

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Особенности формирования и грубость пространственных  
структур в ансамблях нелокально связанных элементов с  
удвоениями периода**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 241 группы

направления 03.04.03 «Радиофизика»

физического факультета

**Буха Андрея Владимировича**

Научный руководитель

ассистент, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

А.В. Слепнев

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

В.С. Анищенко

г. Саратов — 2017

## ВВЕДЕНИЕ

Химерные состояния в последние годы вызывают большой интерес ученых и интенсивно исследуются. Такие состояния характерны для ансамблей нелинейных осцилляторов с нелокальными связями. В некоторых случаях они также могут наблюдаться в системах с глобальным и локальным взаимодействием. Главной отличительной чертой химерных состояний является наличие в ансамбле из идентичных элементов кластеров осцилляторов с качественно различным поведением. Осцилляторы, состояния которых близки к синфазной синхронизации составляют так называемые когерентные кластеры, в то время как осцилляторы с нерегулярно распределенными состояниями образуют некогерентные кластеры.

Интерес к химерным состояниям вызван, с одной стороны, их типичностью для широкого класса нелинейных ансамблей с нелокальными связями, а с другой — важнейшей ролью подобных моделей при математическом моделировании реальных многокомпонентных систем и протекающих в них процессов в таких областях, как биофизика, нейродинамика, экология, социология, компьютерные и энергетические сети. Хотя роль химерных состояний в функционировании объектов живой природы и техники пока до конца не ясна, последние исследования показывают, что возникновение таких состояний во многих реальных системах вполне возможно, тем более, что химеры обнаружены не только при численном моделировании, но и в физических экспериментах.

К особому типу можно отнести химерные структуры, возникающие в ансамблях хаотических систем (автогенераторов хаоса или отображений последования). Как правило, рассматриваются хаотические системы, демонстрирующие переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Химеры образуются в ансамблях из таких систем с нелокальным взаимодействием в области значений связи, соответствующих переходу из режима полной хаотической синхронизации (при сильной связи) к полностью несинхронному хаосу (при слабой связи). Они представляют собой структуры, состоящие из когерентных кластеров, элементы которых близки к полной (синфазной) хаотической синхронизации и некогерентных кластеров, включающих осцилляторы с несогласованным хаотическим поведением. Характер хаотического режи-

ма важен с точки зрения возможности возникновения химер. В ансамблях элементов, демонстрирующих негиперболический хаос можно наблюдать амплитудные и фазовые химеры. Первые характеризуются сосуществованием кластеров с когерентным и некогерентным поведением. Вторые — сосуществованием кластеров с синфазными элементами и с элементами, временные реализации которых сдвинуты на дробную часть периода друг относительно друга. До сих пор не вполне ясно, как соотносятся химеры в хаотических ансамблях с фазовыми и амплитудными химерами, наблюдающимися в ансамблях фазовых осцилляторов и автогенераторов. Данный вопрос не рассматривался в научной литературе.

Кроме того, на сегодняшний день остается еще один мало изученный вопрос. Он касается влияния шума на возникновение и устойчивость химерных структур. В настоящей работе исследуются закономерности возникновения и эволюции химерных структур на примере ансамбля хаотических автогенераторов Анищенко-Астахова с нелокальными связями. Уточняются новые детали механизма формирования хаотических химер. Описывается новый тип нестационарной химерной структуры, не наблюдавшийся в других моделях ансамблей хаотических осцилляторов. Целями исследования являются: выявить общие черты химерных структур в ансамблях систем с удвоениями периода; особенности, которые могут быть характерными для конкретной модели; а также установить место хаотических химер в общей классификации химерных состояний. Кроме того, целью данной работы является исследование влияния шумового воздействия на пространственные структуры, возникающие в ансамбле отображений последования. Как известно, в таких ансамблях с ростом силы связи наблюдается переход от состояния некогерентного хаоса к полной хаотической синхронизации, сопровождающийся формированием в переходной области химерных структур двух типов, названных фазовыми и амплитудными химерами.

## Основное содержание работы

За последнее время различными исследователями в области нелинейной динамики было обнаружено немало различных типов химерных состояний в самых разнообразных системах. Первыми обнаружили новый эффект сосуществования кластеров с различающимся поведением японские физики Йошики Курамото и Дорсурен Баттогтох<sup>1</sup>. Особое поведение было обнаружено в ансамбле фазовых осцилляторов с идентичными частотами парциальных элементов и симметричной связью. Колебания в одном кластере были синхронными, а в другой части — асинхронными. Позже Стивен Строгатс назвал такое состояние химерой за сходство с мифическим греческим чудовищем<sup>2</sup>.

Обнаружение нового режима породило множество вопросов. Первый вопрос касается времени жизни химерных состояний. Вообще говоря, такие структуры с сосуществованием различных по поведению кластеров являются метастабильными, и их можно считать стационарными только если число элементов бесконечно  $N \rightarrow \infty$ . Второй более сложный вопрос — о природе столь уникального явления. На данный момент нет единой теории, объясняющей причину его проявления. Кроме как в ансамбле фазовых осцилляторов, химерные состояния возникают и во многих других сетях отображений или осцилляторов. В числе таких систем — ансамбли отображений, которые демонстрируют переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

В рамках настоящей работы будут рассмотрены два типа химерных состояний: фазовая и амплитудная химеры, которые могут как существовать по отдельности, так и сосуществовать в одной структуре. Фазовые и амплитудные химеры отличаются друг от друга поведением элементов в кластерах некогерентности. «Голову» фазовой химеры формируют элементы, временные реализации которых практически идентичны, но могут быть сдвинуты друг относительно друга на одну итерацию («противофазны»). И наличие такого сдвига нерегулярно распределено по кластеру некогерентности. В случае амплитудной химеры такой кластер представляет собой группу элементов с более развитой (по сравнению с элементами из когерентного кластера)

---

<sup>1</sup>Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 380–385.

<sup>2</sup>Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators // Physical review letters. 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102.

хаотической динамикой, колебания которых «синфазны», но не идентичны. Недавно при участии автора диссертации были обнаружены двукиммерные структуры в двумерных решетках из бистабильных элементов <sup>3</sup>. Такие химеры характеризуются тем, что часть элементов одновременно расположена в одной «ямке», в то время как в другом кластере элементы случайно распределены между «ямками» в фиксированный момент времени. Динамика каждого из элементов при этом характеризуется хаотическим аттрактором.

Влияние шума на сети элементов исследуется во многих работах. Так, например, авторы публикации <sup>4</sup> исследуют воздействие аддитивного шума на периодические в пространстве структуры в среде, элементарной ячейкой которой является генератор с инерционной нелинейностью Анищенко – Астахова. В работе показано, что различные пространственные моды по-разному устойчивы к шуму и под действием шума возможно переключение между модами.

Сравнительно недавно И. Омельченко с коллегами исследовали влияние шума на химерные состояния в ансамбле нелокально связанных осцилляторов Фитц-Хью Нагумо (ФХН) <sup>5</sup>. Они рассмотрели одномерное кольцо из таких нелокально связанных осцилляторов, где каждый элемент связан с соседями с помощью двумерной матрицы и изучили влияние неидентичности элементов на химерные структуры с разным количеством некогерентных кластеров. При этом многоголовые химеры сменяются химерами с одним кластером некогерентности при увеличении параметра неидентичности.

### **Химерные состояния в ансамбле осцилляторов Анищенко – Астахова.**

Во второй главе работы рассматривается ансамбль из нелокально связанных генераторов Анищенко-Астахова. Большим значениям силы связи соответствует режим полной хаотической синхронизации, когда все осцилляторы колеблются одинаково и синфазно. Напротив, при малых значениях силы свя-

---

<sup>3</sup>New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction / I. A. Shepelev, T. E. Vadivasova, A. V. Bukh et al. // *Physics Letters A*. 2017. Vol. 381, no. 16. P. 1398–1404.

<sup>4</sup>Слепнев А. В., Вадивасова Т. Е. Бифуркации удвоения периода и эффекты шумового воздействия в мультистабильной автоколебательной среде // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, No 4.

<sup>5</sup>Robustness of chimera states for coupled FitzHugh–Nagumo oscillators / I. Omelchenko, A. Provata, J. Hizanidis et al. // *Physical Review E*. 2015. Vol. 91, no. 2. P. 022917.

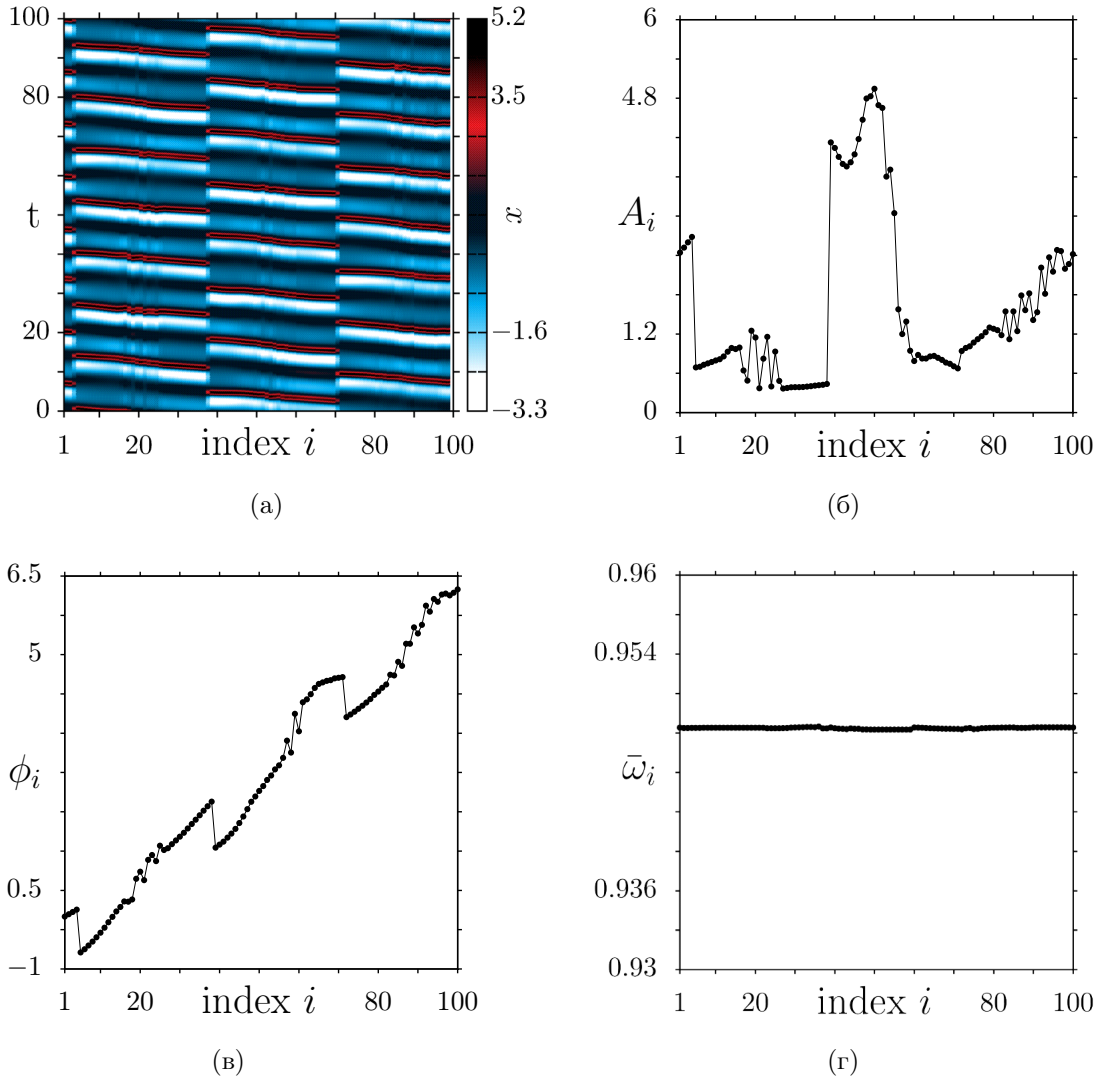


Рисунок 1 — Стационарность химерного состояния при  $r = 0.2$ ,  $\sigma = 0.04$ : (а): пространственно-временная диаграмма химеры, рожденной на бегущей волне  $n = 1$ ; (б): профиль мгновенных амплитуд колебаний  $A_i$ ; (в): профиль мгновенных сдвигов фаз  $\phi_i$ ; (г): средние частоты хаотических колебаний элементов.

зи синхронность колебаний нарушается и наблюдается нерегулярность как в пространстве так и во времени. В переходной области значений силы связи могут наблюдаться химерные состояния.

Рассмотрим химеру, которая возникла на бегущей волне (рис. 1). Она относится к нестационарным химерам, поскольку ее фазовый фронт движется вдоль кольца. Но голова химеры при этом не движется вдоль кольца, и границы когерентного и некогерентного кластеров остаются неизменными несмотря на дрейф волнового фронта сквозь них. Разрушение мгновенного волнового профиля и нерегулярные колебания в некогерентном кластере получаются в этом случае таким же образом, как для стационарной химе-

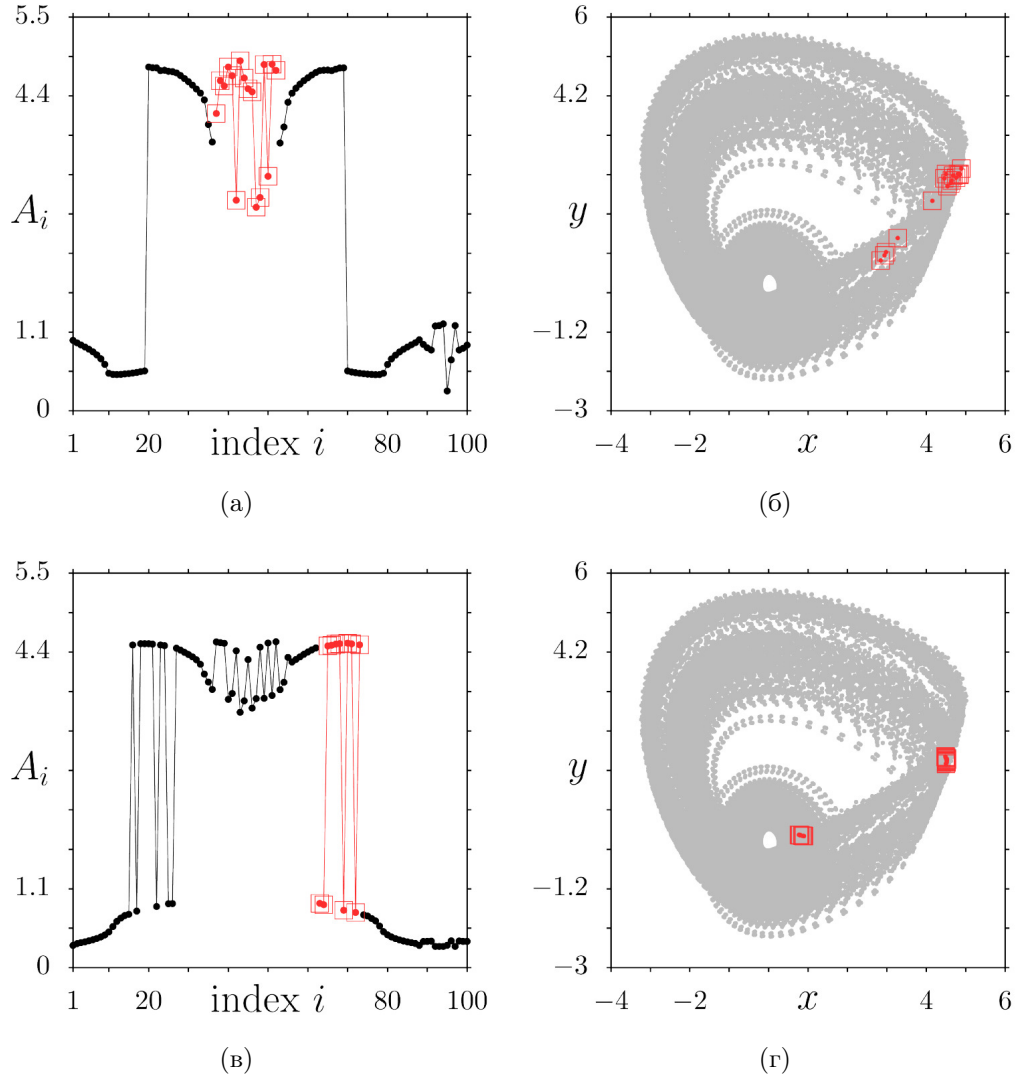


Рисунок 2 — Иллюстрация кластеров химерной структуры, полученной в системе из стоячей волны (а),(б) и из специальных начальных условий (в),(г) при  $r = 0.25$ ,  $\sigma = 0.04$ : (а),(в) пространственные профили мгновенных амплитуд колебаний; (г),(б) мгновенные состояния осцилляторов из некогерентного кластера (красные точки в квадратах) в сравнении с фазовыми портретами элементов (серые точки) на плоскости  $(x, y)$ .

ры. Формирование кластеров с некогерентным поведением здесь также не связано с образованием разрывов на гладком профиле. Как показано на рисунке 1(в), фазовый сдвиг на всем кольце равен  $2\pi$  и соответствует бегущей волне с  $n = 1$ . В то же время, средние частоты всех элементов равны друг другу, что говорит о том, что этот режим также относится к амплитудным химерам.

Кроме того, в ходе работы было обнаружено новое различие в поведении фазовых и амплитудных химер (рис. 2). Оказалось, что в случае амплитудной химеры элементы из одного кластера расположены на одном витке хаотиче-

ского аттрактора (рис. 2(б)), тогда как в случае фазовой химеры — на разных (рис. 2(г)).

### Индукцированные переходы в ансамблях отображений

В третьей главе дипломной работы рассматривается влияние шума на ансамбли логистических отображений и отображений Рикера. Здесь представлены результаты только для ансамбля отображений Рикера, так как они качественно схожи.

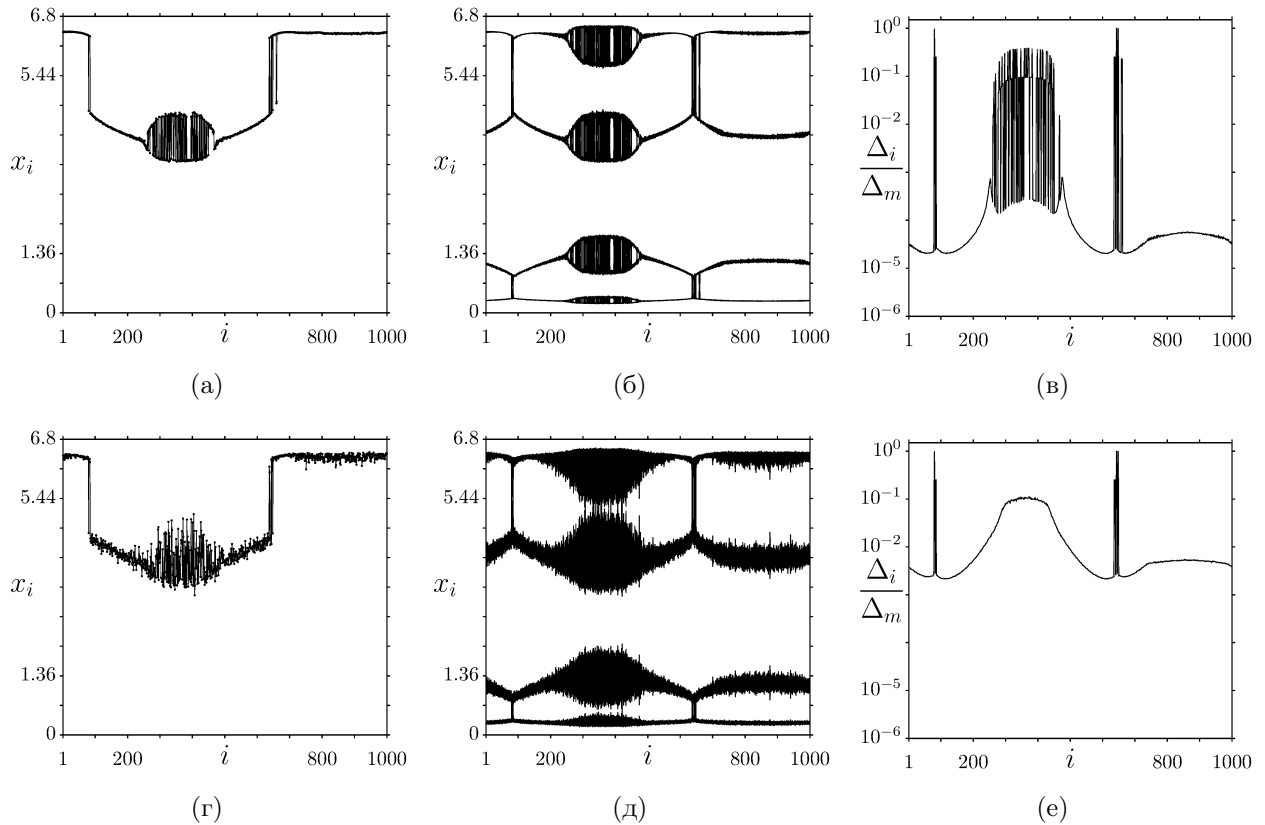


Рисунок 3 — Влияние шума на фазовую химеру в ансамбле отображений Рикера для различных значений интенсивности шума: (а),(б),(в)  $D = 10^{-6}$ ,  $\Lambda = -0.0079898704$ ; (г),(д),(е)  $D = 10^{-4}$ ,  $\Lambda = 0.0325297252$ . Слева представлены мгновенные пространственные снимки, в середине — пространственно-временные снимки, а справа — девиации элементов. Параметры системы:  $\alpha = 18.3$ ,  $\sigma = 0.232$ ,  $P = 345$ .

Численное моделирование ансамбля отображений Рикера выявляет следующую картину влияния шума на различные пространственные структуры. С ростом шума в системе наблюдается переход к хаотической динамике во времени и максимальный ляпуновский показатель становится положительным. Обычные (противофазные) фазовые химеры демонстрируют значительную устойчивость к шумовому воздействию и разрушаются только при очень сильном шуме, а фазовые химеры второго порядка в области хаотической ди-



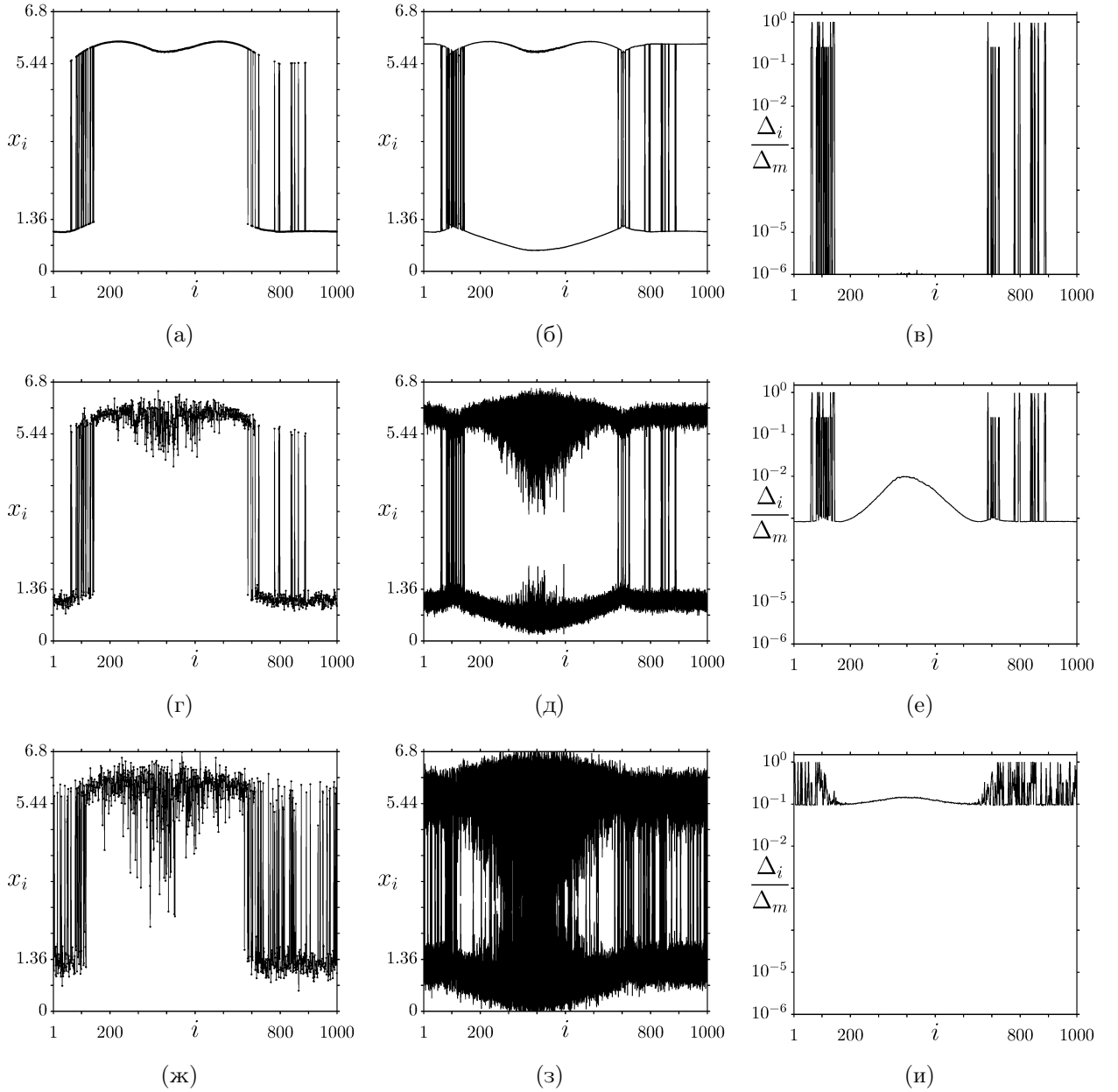


Рисунок 4 — Влияние шума на фазовую химеру в ансамбле отображений Рикера для различных значений интенсивности шума: (а),(б),(в)  $D = 10^{-5}$ ,  $\Lambda = -0.1060085343$ ; (г),(д),(е)  $D = 10^{-4}$ ,  $\Lambda = -0.1402017521$ ; (ж),(з),(и)  $D = 10^{-3.55}$ ,  $\Lambda = 0.0008167672$ . Слева представлены мгновенные пространственные снимки, в середине — пространственно-временные снимки, а справа — девиации элементов. Параметры системы:  $\alpha = 18.3$ ,  $\sigma = 0.274$ ,  $P = 345$ .

намики трансформируются в амплитудные химеры. Далее приведены некоторые примеры, иллюстрирующие эти эффекты.

На рисунке 3 представлено влияние шума на некогерентный кластер, соответствующий фазовой химере второго порядка. В данном случае переход к индуцированному шумом хаосу имеет место при  $D \approx 10^{-4.4}$ , когда максимальный ляпуновский показатель становится положительным (рис 3(г)).

При меньших значениях шума химерная структура, установившаяся в детерминированной системе, сохраняется (рис 3(а)). Фазовая химера наблюдается вплоть до перехода к хаотической динамике. Когда максимальный ляпуновский показатель становится положительным, на месте некогерентного кластера фазовой химеры второго порядка возникает некогерентный кластер амплитудной химеры (рис. 3(г)).

При значениях параметров связи  $\sigma = 0.274$ ,  $r = 0.345$  и выбранных начальных условиях в ансамбле нелокально связанных отображений Рикера без шума наблюдается фазовая химера. Рассмотрим влияние внешнего шумового воздействия на такую пространственную структуру. На рисунке 4 представлены типичные пространственные характеристики системы при различных значениях интенсивности шума  $D$ . При  $D \approx 10^{-4}$  влияние шума почти незаметно (рис. 4(а)), но при  $D \approx 10^{-2}$  на месте когерентного кластера возникают нерегулярные осцилляции, свидетельствующие о рождении амплитудной химеры (рис. 4(г)). О формировании некогерентного кластера, типичного для амплитудной химеры, свидетельствует и рост нормированной девиации элементов в этой области (рис. 4(в)). Однако, если интерпретировать индуцированный шумом некогерентный кластер как амплитудную химеру, то следует заметить, что она отличается от аналогичной химеры в ансамбле хаотических осцилляторов без шума и от химер, возникающих на месте фазовых химер второго порядка, поскольку в данном случае колебания во времени не являются хаотическими, о чем свидетельствует максимальный ляпуновский показатель, который еще остается отрицательным. При дальнейшем росте шума колебания становятся слабо хаотическими. При этом химерная структура размывается и выделить когерентные кластеры становится невозможным (рис. 4(ж)).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований было установлено, что химерные состояния в ансамбле хаотических автогенераторов с фейгенбаумовским сценарием формирования хаоса могут быть связаны с существованием неупорядоченных осцилляций как мгновенных амплитуд, так и мгновенных фаз у осцилляторов, образующих некогерентный кластер. В то же время, этот случай существенным образом отличается от фазовых химер в ансамбле осцилляторов Курамото, а также от амплитудно-опосредованных химер, наблюдавшихся в ансамблях периодических автогенераторов с нелокальной связью. Отличие состоит в том, что хаотические химеры соответствуют режиму частотной синхронизации — все автогенераторы имеют одну и ту же среднюю частоту колебаний. Большую роль в формировании химер в ансамбле хаотических автогенераторов играет многообходный характер аттрактора. В этом случае одному и тому же углу поворота изображающей точки в подходящей проекции могут соответствовать различные мгновенные состояния. Соответственно, при одинаковой средней частоте колебаний всех осцилляторов могут возникать группы осцилляторов, мгновенные состояния которых чередуются в пространстве нерегулярным образом, что приводит к формированию химеры.

Все известные хаотические химеры, существующие в системах с фейгенбаумовским сценарием перехода к хаосу, имеют много общего. В то же время, особые черты динамики индивидуального автогенератора могут приводить к особенностям в поведении ансамбля и возникновению новых типов химерных структур. Так генератор Анищенко-Астахова обладает более сложной динамикой, чем логистическое отображение или даже осциллятор Рёсслера. В фазовом пространстве отдельно взятого генератора Анищенко-Астахова имеется несколько семейств многообходных хаотических аттракторов <sup>6</sup>. По-видимому, эта более сложная динамика парциальной системы является причиной того, что в ансамбле генераторов Анищенко-Астахова с нелокальной связью был обнаружен особый тип нестационарной химеры, возникающей в

---

<sup>6</sup>Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: tutorial and modern developments / V. S. Anishchenko, V. Astakhov, A. Neiman et al. Springer, 2007.

результате трансформации мгновенного профиля бегущей волны. Полученные результаты опубликованы в <sup>7</sup>.

Другой задачей было проанализировать влияния шума на химерные состояния. Проведенные исследования позволяют утверждать, что обычные фазовые химеры могут проявлять значительную устойчивость по отношению к пространственно-некоррелированному шумовому возмущению. Можно выделить разные типы фазовых химер, соответствующие различным фазовым сдвигам для элементов некогерентного кластера. В данном исследовании мы различаем обычную противофазную фазовую химеру и фазовую химеру второго порядка. Можно предположить существование и других, еще более сложных фазовых химер. Как показали проведенные исследования, фазовые химеры второго порядка менее устойчивы к шуму, чем противофазные. Воздействие шума на такую химерную структуру приводит к переходу в режим динамического хароса. При этом наблюдается трансформация некогерентных кластеров фазовой химеры второго порядка в некогерентные кластеры амплитудной химеры. Кроме этого было установлено, что шумовое воздействие в некоторых случаях может приводить к возникновению кластера элементов с некогерентным поведением в центре когерентного кластера. Таким образом, шумовое воздействие соответствующей интенсивности может существенно менять характер пространственной структуры, не приводя к ее полному разрушению.

Мы не можем утверждать, что наблюдаемые в присутствии шума структуры являются строго стационарными. Возможно, они носят метастабильный характер. Однако все расчеты проводились на достаточно длительных временах наблюдения с использованием больших времен установления, что позволяет считать исследуемые режимы стационарными, по крайней мере с точки зрения численного моделирования. Результаты о влиянии шума на химерные структуры планируется опубликовать.

---

<sup>7</sup>Slepnev A. V., Bukh A. V., Vadivasova T. E. Stationary and non-stationary chimeras in an ensemble of chaotic self-sustained oscillators with inertial nonlinearity // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 88, no 4. P. 2983-2992. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-017-3426-0>.