

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Компьютерной алгебры и теория чисел

**«Применения производящих функций к перечислению графов и деревьев»**

наименование темы курсовой работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 227 группы

направления 010200 – Математика и компьютерные науки

код и наименование направления (специальности)

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Отакулова Эльбека Шухрат углы

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н

должность, уч. степень, уч. звание

\_\_\_\_\_

подпись,дата

А.М. Водолазов

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой геометрии

доцент, к.ф.-м.н

должность, уч. степень, уч. звание

\_\_\_\_\_

подпись,дата

А.М. Водолазов

инициалы, фамилия

Саратов 2017

## ВВЕДЕНИЕ

Последовательность является одним из основных понятий математики. Она довольно часто используется в различных областях науки, самый распространенный пример использования последовательностей - это банковские расчеты.

Помимо этого можно встретить последовательности в биологии, химии, медицине и других областях наук.

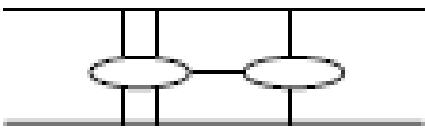
При изучении многих явлений сначала получают некоторые данные, которые представляют собой последовательность величин, а уже после этого составляют формулы, выражающие определённую зависимость между изучаемыми величинами. Часто наиболее простыми такими формулами являются *рекуррентные соотношения*. Наиболее изученными в школьном курсе являются арифметическая и геометрическая прогрессии, являющиеся частным случаем рекуррентных соотношений.

Рекуррентные соотношения является небольшой частью дискретной математики. В свою время дискретная математика играет большую роль в разработке принципов работы компьютера, т.к. работа компьютера представляет собой выполнение последовательности дискретных шагов, приводящих к решению поставленной перед компьютером задачи.

Поэтому данная тема на сегодняшний момент является не менее актуальной.

При решении рекуррентных соотношений, наиболее часто применяются *производящие функции*. Рекуррентные соотношения, в свою очередь, часто возникают также в дискретной математике и комбинаторике, поэтому метод производящих функций для решения рекуррентных соотношений изучают именно в рамках этих дисциплин.

Теория графов является одним из разделов дискретной математики, который исследует свойства конечных или счетных множеств с заданными отношениями между их элементами. Особенностью этой теории является геометрический подход



Создан в 1936 венгерский математик Денеш Кёниг. История графов была написана еще 1736 году Леонардом

**Рис. 1** Эйлером в книге «Избранные задачи о пологих мостах». Суть задачи состоит в следующем. На рис.1 представлена схема центральной части города Кёнигсберг (ныне Калининград), которая включает два берега реки, два острова в ней и семь соединенных их мостов. Требуется обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку.

Современная теория графов даёт исключительно удобный аппарат для моделирования структурных свойств различных систем и отношений между объектами разной природы. Поэтому она широко используется в разнообразных областях науки, техники и практической деятельности. В частности, теория графов находит свое применение в информатике и программирование, химии, экономике, логистике, в коммуникационных и транспортных системах, схемотехнике.

Теория перечисления графов занимается разработкой методов подсчета числа неизоморфных графов, обладающих тем или иным свойством. Вероятнее всего, эта теория возникла в 70-х годах девятнадцатого столетия и связана с именем Кэли, который пытался найти число насыщенных углеводородов  $C_n H_{2n+2}$ , содержащих данное число атомов углерода. Как он обнаружил, эта задача сводится к подсчету числа деревьев, у которых степень каждой вершины равна либо четырем, либо единице. Сейчас многие задачи по перечислению графов решены с помощью производящих функций.

## Глава 1. Производящие функции.

В комбинаторике производящая функция последовательности  $\{a_n\}$  — это формальный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Зачастую производящая функция последовательности чисел является рядом Тейлора некоторой аналитической функции, что может использоваться для изучения свойств самой последовательности. Однако, в общем случае производящая функция не обязана быть аналитической.

Производящие функции дают возможность просто описывать многие сложные последовательности в комбинаторике, а иногда помогают найти для них явные формулы.

Метод производящих функций был разработан Тейлором 1750-х годах.

### § 1.1. Производящие функции и их свойства

**Определение 1.1.** Пусть  $a_0, a_1, a_2, \dots$  — произвольная (бесконечная) последовательность чисел (целых, рациональных, вещественных или комплексных). *Производящей функцией (производящим рядом)* называется запись вида

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

**Замечание 1.2.** Не следует думать, что мы можем сказать, чему равно значение производящей функции  $A$  в точке  $s = s_0$ . Переменная  $s$  является формальной, и ряд  $a_0 + a_1 s_0 + a_2 s_0^2 + \dots$  смысла не имеет. Единственное, что мы можем сказать про функцию  $A(s)$ , это что ее значение в нуле равно  $a_0$ . Если, однако, производящий ряд является полиномом (т.е. все его коэффициенты кроме конечного числа равны нулю), то значение этого ряда в любой точке выражается конечной суммой и поэтому имеет смысл.

**Определение 1.3.** Суммой двух производящих функций

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots \quad \text{и} \quad B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots$$

называется производящая функция

$$A(s) + B(s) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) s + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) s^2 + \dots$$

Произведением производящих функций  $A$  и  $B$  называется производящая функция

$$A(s)B(s) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)s + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)s^2 + \dots$$

**Определение.1.4** Пусть  $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$  и  $B(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots$  — две производящие функции, причем  $B(0) = 0$ . Подстановкой производящей функции  $B$  в функцию  $A$  называется производящая функция

$$A(B(s)) = a_0 + a_1b_1s + (a_1b_2 + a_2b_1)s^2 + (a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3)s^3 + \dots$$

## § 1.2. Элементарные производящие функции

Поскольку неудобно каждый раз записывать производящую функцию в виде ряда, то для некоторых часто встречающихся функций введены сокращенные записи.

### Определение.2.1

$$1) (1+s)^\alpha = 1 + \alpha s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} s^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} s^3 + \dots$$

где  $\alpha$  — произвольное комплексное число.

Коэффициент при  $s^n$  в этой записи называется числом сочетаний из  $\alpha$  по  $n$  и

обозначается  $C_\alpha^n$  или .

$$2) e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots$$

$$3) \ln \frac{1}{1-s} = s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3!} + \dots$$

$$4) \sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \dots$$

$$5) \cos s = 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \dots$$

### § 1.3. Деление производящих функций

С делением производящих функций дело обстоит сложнее. Так, например, не существует формального степенного ряда  $B(s)$ , такого, что  $sB(s) = 1$ .

**Утверждение 3.1** Пусть  $A(s)$  — формальный степенной ряд, такой, что  $A(0) \neq 0$ . Тогда существует единственный формальный степенной ряд  $B(s)$ , такой, что  $A(s)B(s) = 1$ .

## Глава 2. Производящие функции нескольких переменных

П.ф. от двух переменных является двух-индексные последовательности. Эти последовательности записываются в виде треугольника.

### § 2.1. Треугольник Паскаля

Т.П. показан на рисунке 5.1. Элементы этого треугольник перечисляют пути, идущие из его вершины в соответствующую клетку. Пути имеют вид ломаных, состоящих из единичных векторов. Вектора составляются из двух видов: идущих вправо-вниз и идущих влево вниз.

Треугольник Паскаля состоит из биномиальных коэффициентов.

$$C_{n,k} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

Это доказывается индукцией по  $n$ . Предполагается, что числа в  $n$ -й строчке треугольника совпадают с коэффициентами разложения многочлена  $(1+s)^n$ . Число различных путей, ведущих в точку  $(n+1, k)$ , равно сумме числа путей, ведущих в точку  $(n, k-1)$ , и числа путей, ведущих в точку  $(n, k)$ ,  $c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + c_{n,k}$ .

Поэтому число  $c_{n+1,k}$  совпадает с коэффициентом при  $s^k$  в многочлене  $(1+s)(1+s)^n = (1+s)^{n+1}$ .

П. ф.-ю можно сопоставить треугольнику Паскаля разными способами. Например, рассмотрим следующих:

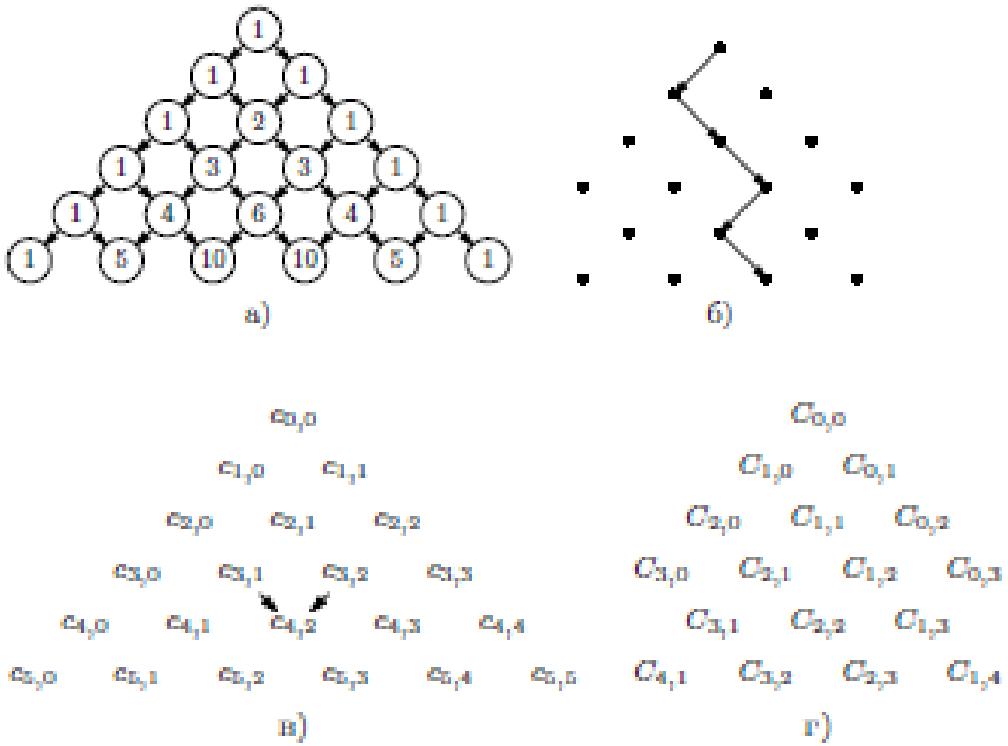


Рис 5.1. Треугольник Паскаля в путях, которые он перечисляет п. ф.-ю —

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} c_{n,k} x^k y^n = \sum_{n,k=0}^{\infty} \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}^k y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}^k \begin{smallmatrix} n \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}$$

## § 2.2. Экспоненциальные производящие функции

$$1. \text{ Поскольку } N^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{p_n^r}{r!}, \text{ то } (1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r = \sum_{r=0}^n p_n^r \frac{x^r}{r!}.$$

Следовательно, если разложить бином Ньютона  $(1+x)^n$  в ряд Телора-Маклорена в

окрестности точки  $x=0$ , то коэффициенты при  $\frac{x^r}{r!}$  в этом разложении есть числа  $r$ -перестановок без повторений из  $n$ -множества.

**Определение 2.1.** Функция вида

$$B(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \frac{x^2}{2!} + \beta_3 \frac{x^3}{3!} + \dots + \beta_r \frac{x^r}{r!} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r \frac{x^r}{r!}$$

называется *экспоненциальной производящей функцией*. Экспоненциальные производящие функции позволяют находить числа различных перестановок.

### § 2.3. Треугольник Дика

В каждой  $i$ -ой позиции слова Дика разбаланс скобок не может превысить величину  $i$ , поэтому совокупность значимых (ненулевых) узлов целочисленной решетки образует треугольную матрицу (см. рис. 3), которая более известна как треугольник Каталана. Такая конструкция часто рассматривается в связке с треугольником Паскаля (таблица биномиальных коэффициентов), у которого аналогичное уравнение динамики.

Рис. 3

Поскольку мы пришли к полученной матрице, отталкиваясь от слов Дика, через пути Дика и динамику Дика, то логично назвать эту таблицу *треугольником Каталана-Дика*, а проще *треугольником Дика*.

В дальнейшем будем различать треугольник Дика (бесконечная таблица) и опорный треугольник – ограниченный начальный фрагмент таблицы, равнобедренный треугольник с высотой, равной  $n$  – фиксированному числу пар скобок в словах Дика.

6				1									<b><i>n = 6</i></b>
5				1		6							
4				1		5		20					
3				1		4		14		48			
2				1		3		9		28		90	
1				1		2		5		14		42	
0	1			1		2		5		14		42	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

Рис. 4

На рис. 4 показан фрагмент треугольника Дика – опорный треугольник для  $n=6$ . Треугольник симметричный, внешняя восходящая диагональ (единичные метки) и внешняя нисходящая диагональ (метки 1, 6, 20 и т.д.) содержат одинаковое количество узлов. Для каждого узла  $(i,j)$  а  $(2n-1, j)$  со своим, в общем случае.

иным значением динамики. Далее зеркальную пару (или *зеркало*)  $a$  и  $b$  будем обозначать  $a \sim b$ .

#### § 2.4. Правила построения экспоненциальных производящих функций:

1. Каждому сорту предметов соответствует одна скобка.

2. Каждой скобке сумма  $\frac{x^r}{r!}$ .

3. Если предмет данного сорта может не входить в перестановку, то в скобке присутствует единица.

4. Если предмет данного сорта может входить в перестановку только один раз, то в

скобке присутствует  $x$ , если дважды –  $\frac{x^2}{2!}$ , если трижды –  $\frac{x^3}{3!}$ , и т.д.

5. Если допускаются неограниченные повторения, то сумма в скобке бесконечна.

#### § 2.5. Многочлены Бернулли

**Определения5.1.** Многочлены вида

$$B_n(x) = \sum_{s=0}^n B_s x^{n-s} \quad (n=0,1,2,\dots),$$

где  $B_s$  – *Бернулли* числа. Так, для  $n=0, 1, 2, 3$

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

#### § 2.6. Числа Эйлера в треугольнике с кратностями

**Предложение 6.1.** В основании треугольника на рис. 5.8 а) находятся числа Эйлера.

#### § 2.7. Сравнения в последовательностях.

Этот раздел посвящен свойствам последовательностей целых чисел, приведенных по различным модулям. Рассмотрим, например, последовательность чисел Эйлера

$$1, 1, 5, 61, 1385, \dots$$

Остатки от деления элементов этой последовательности на 4 образуют новую последовательность

$$1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

Можно проверить, что и последующие члены этой последовательности также будут единицами.

Та же самая последовательность, взятая по модулю 3, выглядит следующим образом:

$$1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$$

Периодичность последовательности подсказывает нам, что она задается рациональной производящей функцией. Действительно, пусть  $N$  — длина периода

последовательности  $a_i$ , т. е.  $a_k + N = a_k$  для всех достаточно больших  $k$ . Тем самым, последовательность задается линейным рекуррентным соотношением и, согласно теореме 2.1, соответствующая производящая функция рациональна.

### Глава 3. Перечисление деревьев.

Настоящая глава посвящена некоторым геометрическим аспектам комбинаторики, в том числе наиболее активно развивающимся в последние годы. Эти задачи связаны с графами и их вложениями в различные поверхности. На протяжении всей главы широко используется обозначение  $[s^k]f(s)$  для коэффициента  $f_k$  в производящей функции

$$f(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \dots$$

#### § 3.1. Перечисление помеченных деревьев

**Определение 1.1.** Графом будем называть тройку  $\Gamma = \{V, E, I\}$ , состоящую из конечного множества вершин  $V$ , конечного множества ребер  $E$  и отображения инцидентности  $I : E \rightarrow V \times V$ , сопоставляющего каждому ребру пару вершин (концы ребра), которые это ребро соединяет. Ребро называется петлей, если его концы совпадают. Валентностью вершины графа называется число ребер, для которых данная вершина является концом (при подсчете валентности петля считается за два ребра).

**Определение 1.3.** Две вершины графа называются соседними, если существует ребро, которое их соединяет. Граф называется связным, если для любой пары  $u, v \in V$  его вершин существует последовательность  $v_0 = u, v_1, \dots, v_k = v$  вершин графа, в которой вершины  $v_{i-1}$  и  $v_i$  соседние для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ . Циклом называется последовательность  $v_0, v_1, \dots, v_k = v$  вершин графа, в которой

вершины  $v_{i-1}$  и  $v_i$  соседние для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ , все вершины  $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$  попарно различны и  $v_0 = v_k$ . Деревом называется связный граф без циклов.

**Теорема 1.5.** Пусть функции  $h=h(s)$  ( $h(0)=0$ ) и  $g=g(t)$  связаны между собой уравнением Лагранжа

$$\varphi(s) = s\psi(\varphi(s))$$

Тогда коэффициент при  $s^n$  в функции  $h$  равен

$$[s^n]\varphi(s) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t)$$

Применим это уточнение к уравнению (8.1) на функцию  $T(s)$ . Получим

$$T_n = n![s^n]T(s) = n!\frac{1}{n}[t^{n-1}]e^{nt} = (n-1)!\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-1}$$

Таким образом, мы доказали следующий результат.

**Теорема 1.6 (Кэли).** Число помеченных корневых деревьев с  $n$  вершинами равно  $T_n = n^{n-1}$ .

**Следствие 1.7.** Число помеченных деревьев с  $n$  вершинами равно  $n^{n-2}$ .

### § 3.2. Тождества Абеля

В этом разделе мы приведем еще одно доказательство теоремы Кэли о перечислении помеченных деревьев. С этим доказательством да и вообще с перечислением помеченных деревьев, — тесно связано тождество Абеля

$$\begin{matrix} \text{?} & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ i+j=n, i, j > 0 & \end{matrix} \begin{matrix} \text{?} & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ & \text{?} & \text{?} & \text{?} \end{matrix}^{j-1} = 2(n-1)n^{n-2} \quad (8.3)$$

которое порождает целую серию различных тождеств:

$$\begin{matrix} \text{?} & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ i+j=n, i, j > 0 & \end{matrix} \begin{matrix} \text{?} & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ & \text{?} & \text{?} & \text{?} \end{matrix}^{j-2} = \frac{1}{2}(n-1)(n+6)n^{n-3} \quad (8.4)$$

$$\begin{matrix} \text{?} & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ i+j=n, i, j > 0 & \end{matrix} \begin{matrix} \text{?} & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ & \text{?} & \text{?} & \text{?} \\ & \text{?} & \text{?} & \text{?} \end{matrix}^{j-3} = (n-1)(n+6)n^{n-4} \quad (8.5)$$

### § 3.3. Производящие функции для непомеченных, помеченных, упорядоченных и циклически упорядоченных объектов.

Мы видели выше, что некоторые последовательности лучше описываются обыкновенными производящими функциями, а некоторые—экспоненциальными. Впрочем, бывают и исключения. Так, экспоненциальная производящая функция для числа пилообразных перестановок имеет вид тангенса или секанса (в зависимости от четности числа элементов в перестановке, раздел 5.4), а соответствующие обыкновенные производящие функции имеют замечательное представление в виде непрерывных дробей (раздел 5.6).

Однако общее правило гласит, что экспоненциальные производящие функции хорошо описывают помеченные объекты, тогда как непомеченным лучше сопоставлять обыкновенные производящие функции. Объяснение этому состоит в следующем наблюдении. Пусть у нас имеется какой-то класс объектов, и мы рассматриваем конечные упорядоченные последовательности объектов этого класса, а также циклически упорядоченные последовательности таких объектов.

### § 3.4. Перечисление плоских и бинарных деревьев

Очевидно, что всякое дерево можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не имели точек пересечения и самопересечения, отличных от вершин. (При этом ребра можно изображать даже в виде отрезков прямой, что нам, впрочем, не понадобится в дальнейшем.)

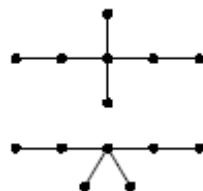


Рис. 8.5. Различные вложения одного дерева в плоскость

Однако одно и то же дерево можно изображать на плоскости по-разному (см.рис. 8.5). Формализация понятия различных вложений в плоскость дается следующим определением.

**Определение 4.1.** Два вложения дерева в плоскость называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм плоскости, сохраняющий ее ориентацию и переводящий образ первого дерева в образ второго. Класс эквивалентности вложений деревьев называется плоским деревом.

## Глава 4. Перечисление вложенных графов.

### § 4.1. Вложение графа в поверхность.

Плоские деревья являются собой пример вложения графа в плоскость. Одно и то же дерево может допускать различные вложения. В то же время, не каждый граф, как мы увидим ниже, допускает вложение в плоскость. Мы коснемся и вопроса о вложении графа в произвольную двумерную поверхность.

Не вдаваясь в строгое определение двумерной поверхности, мы воспользуемся классификационной теоремой для таких поверхностей, доказываемой в стандартных начальных курсах топологии.

**Теорема 1.1.** Всякая (замкнутая ориентируемая двумерная) поверхность гомеоморфна сфере, к которой приклеено конечное число ручек.

Описание, даваемое этой теоремой, мы и будем считать определением поверхности.

**Определение 1.2.** Поверхностью рода  $g$  называется двумерная сфера с приклеенными к ней  $g$  ручками.

## § 4.2. О числе склеек многоугольника

Замкнутые ориентируемые поверхности можно изготавливать из многоугольников, склеивая их стороны попарно. Например, склеивание противоположных сторон квадрата дает тор (см. рис. 9.12).

Рассмотрим правильный  $2n$ -угольник и разобьем его стороны на пары всеми возможными способами. Для каждого такого разбиения на пары склеим стороны, принадлежащие одной паре (с сохранением ориентируемости поверхности). Получится замкнутая ориентированная поверхность. Нас будет интересовать, при скольких способах склейки полученная поверхность будет иметь род 0, род 1, . . . , род  $g$ .

## § 4.3. Доказательство теоремы Харера—Загира

Обратим внимание, во-первых, на последовательность коэффициентов при старших степенях многочленов  $T_n^N$ . Эта последовательность начинается так: 1, 1, 2, 5, 14, . . . , и у нас есть основания предположить, что она совпадает с последовательностью чисел Каталана.

**Лемма 3.1.** Степень многочлена  $T_n^N$  равна  $n + 1$ . Коэффициент при  $N^{n+1}$  в многочлене  $T_n^N$  равен  $c_n$   $n$ -му числу Каталана.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нашей работе рассмотрены задачи перечисления различных объектов с помощью производящих последовательностей. Техника производящих последовательности и вопросы связанные с изучением количества различных объектов в математике изучается достаточно давно. Но в последнее время они нашли важные применения в алгебраической геометрии и ее приложениях. Эти важные и интересные вопросы подробно рассмотрены в нашей работе