Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Произведение конформных радиусов двух неналегающих областей

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 227 группы

направления (специальности) 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Механико-математический факультет

Жердева Андрея Владимировича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Д. В. Прохоров

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор Д. В. Прохоров

Саратов 2017

Введение

Пусть Ω - односвязная область в плоскости w, имеющая более одной граничной точки, $w_0 \in \Omega$. Если $w_0 \neq \infty$, то по теореме Римана существует единственная функция $z = g(w)$, регулярная в Ω, нормированная условиями $g(w_0) = 0$, $g'(w_0) = 1$ и однолистно отображающая Ω на круг $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Радиус указанного круга $r = r(\Omega, w_0)$ называется *конформным радиусом* области Ω в точке w_0. Пусть теперь $\infty \in \Omega$, тогда существует единственная функция $z = g(w)$, регулярная в Ω за исключением точки ∞, в окрестности которой она имеет разложение вида $g(w) = w + c_0 + c_1 w^{-1} + ...$, и однолистно отображающая Ω на область $\{|z| > \frac{1}{r}\}$. В этом случае велечина $r = r(\Omega, \infty)$ называется *конформным радиусом* области Ω в точке ∞. Если $w = f(z)$, $f(0) = w_0 \neq \infty$, $f'(0) > 0$ конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на область Ω, то, как нетрудно видеть, конформный радиус $r(\Omega, w_0) = f'(0)$. Если же $\infty \in \Omega$, $w = f(z)$ однолистно отображает область $\mathbb{D}^* = \{|z| > 1\}$ на Ω и имеет разложение в окрестности бесконечности $f(z) = b_1 z + b_0 + b_{-1} z^{-1} + ...$, то конформный радиус $r(\Omega, \infty) = \frac{1}{b_1}$.

Пусть B_l, $l = 1, ..., n$ - произвольные односвязные области в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Будем называть эти области *неналегающими*, если они попарно не имеют общих точек $B_l \cap B_k = \emptyset$, $l \neq k$. Впервые задачей о произведении конформных радиусов неналегающих областей занимался М. А. Лаврентьев [1]. Ряд результатов в задаче о произведении степеней конформных радиусов неналегающих областей получили П. П. Куфарев [2], Г. М. Голузин [4], Л. И. Колбина [5], Н. А. Лебедев [6], Нехари [7], Ю. Е. Аленицын [8] и другие авторы. Большое число результатов в задачах о взаимно неналегающих областях получено методом площадей. Многие задачи такого рода либо не поддаются решению другими методами, либо решения их с помощью метода площадей значительно проще, чем решение другими методами. Отметим следующий результат [9, с. 223]. Пусть B_0, B_1 - неналегающие односвязные области в расширенной комплексной плоскости, $\infty \in B_0$, $0 \in B_1$. Тогда [9, с. 223]

$$r(B_0, \infty) r(B_1, 0) \leq 1, \tag{1}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда границами обеих областей B_0, B_1 служит окружность с центром в начале координат, то есть B_1 - круг с центром в начале координат, а B_0 - внешняя по отношению к этому кругу область.

Другим подходом к рассмотрению задачи о соотношении конформных радиусов двух неналегающих областей может служить параметрический метод Левнера-Куфарева. Уравнение Левнера возникло в работе 1923 г. [10] в связи с попыткой решения проблемы коэффициентов. Уравнение Левнера описывает динамику возрастающего однопараметрического семейства областей, представляющих собой области с разрезом, длина которого уменьшается с ростом параметра t. В работах П. П. Куфарева [11] и Поммеренке [12] идея Левнера была обобщена на более широкий класс областей.

Пусть $\Omega(t)$, $0 \leq t < T$ - возрастающее однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, функция $f(z,t) = e^t z + \ldots$ - при каждом t конформно отображает единичный круг на $\Omega(t)$. Тогда [11, 13] $f(z,t)$ удовлетворяет почти всюду уравнению Левнера-Куфарева

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}p(z,t),\ 0 \leq t < T,\ z \in \mathbb{D}, \tag{2}$$

где $p(z,t)$ - функция из класса Каратеодори при каждом фиксированном t, $0 \leq t < T$, что означает, что $p(z,t)$ регулярна в $\mathbb{D}$ (при каждом фиксированном t, $0 \leq t < T$), $p(0,t) = 1$, $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$, $z \in \mathbb{D}$, $0 \leq t < T$.

Если же теперь $\Omega(t)$, $0 \leq t < T$ - убывающее однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, а функция $f(z,t) = e^{-t}z + \ldots$ - при каждом t конформно отображает единичный круг на $\Omega(t)$, то $f(z,t)$, то $f(z,t)$ удовлетворяет почти всюду уравнению

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}p(z,t),\ 0 \leq t < T,\ z \in \mathbb{D}, \tag{3}$$

где $p(z,t)$ - функция из класса Каратеодори при каждом фиксированном t, $0 \leq t < T$.

В работе [14] показано, что если в (3) управляющая функция $p(\cdot,t) \in C^2(\overline{\mathbb{D}})$, $0 \leq t < T$, $p(z,\cdot)$ непрерывна на $[0,T)$ для любого $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $p(z,t)$, $p'(z,t)$

и $p''(z,t)$ ограничены на $\overline{\mathbb{D}} \times [0,T)$, то для конформного радиуса $r(\Omega^*(0),\infty)$ семейства областей $\Omega^*(t) = \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{\Omega(t)}$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\ln(r(\Omega^*(0),\infty)) = t + o(t),\ t \to +0. \tag{4}$$

Заметим, что конформный радиус области $\Omega(t)$, $r(\Omega(t),0) = e^{-t}$, таким образом, (4) связывает конформные радиусы семейств областей $\Omega(t)$ и $\Omega^*(t)$.

Пусть $\Omega(t)$, $0 \le t < T$ - монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, ограниченных замкнутыми жордановыми кривыми $\Gamma(t)$, которые заданы в полярных координатах (r,ψ) уравнением $r = \gamma(\psi,t)$. Пусть $\Omega^*(t)$ - неограниченная компонента $\overline{\mathbb{C}} \backslash \Gamma(t)$ и $G(t)$ - монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей границы которых заданы в полярных координатах уравнением $r = \gamma^*(\psi,t) = (\gamma(\psi,t))^{-1}$. Можно показать, что конформный радиус $r(\Omega^*(t),\infty) = r(G(t),0)$. Таким образом, вместо семейства областей $\Omega^*(t)$ можно рассматривать семейство $G(t)$.

В работе рассматриваются монотонные однопараметрические семейства областей $\Omega(t)$ и $G(t)$, заданные как описано выше. Основным результатом работы является асимптотическое соотношение, связывающее конформные радиусы $r(\Omega^*(t),\infty)$ и $r(\Omega(t),0)$ семейств областей $\Omega^*(t)$ и $\Omega(t)$ (теорема 2.4 и следствие из нее)

$$\log r(\Omega^*(t),\infty) = ct + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{\delta}(\varphi,0))^2 - \ddot{\delta}(\varphi,0)\, d\varphi \right) t^2 + o(t^2),\ t \to +0, \tag{5}$$

где $c = 1$, если $\Omega(t)$ - убывающее семейство областей, $c = -1$, если $\Omega(t)$ - возрастающее семейство областей. Соотношение (12), таким образом, продолжает асимптотику (4).

В §1 изложены некоторые результаты, связанные с применением принципа площадей к задачам о неналегающих областях и, в частности, приведенное выше утверждение о произведении конформных радиусов неналегающих областей является следствием теоремы 1.2. Основные результаты работы изложены в §2.

Основное содержание работы

Пусть $\Omega(t)$, $0 \le t < T$ - монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, функция $f(z,t) = a(t)z + ...$ - при каждом t конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на $\Omega(t)$, где $a(t)$ - положительная непрерывная функция. Тогда [11, 13] $f(z,t)$ удовлетворяет почти всюду уравнению

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} q(z,t),\ 0 \le t < T,\ z \in \mathbb{D}, \tag{6}$$

где $q(z,t)$ регулярна в $\mathbb{D}$ при каждом фиксированном t, $0 \le t < T$. Теорема 2.2 дает при некоторых дополнительных условиях интегральное представление функции $q(z,t)$.

Теорема 2.2. Пусть $\Omega(t)$, $0 \le t < T$ - монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $0 \le t < T, \Omega(0) = \mathbb{D}$, ограниченных кривыми $\Gamma(t)$, заданными в полярных координатах (r, ψ) уравнением $r = \gamma(\psi,t) = 1 + \delta(\psi,t)$, $0 \le \psi \le 2\pi$, $0 \le t < T$, где $\delta \in C^{3+\alpha}([0, 2\pi] \times [0, T))$, $0 < \alpha < 1$. Функция $f(z,t) = a(t)z + ...$, $a(t) > 0$ - конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на $\Omega(t)$. Тогда $\dot{f}(z,t)$ существует для всех $0 \le t < T$, $z \in \mathbb{D}$ и $f(z,t)$ удовлетворяет уравнению (6), причем

$$q(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\varphi},t)|}\dot{\delta}(\psi(\varphi,t),t)\cos(\beta(\psi(\varphi,t),t))\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi,$$

$$z \in \mathbb{D}, 0 \le t < T, \tag{7}$$

где $\psi(\varphi,t) = \arg f(e^{i\varphi},t)$, $\beta(\psi,t) = -\arctan(\frac{\gamma'(\psi,t)}{\gamma(\psi,t)})$ - угол между нормалью к $\Gamma(t)$ в точке $\gamma(\psi,t)$ и радиальным вектором, проходящим через эту точку.

Заметим, что функция $q(z,t)$ не принадлежит, вообще говоря, классу Каратеодори (в случае когда $\Omega(t)$ - возрастающее семейство областей $q(z,t)$ будет принадлежать классу Каратеодори если $a(t) = e^t$, в случае когда $\Omega(t)$ - убывающее семейство областей $-q(z,t)$ будет принадлежать классу Каратеодори если $a(t) = e^{-t}$).

Следующая теорема дает дифференциальное уравнение для конформного радиуса монотонного семейства односвязных областей.

Теорема 2.3. Пусть $f(z,t) = a_1(t)z + ...$, $z \in \mathbb{D}$, $0 \le t < T$, $a_1(t) > 0$. Пусть $f(z,t)$ дифференцируема по t на $\mathbb{D} \times [0,T)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}q(z,t),\ z \in \mathbb{D},\ 0 \le t < T, \tag{6}$$

где $q(z,t)$, $\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}$ - непрерывны на $\mathbb{D} \times [0,T)$. Тогда $a_1(t)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\log a_1(t) = q(0,t),\ 0 \le t < T. \tag{8}$$

Теорема 2.4. Пусть $\Omega(t)$, $0 \le t < T$ - монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $0 \le t < T$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, ограниченных кривыми $\Gamma(t)$, заданными в полярных координатах (r,ψ) уравнением $r = \gamma(\psi,t) = 1 + \delta(\psi,t)$, $0 \le \psi \le 2\pi$, $0 \le t < T$, где $\delta \in C^{3+\alpha}([0,2\pi] \times [0,T))$, $0 < \alpha < 1$. При этом, пусть конформный радиус $r(\Omega(t),0) = e^t$, если $\Omega(t)$ - возрастающее семейство областей и $r(\Omega(t),0) = e^{-t}$, если $\Omega(t)$ - убывающее семейство областей. Пусть $G(t)$ - семейство областей, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах уравнением $r = \gamma^*(\psi,t) = (\gamma(\psi,t))^{-1}$. Тогда справедлива формула

$$\log r(G(t),0) = ct + \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\dot{\delta}(\varphi,0))^2 - \ddot{\delta}(\varphi,0)\,d\varphi\right)t^2 + o(t^2),\ t \to +0, \tag{9}$$

где $r(G(t),0)$ - конформный радиус области $G(t)$, $c = 1$, если $\Omega(t)$ - убывающее семейство, $c = -1$, если $\Omega(t)$ - возрастающее семейство.

Доказательства теоремы 2.4 основано на использовании уравнение (8) для конформного радиуса семейства областей $r(G(t),0)$ и следующих равенствах, полученных с помощью формулы (7)

$$q(z,0) = -Q(z,0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \dot{\delta}(\varphi,0)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi,\ z\in\mathbb{D}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial Q(z,0)}{\partial t} - \frac{\partial q(z,0)}{\partial t} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\dot{\delta}(\varphi,0))^2 - \ddot{\delta}(\varphi,0)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi,\ z\in\mathbb{D}, \tag{11}$$

где $q(z,t)$, $Q(z,t)$ - управляющие функции для семейств $\Omega(t)$ и $G(t)$ соответственно.

Пусть Γ - замкнутая жордановая кривая, заданная в полярных координатах (r,ψ) уравнением $r=\gamma(\psi)$, $0\le\psi\le 2\pi$, Ω^* - неограниченная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}}\backslash\Gamma$. Тогда $r(\Omega^*,\infty) = r(G,0)$, где G - область ограниченная замкнутой жордановой кривой Γ_1, заданной в полярных координатах уравнением $r=\frac{1}{\gamma(\psi)}$. Действительно, пусть $w=F(z)$ однолистно отображает область $\mathbb{D}^*=\{|z|>1\}$ на Ω^* и имеет разложение в окрестности бесконечности $F(z)=b_1z+b_0+b_{-1}z^{-1}+...$, $b_1>0$. Конформный радиус $r(\Omega^*,\infty)=\frac{1}{b_1}$. Функция $h(z)=\frac{1}{F(\frac{1}{z})}$ регулярна в единичном круге $\mathbb{D}$, конформно отображает $\mathbb{D}$ на область $G'=\{z\,|\,\overline{z}\in G\}$ и имеет разложение в окрестности нуля $h(z)=\frac{1}{b_1}z+....$ Функция $s(z)=\overline{h(\overline{z})}$ регулярна в единичном круге $\mathbb{D}$, конформно отображает $\mathbb{D}$ на область G и имеет разложение в окрестности нуля $s(z)=\frac{1}{b_1}z+...$, то есть $r(G,0)=\frac{1}{b_1}$.

Таким образом, справедливо следущее следствие теоремы 2.4.

Следствие. Пусть $\Omega(t)$, $0\le t<T$ - монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0\in\Omega(t)$, $0\le t<T$, $\Omega(0)=\mathbb{D}$, ограниченных кривыми $\Gamma(t)$, заданными в полярных координатах (r,ψ) уравнением $r=\gamma(\psi,t)=1+\delta(\psi,t)$, $0\le\psi\le 2\pi$, $0\le t<T$, где $\delta\in C^{3+\alpha}([0,2\pi]\times[0,T))$, $0<\alpha<1$. При этом, пусть конформный радиус $r(\Omega(t),0)=e^t$, если $\Omega(t)$ - возрастающее семейство областей и $r(\Omega(t),0)=e^{-t}$, если $\Omega(t)$ - убывающее семейство областей. Пусть $\Omega^*(t)$ - неограниченная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}}\backslash\Gamma(t)$. Тогда для конформного радиуса $r(\Omega^*(t),\infty)$ области $\Omega^*(t)$

справедлива формула

$$\log r(\Omega^*(t), \infty) = ct + \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\dot{\delta}(\varphi, 0))^2 - \ddot{\delta}(\varphi, 0)\, d\varphi \right) t^2 + o(t^2),\ t \to +0, \quad (12)$$

где $c = 1$, если $\Omega(t)$ - убывающее семейство, $c = -1$, если $\Omega(t)$ - возрастающее семейство.

Заключение

В работе рассмотрено монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей $\Omega(t)$, ограниченных замкнутыми жордановыми кривыми $\Gamma(t)$, которые заданы в полярных координатах (r, ψ) уравнением $r = \gamma(\psi, t)$. Получено интегральное представление (7) для управлящей функции $q(z, t)$ в уравнении (6). Наряду с семейством областей $\Omega(t)$ рассмотрено связанное с ним семейство областей $G(t)$, ограниченных кривыми, заданными уравнением $r = \gamma^*(\psi, t) = (\gamma(\psi, t))^{-1}$. С помощью представления (7) установлены формулы (10), (11) связывающие значения управляющих функции и их производных при $t = 0$ для семейств $\Omega(t)$ и $G(t)$. На основании этих формул и дифференциального уравнения (8) для конформного радиуса монотонного семейства областей, получено асимптотическое соотношение (9), связывающее конформные радиусы $r(\Omega(t), 0)$ и $r(G(t), 0)$. Следствием этого соотношения и основным результатом работы является соотношение (12), связывающее конформные радиусы $r(\Omega(t), 0)$ и $r(\Omega^*(t), \infty)$ семейств областей $\Omega(t)$ и $\Omega^*(t) = \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{\Omega(t)}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лаврентьев, М. А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1934. — Т. 5. — С. 159–245.

2. Куфарев, П. П. К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей // ДАН СССР. — 1950. — Т. 73. — С. 881–884.

3. Куфарев, П. П., Фаллес, А. Э. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // ДАН СССР. — 1951. — Т. 81. — С. 995–998.

4. Голузин, Г. М. Метод вариаций в конформном отображении // Матем. сб. — 1951. — Т. 29(71), № 2. — С. 455–468.

5. Колбина, Л. И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении // ДАН СССР. — 1952. — Т. 84, № 5. — С. 865–868.

6. Лебедев, Н. А. Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1961. — Т. 60. — С. 211–231.

7. Nehari, Z. Some inequalities in the theory of functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 75, no. 2. — P. 256–286.

8. Е., Аленицын Ю. Об однолистных функциях в многосвязных областях // Матем. сб. — 1956. — Т. 39(81), № 3. — С. 315–336.

9. Лебедев, Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. — Москва, 1975. — 336 с.

10. Löwner, K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I // Math. Ann. — 1923. — Bd. 89. — S. 103–121.

11. Куфарев, П. П. Об однопараметрических семействах аналитических функций // Матем. сб. — 1943. — Т. 13(55), № 1. — С. 87–118.

12. Pommerenke, Ch. Über die Subordination analytischer Funktionen // J. Reine Angew. Math. — 1965. — Bd. 218. — S. 159–173.

13. Pommerenke, Ch. Univalent functions. — Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

14. Prokhorov, D. V. Asymptotic conformal welding via Löwner-Kufarev evolution // Comput. Methods Funct. Theory. — 2013. — Vol. 13, no. 1. — P. 37–46.

15. Лебедев, Н. А. Дополнение к статье "Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях-// Вестн. Ленингр. ун-та. — 1967. — Т. 7. — С. 64–73.

16. Громова, Л. Л. Некоторые приложения принципа площадей // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1968. — Т. 7. — С. 31–40.

17. Громова, Л. Л. Приложение принципа площадей к экстремальным задачам конформного отображения неналегающих областей // Автореф., диссерт., Ленингр. ун-т, Ленинград. — 1968.

18. Громова, Л. Л., Лебедев, Н. А. О неналегающих областях, лежащих в круге // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1969. — Т. 19. — С. 7–12.

19. Лебедев, Н. А., Мамай, Л. В. Обобщение одного неравенства П. Гарабедяна и М. Шиффера // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1970. — Т. 19. — С. 41–45.

20. Александров, И. А. Введение в геометрическую теорию функций. — Донецкий ун-т, Ин-т прикл. матем. и мех. АН УССР, 1972. — 335 с.