ В.Н. Салий

31.12.2016 г.

Заведующий кафедрой

профессор, к.ф.-м.н. ___________ В.Н. Салий

31.12.2016 г.

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Ориентированный граф (орграф) – это пара $G = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество (вершины графа), а α – бинарное отношение на множестве V (отношение смежности вершин). Пары, входящие в α, называются дугами графа G. Если отношение α антирефлексивно и симметрично, граф называют неориентированным, а каждую пару его встречных дуг (u, v), (v, u) – ребром. Основные понятия приводятся в соответствии с [1].

Путём в графе $G = (V, \alpha)$ называется последовательность рёбер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза. При этом считается, что оба конца каждого ребра, кроме первого и последнего, являются концами соседних с ним рёбер пути. Говорят, что путь проходит через вершины, соединённые его рёбрами. Путь называется простым, если каждая вершина пути принадлежит не более чем двум его рёбрам.

Если начальная и конечная вершины пути совпадают, путь называется циклическим. Простой циклический путь называют циклом.

Если простой путь не является циклом, в нём существуют вершины, принадлежащие только одному ребру этого пути. Очевидно, что таких вершин точно две. Их путь называют концами данного пути, а сам путь – цепью, соединяющей указанные вершины.

Теория графов находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности. С помощью графовых моделей могут быть представлены транспортные системы, алгоритмы, компьютерные и информационные сети, автоматы, отношения в социальных группах и многое другое.

Одним из важных направлений в теории графов является проблема оптимальной реконструкции графа [2]. В качестве допустимых реконструкций обычно рассматриваются следующие:

1) ориентация рёбер данного неориентированного графа (например, известная теорема Оре – критерий ориентируемости графа в сильно связный подграф [3]);

2) добавление новых дуг (рёбер) (эта реконструкция используется, например, для построения отказоустойчивых реализаций по Хейзу-Абросимову [4], [5]);

3) удаление некоторых дуг (рёбер) (здесь общеизвестными результатами являются, например, алгоритмы построения минимального остовного дерева для связной сети, минимальные расконтуривания сетей в технической диагностике [6]);

4) конгруэнции графов – отождествление некоторых вершин графов.

Пусть $G = (V, \alpha)$ – граф и $\varepsilon \subseteq V \times V$ – отношение эквивалентности на множестве его вершин. Фактографом графа G по эквивалентности ε называется граф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha/\varepsilon)$, где $\alpha/\varepsilon = \left\{\left(\varepsilon(u), \varepsilon(v)\right) \in V/\varepsilon \times V/\varepsilon \middle| \left(\exists u' \in \varepsilon(u), v' \in \varepsilon(u)\right)\left((u', v') \in \alpha\right)\right\}$.

Если K – некоторый класс графов, и $G \notin K$, то под K-конгруэнцией графа G понимается такая эквивалентность $\theta \subseteq V \times V$, что $G/\theta \in K$.

С точки зрения оптимальных реконструкций графа интерес вопрос, как устроены минимальные по включению K-конгруэнции заданного графа [2], [7]. Решение этого вопроса для произвольного класса K не известно, однако существуют решения для некоторых конкретных классов.

Например, для класса K функциональных графов М. А. Кабанов указал наименьшую K-конгруэнцию на произвольном графе и установил некоторые свойства решётки функциональных конгруэнций графа [8]. Он же решил аналогичные задачи для классов входящих и выходящих ориентированных деревьев, описал графы со специальными решётками циклических и ациклических конгруэнций.

М. Р. Мирзаянов рассматривал случай, когда K – класс сильно связных орграфов, и нашёл способ построения сильно связной конгруэнции произвольного орграфа, наибольшей по числу вершин в факторграфе [9].

В этой работе будет рассматриваться случай, когда K – класс графов, являющихся цепями. Тогда K-конгруэнции графа называются цепными конгруэнциями.

Дадим более формальное определение цепной конгруэнции.

Пусть $G = (V, \alpha)$ – произвольный граф. Отношение эквивалентности $\theta \subseteq V \times V$ называется цепной конгруэнцией графа G, если θ разбивает множество V на k непустых классов $V_1, V_2, \dots, V_k$, причём таких, что $(\forall i, j \colon 1 \le i, j \le k)\Big(\big((\exists u \in V_i, v \in V_j)((u, v) \in \alpha)\big) \Leftrightarrow |i - j| = 1\Big)$.

Факторцепь графа G максимальна, если она имеет максимальное число вершин среди всех факторцепей графа G.

Цепная конгруэнция графа, имеющая наибольшее число вершин в факторграфе, объединяет наименьшее число вершин и является минимальной с точки зрения реконструкции графа. Поэтому задача нахождения минимальной цепной конгруэнции эквивалентна задаче нахождения максимальной факторцепи заданного графа.

Одной из целей работы является изучение цепных конгруэнций заданного произвольного графа, нахождение алгоритма построения максимальной факторцепи графа и написание программы, реализующей этот алгоритм.

Другой целью этой работы является более подробное изучение структуры упорядоченного множества всех цепных конгруэнций заданного произвольного графа.

Дипломная работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников и одного приложения. Общий объём работы – 82 страницы, из них 51 страница – основное содержание, включая 9 рисунков и 1 таблицу, список использованных источников из 14 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В разделе 1 рассматривается алгоритм построения максимальной факторцепи и программа, реализующая этот алгоритм.

В подразделе 1.1 показывается, что только двудольные графы имеют цепные конгруэнции. Основой этого подраздела является лемма 1.1 и следствие из неё.

Лемма 1.1. Если $G = (V, \alpha)$ – неориентированный граф, содержащий цикл нечётной длины, $\varepsilon \subseteq V \times V$ – произвольное отношение эквивалентности на множестве его вершин, такое, что факторграф G/ε является неориентированным графом, то G/ε содержит цикл нечётной длины.

Следствие. Если граф G не является двудольным, то у него не существует цепных конгруэнций.

В подразделе 1.2 показывается, что суммарный диаметр компонент связности факторграфа по любому отношению эквивалентности не превосходит суммарного диаметра компонент связности исходного графа.

Лемма 1.3. Пусть $G = (V, \alpha)$ – неориентированный граф, содержащий k компонент связности $V_1, V_2, \dots, V_k$, и $\varepsilon \subseteq V \times V$ – произвольное отношение эквивалентности. Тогда $\sum_{i=1}^{k} d(G_i) \geq \sum_{i=1}^{q} d((G/\varepsilon)_i)$, где q – число компонент связности $(G/\varepsilon)_i$ графа G/ε.

В подразделе 1.3 приводится основная теорема раздела, устанавливающая число вершин в максимальной факторцепи графа.

Теорема 1.2. Пусть $G = (V, \alpha)$ – произвольный неориентированный двудольный граф. Тогда существует цепная конгруэнция θ графа G, такая что $|V/\theta| = \sum_{i=1}^{k} d(G_i) + 1$, где k – число компонент связности графа G, а G_i – i-я компонента связности графа G, и при этом G/θ является максимальной факторцепью G, а θ – минимальной цепной конгруэнцией G.

На основании теоремы 1.2 был составлен алгоритм 1.1 построения максимальной цепи, приведённый в подразделе 1.4. Также в этом разделе рассматривается пример

Алгоритм 1.1. Дан двудольный граф $G = (V, \alpha)$. Требуется построить его минимальную цепную конгруэнцию θ и найти максимальную факторцепь $G/\theta.$

1) Найти в каждой компоненте связности V_i пару наиболее удалённых вершин, и зафиксировать по одной из них;

2) Посчитать для всех вершин $v \in V$ величину $d_i(v)$ – расстояние от вершины v до зафиксированной вершины, находящейся в той же компоненте связности, что и v;

3) Построить отношение эквивалентности θ следующим образом:

$$(u, v) \in \theta \wedge \ (v, u) \in \theta \Leftrightarrow \Big(\Big((u \in V_i) \wedge (v \in V_i) \wedge \big(d_i(u) = d_i(v)\big)\Big) \vee$$

$$\vee \Big((u \in V_i) \wedge (v \in V_{i+1}) \wedge \big(d_i(u) = d(G_i)\big) \wedge (d_{i+1}(v) = 0)\Big)\Big).$$

В подразделе 1.5 описывается программа для нахождения максимальной факторцепи, реализующая алгоритм 1.1. Программа написана на языке Java, имеет графический интерфейс и обеспечивает выполнение следующих функций:

1) ввод графа в программу с помощью визуального редактора графа (рис. 5) или в текстовом формате

2) проверка введённого графа на двудольность;

3) нахождение минимальной цепной конгруэнции и максимальной факторцепи заданного графа;

4) вывод найденного результата в графической или текстовой форме.

В разделе 2 приводятся теоремы, описывающие особенности структуры упорядоченного множества цепных конгруэнций.

В подразделе 2.1 приводятся основные определения, используемые в этом разделе, а так же уточняются некоторые подробности рассматриваемой в разделе задачи.

В подразделе 2.2 изучается длина упорядоченного множества цепных конгруэнций произвольного двудольного графа, его экстремальные элементы, а так же глубину произвольного элемента.

Теорема 2.1. Пусть G – произвольный двудольный граф, не являющийся вполне несвязным. Тогда в упорядоченном множестве $(Con_P(G), \subseteq)$ глубина конгруэнции θ равна $dp(\theta) = c(\theta) - 2$, где $c(\theta)$ – число классов конгруэнции θ.

Теорема 2.2. Пусть G – произвольный двудольный граф, не являющийся вполне несвязным. Тогда упорядоченное множество $(Con_P(G), \subseteq)$ имеет длину $\sum_{i=1}^{k} d(G_i) - 1$, где G_i – i-я компонента связности графа G, а k – число компонент связности G.

Теорема 2.3. Пусть G – произвольный двудольный граф, не являющийся вполне несвязным. Конгруэнция θ является максимальной в $(Con_P(G), \subseteq)$ тогда и только тогда, когда факторграф по ней – двухэлементная цепь.

Теорема 2.4. Пусть G – произвольный двудольный граф, не являющийся вполне несвязным. Упорядоченное множество $(Con_P(G), \subseteq)$ имеет наибольший элемент тогда и только тогда, когда граф G связный.

В подразделе 2.3 рассматриваются главные коидеалы в упорядоченных множествах цепных конгруэнций двудольных графов. Показывается, что главные коидеалы упорядоченного множества цепных конгруэнций произвольного двудольного графа изоморфны упорядоченным множествам цепных конгруэнций цепей подходящей длины.

Теорема 2.5. Пусть θ – произвольная цепная конгруэнция графа $G \in B^*$ и $dp(\theta) = k$. Тогда $CoId(\theta) \cong (Con_P(P_{k+2}), \subseteq)$.

Следствие. Главные коидеалы, порождённые конгруэнциями, имеющими одинаковую глубину в $(Con_P(G), \subseteq)$, являются изоморфными упорядоченными множествами.

Также в этом подразделе приводятся формулы для нахождения числа элементов, атомов и коатомов в главных коидеалах.

Теорема 2.6. Пусть θ – произвольная цепная конгруэнция графа $G \in B^*$ и $dp(\theta) = k \geq 1$. Тогда число коатомов в $CoId(\theta)$ равно $cc(\theta) = 2^{\left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor - 1} +$ $+ 2^{\left\lceil \frac{k+2}{2} \right\rceil - 1} - 2$.

Теорема 2.7. Пусть θ – произвольная цепная конгруэнция графа G и $dp(\theta) = k$. Тогда число атомов в $CoId(\theta)$ равно $ca(\theta) = \left\lfloor \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{6} \right\rfloor$.

Теорема 2.9. Пусть θ – произвольная цепная конгруэнция графа G и $dp(\theta) = k$. Тогда $CoId(\theta)$ содержит $ce(\theta) = 2^k$ элементов.

В подразделе 2.4 показывается, что упорядоченное множество цепных конгруэнций в общем случае не является ни верхней полурешёткой, ни нижней полурешёткой, ни решёткой.

Теорема 2.10. Пусть $G \in B^*$ и $\sum_{i=1}^{k} d(G_i) \geq 6$, где k – число компонент связности G_i графа G. Тогда $(Con_P(G), \subseteq)$ не является ни верхней, ни нижней полурешёткой.

Следствие 1. Главные идеалы $Id(\theta)$ упорядоченного множества $(Con_P(G), \subseteq)$ в общем случае не являются ни верхними, ни нижними полурешётками.

Следствие 2. Главные коидеалы $CoId(\theta)$ упорядоченного множества $(Con_P(G), \subseteq)$ общем случае не являются ни верхними, ни нижними полурешётками.

Таким образом, теоремы, полученные при написании раздела 2, достаточно подробно описывают особенности структуры упорядоченного множества цепных конгруэнций произвольного двудольного графа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были получены следующие результаты:

1) показано, что любой двудольный граф имеет хотя бы одну цепную конгруэнцию, в то время как любой граф, не являющийся двудольным, не имеет ни одной цепной конгруэнции;

2) найден алгоритм нахождения максимальной факторцепи и минимальной цепной конгруэнции произвольного двудольного графа;

3) написана программа, реализующая алгоритм нахождения максимальной факторцепи и минимальной цепной конгруэнции произвольного двудольного графа;

4) найдена формула, определяющая длину упорядоченного множества цепных конгруэнций произвольного двудольного графа и глубину каждого его элемента;

5) описаны максимальные элементы упорядоченного множества цепных конгруэнций произвольного двудольного графа, а также найден критерий существования наибольшего элемента в множестве цепных конгруэнций;

6) подробно изучены главные коидеалы упорядоченного множества цепных конгруэнций произвольного двудольного графа; в частности, найдена формула для общего числа элементов, числа атомов и числа коатомов в коидеале;

7) показано, что главные коидеалы упорядоченного множества цепных конгруэнций произвольного двудольного графа изоморфны упорядоченным множествам цепных конгруэнций цепей подходящей длины;

8) показано, что упорядоченные множества цепных конгруэнций произвольных двудольных графов в общем случае не являются ни верхними, не нижними полурешётками (а, следовательно, и решётками);

9) показано, что главные идеалы и главные коидеалы упорядоченных множеств цепных конгруэнций произвольных двудольных графов в общем случае не являются ни верхними, не нижними полурешётками.

Программа для поиска минимальной цепной конгруэнции графа была зарегистрирована в Роспатенте [13].

Часть результатов, полученных при написании работы, докладывалась на VII Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» [14].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Алгебраические основы теории дискретных систем: монография / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. М.: Наука; Физматлит, 1997. 368 с.

2 Салий, В. Н. Оптимальные реконструкции графов // В кн.: Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2008. С. 59-65.

3 Теория графов = Theory Of Graphs = THEORY OF GRAPHS: перевод с английского / О. Оре; под ред. Н. Н. Воробьёва. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы [Физматлит], 1968. 352 с.

4 Абросимов М. Б. Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов / М. Б. Абросимов // Известия Саратовского университета. Серия. Математика. Механика. Информатика. Саратов: СГУ, 2006. Т. 6. Вып. 1/2. С. 86-91.

5 Hayes, J. P. A graph model for fault-tolerant computing systems / J. P. Hayes // IEEE Trans. Comput. 1976. №9. p. 25.

6 Введение в техническую диагностику / под общ. ред. чл.-кор. АН СССР К. Б. Карандеева. М.: Энергия, 1968. 224 с.

7 Салий В. Н. Параметрическая отказоустойчивость и оптимизация в графовых моделях дискретных систем // Интеллектуальные системы и компьютерные науки: Материалы IX Междунар. конф. М.: Изд-во МГУ, 2006. Т. 1, ч. 2.

8 Кабанов, М. А. Функциональные конгруэнции ориентированных графов / М. А. Кабанов // Упорядоченные множества и решётки. Саратов, 1995. Вып. 11. С. 15-23.

9 Мирзаянов, М. Р. Сильно связные конгруэнции ориентированных графов / М. Р. Мирзаянов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2006. Вып. 7. С. 104-114.

10 Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. М.: Мир, 1973. 300 с.

11 Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. 2-е. М.: Вильямс, 2005. 1296 с.

12 Фомина Е. О. Конгруэнции цепей и циклов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. – Саратов, 2013. – 100 с.

13 Свидетельство №2016618406 Российская Федерация. Программа для ЭВМ «Поиск минимальной цепной конгруэнции графа» / О. Е. Смирнов. Заявка № 2016615550 от 31.05.2016. Опубл. 28.07.2016.

14 Смирнов О. Е. Минимальные цепные конгруэнции графов / О. Е. Смирнов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. – Саратов: Издат. центр «Наука», 2016. – С. 384-386.