Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

СОХРАНЕНИЕ СВОЙСТВ ОБЛАСТЕЙ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ ХЕЛЕ-ШОУ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы
направления(специальности) 02.04.01 МИКН
Механико-математического факультета
Симоновой Полины Сергеевны

Научный руководитель
Доцент, кан. ф.-м. наук ______________________ Е. В. Разумовская
подпись, дата

Зав. Кафедрой
Профессор, док. ф.-м. наук ______________________ Д. В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2017

Введение

В 1989 году Хеле-Шоу впервые описал свою «ячейку» — экспериментальную установку для изучения картины течения путем закачки вязкой жидкости в узкий зазор между двумя стеклянными пластинами. Используя визуализацию краской, он смог наблюдать картину течения, когда оно возмущенно различными препятствиями, помещенными в зазоре между пластинками.

В 1930-е и 1940-е П.Я.Кочина поняла, что многие задачи теории течений грунтовых вод, в особенности, связанные с фильтрацией через плотины, приводят к моделям, в которых насыщенная область должна быть отделена от области сухого грунта со свободной границей Г, которая подлежит определению в ходе решения задачи. Она, так же как Маскет и Л.А.Галин, показала что на такой границе раздела давление должно быть приблизительно постоянным и равным давлению в сухом грунте и что согласно закону сохранения массы, скорость жидкости в направлении нормали к Г должна быть пропорциональна v_n, нормальной скорости границы Г. Поэтому, не теряя общности, приняв ось y направленной вертикально вверх, имеем

$$V = -\nabla(p + \rho g y), \quad \Delta p = 0 \quad \text{в жидкости} \tag{1}$$

$$p = 0, \quad -\frac{\partial(p + \rho g y)}{\partial n} = v_n \ \text{на}\Gamma, \tag{2}$$

где V - поле скоростей в плоскости ячейки.

Таким образом, наряду со своей традиционной ролью аналогового вычислительного устройства для линейных задач теории потенциала, ячейка Хеле-Шоу с полостью(т.е. не заполненная целиком) позволяет легко визуализировать решения задачи (1),(2). И действительно, П.Я.Кочина быстро смогла получить хорошее согласие между некоторыми из ее изящных точных решений задачи (1), (2) и своими наблюдениями течений в экспериментальной ячейке.

Список научных проблем, математические модели которых могут быть сведены к задаче (1), (2), растет с каждым годом. Для того, чтобы дать общее представление о широте вопросов, которые эта модель охватывает приведем некоторые из них.

В зависимости от параметров эволюционного уравнения задача Хеле-Шоу имеет различные физические интерпретации. Самые распространенные из них: забор нефти из пористых сред, закачивание вязкой жидкости в плоскопараллельный слой, заполненный другой вязкой жидкостью, отыскание оптимального расположения источника закачки в данной полимерообразующей форме и другие задачи гидродинамики.

Общее поведение решений в динамических моделях математической физики со свободными границами нетривиально, прежде всего, из-за непостоянного поведения границы. Свойства рассматриваемых границ, свободных в каждый момент времени, всегда вызывают интерес. Одна из таких моделей— поток вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу с фиксированным источником.

В данной выпускной квалификационной работе рассматриваются геометрические свойства изменяющейся границы для двух основных случаев для классической задачи Хеле-Шоу: внутренней задачи для для потоков в ограниченной односвязной области, и внешней задачи динамики на поверхности, то есть для потока жидкости вне ограниченной односвязной области.

В первой главе «Математическая модель задачи Хеле-Шоу» приведены основные определения и постановка задачи Хеле-Шоу для внешней и внутренней задачи. Во второй главе «Эволюция Хеле-Шоу для звездообразных областей» доказывается инвариантность геометрических свойств класса δ-звездообразных функций и класса функций обладающих свойством угловой звездообразности при эволюции Хеле-Шоу. Далее приводится общая теорема о сохранении звездообразности в случае внутренней задачи при закачивании жидкости. В третьей главе «Эволюция Хеле-Шоу для выпуклых областей» приводится теорема о инвариантности выпуклости для внешней задачи с поверхностным натяжением. В следующей главе «Эволюция Хеле-Шоу для областей близких к выпуклым» приводится пример задачи сжатия, в которой близкие к выпуклым области перестают быть таковыми при эволюции Хеле-Шоу. В последней главе «Эволюция Хеле-Шоу для областей Базилевича» приведены результаты полученные для класса однолистных α-звездообразных по Мокану функций и приведены обобщающие результаты для геометрических свойств границ областей Базилевича.

Основное содержание работы

Будем рассматривать поток вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу, и будем предполагать, что начальная фазовая область является образом единичного круга при действии конформного отображения. Предположим, что в начальный момент времени фазовая область Ω_0, заполненная жидкостью, является односвязной замкнутой областью с гладкой аналитической границей Γ_0. Эволюционное семейство областей $\Omega(t), \Omega(0) = \Omega_0$ описывается вспомогательным конформным отображением $f(\zeta, t), f(\zeta, 0) = f_0(\zeta)$ единичного круга $U = \{\zeta, |\zeta| < 1\}$ на область $\Omega(t), \Gamma(t) = \partial\Omega(t)$, нормированным условиями $f(0, t) = 0, f'(0, t) > 0$. Это отображение удовлетворяет уравнению

$$Re\left(\overline{f'_t(\zeta, t)} \cdot f'_\zeta(\zeta, t)\zeta\right) = 1, \zeta = e^{i\theta},$$

с подходящей нормировкой.

Известно что данная проблема может быть сведена к изучению ассоциативного однопараметрического семейства однолистных голоморфных в единичном круге функций, которые удовлетворяют некоторому интегрально-дифференциальному уравнению. При этом различают внутреннюю и внешнюю задачи в зависимости от того, находится источник (сток) жидкости в конечной или бесконечно удаленной точке.

Определение: Пусть $\Omega(t)$, $t \in [0, b) \subset \mathbb{R}$ семейство областей.
$\Pi \equiv \{z_1, ..., z_n\}$ конечное множество источников и стоков с предписанными мощностями. Тогда C^2-дифференцируемая в $(\overline{\Omega(t)} \backslash \Pi) \times [0, b)$ функция $\Phi(z, t)$ называется классическим решением уравнения Хеле-Шоу , если

1. $\nabla\Phi \equiv 0,$ $\quad z \in \Omega(t),\ t \in [0, b)$
2. $\Phi(z, t) = 0,$ $\quad z \in \partial\Omega(t),\ t \in [0, b)$
3. $\Phi(z, t) = \phi(z, t) - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln|z - z_j|,$ $\quad z \in \Omega(t)$
4. $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = |\nabla\Phi(z, t)|^2,$ $\quad z \in \partial\Omega(t),\ t \in [0, b)$

для некоторой гармонической функции $\phi(t)$ непрерывной в $\Omega(t)$.

Определение: Обозначим S_δ класс однолисных δ-спиралеобразных функций, такой что

$$S_\delta = \left\{ w(z) : \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\delta} z\, w'(z)}{w(z)} \right) > 0, z \in \overline{U} \right\},$$

где $\delta \in \left(-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$.

Теорема: *Пусть $w(z,t)$ — решение внутренней задачи Хеле-Шоу. Пусть $\delta \in \left(-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ и $f(z) \in S_\delta$, тогда $w(z,t) \in S_\delta$, для всех $t > 0$, при которых решение $w(z,t)$ существует;*

Определение: Обозначим S^*_β класс однолисных функций обладающих свойством угловой звездообразности, такой что

$$S^*_\beta = \left\{ w(z) : \left| \arg \frac{z\, w'(z)}{w(z)} \right| < \frac{\beta\pi}{2}, z \in \overline{U} \right\},$$

где $\beta \in (0, 1]$.

Теорема: *Пусть $w(z,t)$ — решение внутренней задачи Хеле-Шоу. Пусть $\beta \in (0,1]$ и $f(z) \in S^*_\beta$, тогда $w(z,t) \in S^*_\beta$, для всех $t > 0$, при которых решение $w(z,t)$ существует.*

Решение $f(\zeta, t)$, описывающее динамику потока Хеле-Шоу с источником в начале координат, сохраняет геометрические свойства звездообразности относительно начала координат. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема: *Если функция $f_0(\zeta)$ звездообразна, то решения $f(\zeta,t)$ задачи о потоке Хеле-Шоу с источником $(Q > 0)$ в центре звездообразности с начальным условием $f(\zeta,t) = f_0(\zeta)$ звездообразны для всех $t > 0$, при которых решение существует.*

Выпуклость — еще одно важное геометрическое свойство либо потока Хеле-Шоу, либо его дополнения. Известно, что в случае внутренней задачи и для закачки и для стока решения задачи Хеле-Шоу не сохраняют свойство выпуклости при начальном отображении. Рассматривая внешнюю задачу, получим следующие результаты.

Теорема: *Если функция $f_0(\zeta^*)$ отображает $U^- = \{\zeta^*, |\zeta^*| > 1\}$ на начальную область с выпуклым дополнением, то решения $f(\zeta^*, t)$ задачи о потоке Хеле-Шоу с источником $(Q > 0)$ в бесконечности с начальным усло-*

вием $f(\zeta^*, 0) = f(\zeta^*)$ сохраняет это свойство для всех $t \geqslant 0$, при которых решение существует.

Будем рассматривать внутреннюю задачу и докажем, что решения этой задачи не сохраняют свойство линейной достижимости начальной области.

Определение: Линейно-достижимая область означает, что дополнение к $f(U)$ может быть покрыто семейством непересекающихся лучей, имеющих с границей $\partial f(U)$ либо общую точку, либо целый луч. Линейная достижимость эквивалентна следующему аналитическому утверждению: для любых θ_1 и θ_2, таких что $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, выполняется следующее неравенство

$$\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \left[1 + Re \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'r(e^{i\theta})} \right] d\theta \geqslant -\pi \;\; 0 < r \leqslant 1.$$

Решения $f(\zeta^*, t)$ описывающие динамику областей Хеле-Шоу с источником в бесконечности, также не сохраняют свойства линейной достижимости.

Пусть S — класс функций $w(z) = z + a_2 z^2 + ...$, регулярных и однолисных в области $U = \{|z| < 1\}$; S^* — подкласс звездообразных относительно начала координат функций из S; P_α — класс регулярных в U функций
$p(z) = 1 + b_1 z + ...$, таких что $\mathrm{Re}(e^{i\alpha} p(z)) > 0$ и $P_0 = P$;

$$P_{(\pi)} = \left\{ f(z) : f(z) \in P_\alpha,\, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right\}.$$

И.Е. Базилевич ввел класс функций $w(z) \in S$, задаваемых формулой

$$w(z) = \left[\frac{m}{1+a^2} \int\limits_0^z (p(s) - ai)\, s^{-\frac{mai}{1+a^2} - 1} f^{*\left(\frac{m}{1+a^2}\right)}(s)\, ds \right]^{\frac{1+ai}{m}},$$

где $f^* \in S^*$, $p(z) \in P$, a — действительно число, $m > 0$.

Положим $a = 0$ и обозначим полученный класс через B_m. Введем класс B'_m функций следующего вида

$$w(z) = \left[m \int\limits_0^z p(s) \frac{f^{*m}(s)}{s}\, ds \right]^{\frac{1}{m}},$$

где $f^* \in S^*$, $p(z) \in P_{(\pi)}$, $m > 0$. B_m является подклассом класса B'_m, функции $w(z) \in B'_m$ регулярны в U.

Теорема: *Для того, чтобы регулярная в U функция $w(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ принадлежала классу B'_m необходимо и достаточно, чтобы в U выполнялись следующие условия:* $w'(z) \neq 0$, $\frac{w(z)}{z} \neq 0$ *и*

$$\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} Re\left[1 + \frac{re^{i\theta}w''(re^{i\theta})}{w'(re^{i\theta})} + (m-1)\frac{re^{i\theta}w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right] d\theta \geqslant -\pi,$$

где $\theta_1 < \theta_2$, $0 < r < 1$.

В главах 2-4 данной выпускной работы была рассмотрена инвариантность областей для следующих классов:
1)Класс S^* — звездообразных функций,
1.1)Класс S_δ — δ-спиралеобразных функций,
1.2)Класс S^*_β — функций обладающих свойством угловой звездообразности,
2)Класс C — выпуклых функций,
3)Класс K — почти выпуклых(линейно-достижимых) функций.

Все эти классы, в свою очередь, являются подклассами класса Базилевича. Например класс S^* соответствует классу B'_0, а класс K — классу B'_1. Так же подклассом класса Базилевича является класс α-звездообразных по Мокану функций.

Определение: Обозначим M_α класс однолисных α-звездообразных, по Мокану, функций, такой что

$$M_\alpha = \left\{ w(z) : \mathrm{Re}\left[\alpha\left(1 + \frac{z\,w''(z)}{w'(z)}\right) + (1-\alpha)\frac{z\,w'(z)}{w(z)}\right] > 0, z \in \overline{U} \right\},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Для всякого $\alpha \notin (-0.35, 0.09)$ существует решение $w(z,t)$ внутренней задачи Хеле-Шоу, такое, что $f(z) \in M_\alpha$, а при $t > 0$ $w(z,t) \notin M_\alpha$.

А так же для всякого $\alpha \notin (-3, 0) \cup (1.3, \infty)$ существует решение $w(\zeta, t)$, $|\zeta| > 1$ внешней задачи Хеле-Шоу, такое, что $w^{-1}(\zeta^{-1}, t) \in M_\alpha$, а при $t > 0$ $w^{-1}(\zeta^{-1}, t) \notin M_\alpha$.

Все вышеперечисленные классы функций являются подклассами класса Базилевича. Приведенные результаты говорят о нетривиальности поведения границ областей класса Базилевича при эволюции Хеле-Шоу, так как некоторые подклассы класса Базилевича ивариантны относительно эволюции Хеле-Шоу, а некоторые не сохраняют своих геометрических свойств. Что приводит к вопросу о том, при каких параметрах m из определения функций класса Базилевича, области получающиеся при отображении с помощью функций это класса сохраняют свои геометрические свойства. Этот вопрос, к сожалению, пока остается открытым.

Заключение

В работе рассмотрены геометрические свойства изменяющейся границы при эволюции Хеле-Шоу. Приведены основные определения и постановка задачи Хеле-Шоу для внешней и внутренней задачи. Доказана инвариантность геометрических свойств класса δ-звездообразных функций и класса функций обладающих свойством угловой звездообразности при эволюции Хеле-Шоу. Приводится доказательство общей теоремы о сохранении звездообразности в случае внутренней задачи. Приводится теорема о инвариантности выпуклости для внешней задачи с поверхностным натяжением. Приводится примеры задач сжатия, в которой подклассы функций класса Базилевича перестают сохранять свои геометричекие свойства при эволюции Хеле-Шоу. Приведены результаты полученные для класса однолистных α-звездообразных по Мокану функций. Выведены некоторые обобщающие результаты для геометрических свойств границ областей Базилевича.