Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Геометрический смысл конформных отображений

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета
Дорониной Наталии Викторовны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н ____________________ В.Г. Гордиенко

Зав. кафедрой
д.ф.м.н., профессор ____________________ Д. В. Прохоров

Саратов 2017

Введение

Основными задачами моей магистерской работы являются:

- оценка коэффициентного функционала для функций класса Блоха;
- оценка коэффициентов для локально-однолистных функций;
- получение условий на управление в уравнении Лёвнера порождающего уравнение с квазиконформным разрезом.

В первом разделе приводятся вспомогательные утверждения используемые в дальнейшем.

Во втором разделе вводится класс функций Блоха и получается оценка коэффициентного функционала для этого класса.

Третий раздел посвящен оценке функционалов для локально-однолистных функций.

В разделах 4-7 приводится общая теория Лёвнера. Здесь обсуждается понятие сходимости областей, вводится понятие областей Лёвнера, доказывается теорема Каратеодори и выводится уравнение Лёвнера для круга.

В разделе 8 исследуется условие на управление в уравнении Лёвнера, при которых оно пораждает полуплоскость с квазиконформным разрезом.

В качестве материалов исследования были рассмотрены статьи зарубежных научных журналов.

1 Основное содержание работы

Пусть $\mathcal{S}$ класс аналитических однолистных функций на единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ с нормировкой $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, тогда функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, |z| < 1 \qquad (1.1)$$

Исследуя экстремальные метрические свойства класса $\mathcal{S}$ однолистных отображений (1.1) единичного круга $\mathbb{D}$, Л. Бибербах в 1916 году доказал, что $|a_2| \leq 2$, $f \in \mathcal{S}$, и, принимая во внимание оценки

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, z \in \mathbb{D},$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, z \in \mathbb{D},$$

равенства которых, как и в оценке второго коэффициента, достигаются только на функциях Кёбе

$$K_\phi(z) = \frac{z}{(1-e^{i\phi}z^2)^2} =$$

$$= z + 2e^{i\phi}z^2 + \dots + ne^{i(n-1)\phi}z^n + \dots, 0 \leq \phi < 2\pi,$$

поставил задачу: доказать (или опровергнуть) справедливость неравенства $|a_n| \leq n$ выполняется для любого n. Данная задача привлекла многих специалистов. В 1923 году Лёвнер показал, что $|a_3| \leq 3$, Литтлвуд в 1924 доказал, что $|a_n| < en, n = 2, 3 \dots$. Фекете и Сегё получили замечательный результат, доказав точное неравенство

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq 1 + 2exp\left(\frac{-2\mu}{1-\mu}\right)$$

для каждого $0 < \mu < 1$.

Введем класс функций Блоха и докажем теорему об оценке функционала $|a_3 - \mu a_2^2|$ в этом классе.

Пусть дан класс $\mathcal{F}$ аналитических функций на единичном круге $\mathbb{D}$ с некоторой нормировкой и действительное (в более общем случае комплексное число) μ. Проблема Фекете-Сегё для класса F состоит в нахождении наилучшей константы C из $\mathcal{F}$, такой что

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq C$$

для каждой функции $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ из $\mathcal{F}$ [?].

Далее дадим определение функции Блоха.

Определение 1.1. *Функция F на $\mathbb{D}$ называется функцией Блоха, если полунорма Блоха ограничена*

$$\|F\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|F'(z)|.$$

Определение 1.2. *Обозначим через $\mathcal{B}$ комплексное Банахово пространство состоящее из функций Блоха F на $\mathbb{D}$ с нормировкой $F(0) = 0$ и*

$$\mathcal{B}_1 = \{F \in \mathcal{B} : \|F\|_{\mathcal{B}} \leq 1\}$$

единичный шар в $\mathcal{B}$.

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1.1. *Пусть $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда $|b_2 + \mu b_1^2| \leq C(\mu)$ выполняется для каждой функции $F(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ из $\mathcal{B}_1$, где*

$$C(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1+3\sqrt{3}|\mu|^3 + (1+3|\mu|^2)^{3/2}}{6\sqrt{3}|\mu|^2}, & \left(|\mu| > \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}, & \left(|\mu| \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \end{cases} \tag{1.2}$$

Более того равенство выполняется тогда и только тогда, когда $F(z) = \varepsilon' F_a(\varepsilon z)$ для констант ε и ε', где $\varepsilon' = \dfrac{\overline{\mu}}{|\mu|}$ если $|\mu| > \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$ и $\varepsilon' = 1$ иначе, и a число в $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ определяемое формулой

$$a^2 = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{3}|\mu| - 1 - \sqrt{1+3|\mu|^2}}{3\sqrt{3}||\mu} & \left(|\mu| > \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \\ 0\left(|\mu| \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}\right), \end{cases} \tag{1.3}$$

а функция $F_a(z)$ единственным образом определяется функцией $F(z)$.

2 Семейства областей Лёвнера

Пусть w_0 некоторая точка из расширенной комплексной плоскости C_w и $\{B_n\}$ заданная последовательность областей. Предположим, что существует окрестность $\{w : |w - w_0| < \delta\}$ точки w_0 принадлежащая всем областям B_n за исключением быть может конечного числа областей, в случае если
$|w_0| < \infty$ и в случае $w_0 = \infty$ областям B_n принадлежит окрестность

$$\{w : |w| > R\},\ R > 0.$$

Определение 2.1. *Ядром последовательности $\{B_n\}$ относительно точки ω_0 называют область B, которая удовлетворяет условиям:*

1) $w_0 \in B$;

2) Для любого $K \subset B$ (K — замкнутая область) существует N_0 такое, что для любого $n > N_0$ $K \subset B_n$;

3) B — наибольшая область удовлетворяющая условиям 1) и 2).

Определение 2.2. *Ядро последовательности $\{B_n\}$ называют вырожденным, если*

1) $\exists N_0 \quad n > N_0 \quad w_0 \in B_n$;

2) $\forall \delta > 0, \quad n > N_0 \quad \{w : |w - w_0| < \delta\} \not\subset B_n$.

Введем определение сходимости области к ядру.

Определение 2.3. *Пусть последовательность B_n имеет ядро B относительно точки w_0. Последовательность сходится к ядру B относительно w_0, если для любой подпоследовательности $\{B_{n_k}\}$ последовательности $\{B_n\}$*

$$B = \ker_{w=w_0}\{B_{n_k}\}.$$

Определение 2.4. *Последовательность $\{B_n\}$ стягивается к области B, если существует w_0 принадлежащая области B и всем областям $B_n\,(n = 1, 2, \dots)$, начиная с некоторого номера, и если для любого положительного числа ε существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ границы областей B_n попадают в ε-окрестность границы области B.*

Связь между понятием стягиваемости последовательности областей и сходимости к ядру выражает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Всякая стягивающаяся к области B последовательность $\{B_n\}$ имеет своим ядром область B и сходится к ней как к ядру относительно любой фиксированной в B точки.*

Пусть в открытой плоскости C_w дана односвязная область Δ, содержащая $\omega = 0$. Через ΔL обозначим множество всех односвязных областей, полученных из Δ исключением кусочно непрерывной кривой L. Рассмотрим данную область. Пусть кривая L задана в виде

$$L = \phi(\lambda), \quad \lambda \in [0, \lambda_0],$$

где ϕ -кусочно непрерывная функция на некотором промежутке $0 \le \lambda < \lambda_0$, непрерывная справа в точках промежутка $[0, \lambda_0]$, $\phi(0)$ -начальная точка кривой, $\phi(\lambda_0) \in \partial\Delta$.

Будем рассматривать кривую полученную из кривой L следующим образом

$$L(\lambda') = \{\omega : \omega = \phi(\lambda), \quad 0 \le \lambda < \lambda'\}, \quad 0 < \lambda' < \lambda_0.$$

Определение 2.5. *Семейство областей*

$$\Delta(\lambda) = \Delta\ L \setminus L(\lambda'), \tag{2.1}$$

где λ' *-произвольная точка полуинтервала*

$$\Lambda = \{\lambda' : 0 \leq \lambda' < \lambda_0\}$$

называется семейством областей Лёвнера.

Для любой точки $\lambda' \in \Lambda$ соотнесем два полуинтервала из Λ:

$$\Lambda^+ = \{\lambda : \lambda \in \Lambda, \lambda > \lambda_0\},$$

$$\Lambda^- = \{\lambda : \lambda \in \Lambda, \lambda < \lambda_0\}.$$

Другими словами "выбрасываем разрез"соответствующий Λ^-.

Если $\lambda \in \Lambda^+(\lambda')$, то $\Delta(\lambda) \supset \Delta(\lambda')$; если $\lambda \in \Lambda^-(\lambda')$, то $\Delta(\lambda) \subset \Delta(\lambda')$.

Отменим важное свойство семейства областей Лёвнера, состоящее в сходимости этого семейства как к ядру к области $\Delta \setminus L$ при $\lambda \to 0$ и к области Δ — при $\lambda \to \lambda_0$. Этот факт выражает следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть* $\Delta(\lambda)$ *семейство областей Лёвнера определенное (2.1), тогда*

1) $\Delta(\lambda)$ *сходится к ядру* $\Delta \setminus L$ *при* $\lambda \to \lambda_0$*;*

2) $\Delta(\lambda)$ *сходится к ядру* Δ *при* $\lambda \to \lambda_0$*;*

3) при $\lambda \to \lambda'$, $\lambda \in \Lambda^+(\lambda')$ $(\lambda \in \Lambda^-(\lambda'))$ *сходится к ядру* $\Delta(\lambda')$.

Сформулируем теорему связывающую сходимость областей и функций отображающих единичный круг на эти области.

Теорема 2.2. *Пусть* $B_n\,(n = 1, 2\ldots)$ *— односвязная область в* C_w, $B_n \neq C_w$ *и* $B_n \ni 0$. $f_n(\xi)$ *— регулярная однолистная функция в круге* $E = \{\xi,\, |\xi| < 1\}$, *отображающая* E *на* B_n.

Тогда следующие два условия эквивалентны:

1) $\{f_n(\xi)\}$ *равномерно сходится внутри* E *к конечной функции;*

2) последовательность областей $B_n\,(n=1,2\dots)$ *сходится к ядру относительно точки* $w=0$*, отличному от* C_w*.*

Кроме того,

3) если $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\xi)\equiv 0$*, то* $\ker\{B_n\}=\{0\}$*;*

4) если $f(\xi)$ *не является тождественной константой, то последовательность областей* $B_n\,(n=1,2\dots)$ *сходится к невырожденному ядру, являющемуся образом круга* E *при отображении* $f(\xi)$*;*

5) если $\ker\{B_n\}=\{0\}$*, то* $f(\xi)\equiv 0$*;*

6) если $\ker\{B_n\}$ *невырожденно и отлично от* C_w*, то функция* $f(\xi)$ *регулярна и однолистна в круге* E *и отображает его на ядро, причем* $f(0)=0, f'(0)>0$*, а функции* $\phi_n(\xi)=f_n^{-1}(\xi)$ *равномерно сходятся внутри ядра к функции* $\phi(\xi)=f^{-1}(\xi)$*,* $\phi(0)=0$*,* $\phi'(0)>0$*, заданной в ядре.*

3 Условия на уравнение Лёвнера для отображение полуплоскости с квазиконформным разрезом

Пусть H верхняя полуплоскость и пусть $\gamma(t)$ простая непрерывная кривая в $H\cup\{0\}$ с $\gamma(0)=0$ и $t\in[0,T]$. Тогда существует единственное конформное отображение

$$g_t : H\setminus\gamma(0,t)\to H$$

со следующей нормировкой $g(\infty)=\infty$, $g'(\infty)=1$ в окрестности бесконечности, то есть $g_t(z)$ может быть представлена в следующем виде:

$$g_t(z)=z+\frac{c(t)}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Несложно проверить, что $c(t)$ есть непрерывная возрастающая по t функция и что $c(0)=0$. Более того, параметризация γ может быть выбрана таким образом, что $c(t)=2t$. Предполагая такую нормировку можно показать, что $g(t)$ удовлетворяет уравнению Лёвнера в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \lambda(t)}, \quad g_0(z) = z,$$

где λ есть непрерывно действительно значная функция. В дальнейшем может быть показано, что g_t непрерывно продолжается на $\gamma(t)$ и тогда $g_t(\gamma(t)) = \lambda(t)$.

С другой стороны, если начать рассматривать $\lambda : [0, T] \to R$, можно рассмотреть следующую задачу с начальными условиями:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, z) = \frac{2}{g(t, z) - \lambda(t)}, \quad g(0, z) = z, \quad \forall z \in H. \tag{3.1}$$

Для каждого $z \in H$ существует некоторый интервал $[0, S)$, для которого существует решение $g(t, z)$. Пусть

$$T_z = \sup\{s \in [0, T] : \exists\, g(t, z) \in [0, s)\}.$$

Пусть $G_t = \{z \in H : T_z > t\}$ и $g_t(z) = g(t, z)\}$. Тогда можно доказать, что G_t односвязная подобласть H и g_t есть единственное конформное отображение из G_t на H с нормировкой в окрестности бесконечности, то есть:

$$g_t(z) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Функция $\lambda(t)$ называется управляющей функцией и область G_t также как и функция g_t называется порожденной λ. Область G_t порожденная непрерывным направлением λ необязательно получается с разрезом, то есть $H \setminus \gamma(0, t)$ для некоторой простой непрерывной кривой γ в $H \cup \{\gamma(0)\}$ с $\gamma(0) \in R$.

Напомним, что $Lip(p)$ — пространство таких функций $\lambda(t)$, что

$$|\lambda(s) - \lambda(t)| \leq c|s - t|^p$$

и $\|\lambda\|_p$ обозначает наименьшую константу c.

Для $k \geq 0$ положим $\lambda(t) = \sqrt{k} B_t$, где B_t есть стандартное Броуновское движение. Тогда стохастическое уравнение Лёвнера есть случайное семейство конформных отображений порожденных λ, то есть семейство конформных отображений решающее следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{k} B_t}, \quad g_0(z) = z.$$

Для стохастического уравнения Лёвнера возможно определить почти всюду непрерывную $\gamma : [0, \infty) \to \bar{H}$ такую, что G_t порожденная $\lambda(t) = \sqrt{k} B_t$ есть неограниченная компонента $H \setminus \gamma[0, t]$, $\forall\, t \geq 0$.

Приведем следующую классификацию:

(1) для $k \in [0, 4]$, $\gamma(t)$ почти всюду простая дуга в $H \cup \{0\}$;

(2) для $k \in (4, 8)$, $\gamma(t)$ почти всюду непростая дуга;

(3) для $k \in [8, \infty]$, $\gamma(t)$ почти всюду заполняющая пространство кривая.

Маршал и Род рассматривали вопрос о том, когда область G_t будет плоскость с квази-конформным разрезом и где квази-конформная плоскость есть образ $H \setminus [0, i]$ при квази-конформном отображении H в H оставляет $f(\infty) = \infty$. Они доказали следующую теорему.

Теорема 3.1. *Если G_t есть плоскость с квази-конформным разрезом для каждого t, то $\lambda \in Lip\left(\frac{1}{2}\right)$. Обратно, существует C_0 такая что $\lambda \in Lip\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\|\lambda\|_{\frac{1}{2}} \leq C_0$, то G_t есть плоскость с квази-конформным разрезом.*

Хотя их работа относится к уравнению Лёвнера в круге, их техника доказательства переносится на версию в полуплоскости.

Теорема 3.2. *Если $\lambda \in Lip(\frac{1}{2})$ и $\|\lambda\|_{\frac{1}{2}} \leq 4$, то G_t порожденная λ есть плоскость с квази-конформным разрезом.*

Более того, для каждого $C \geq 4$ $\|\lambda\|_{\frac{1}{2}} = c$ такая, что λ не порождает плоскость с разрезом.

Существует другой вид уравнения Лёвнера для полуплоскости. Пусть $\lambda : [0, T] \to R$ непрерывная функция. Поставим следующую задачу Коши, в которой отрицательный знак будет стоять с правой стороны:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,z) = \frac{-2}{f(t,z)-\xi(t)}, \quad f(0,z) = z \tag{3.2}$$

для $z \in H$. В этом случае, для $z \in H$ решение $f(t,z)$ существует для всех $t \in [0,T]$. Положим $f_t(z) = f(t,z)$. Мы получим f_t определенную на всей полуплоскости H. Можно показать, что f_t конформно отображает H в H и в окрестности бесконечности имеет вид:

$$f_t(z) = z + \frac{-2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Эти две формы уравнения Лёвнера соответствуют друг другу. Данная непрерывная функция λ на интервале $[0,T]$ порождает $\xi(t) = \lambda(T-t)$. Пусть g_t будет функция λ из (3.1), и пусть f_t функция порожденная ξ из (3.2). несложно показать, что $f_T(z) = g_T^{-1}(z)$. Более того, теорема 3.2 эквивалентна следующей теореме.

Теорема 3.3. *Пусть $\xi \in Lip\left(\frac{1}{2}\right)$, $\|\lambda\|_{\frac{1}{2}} < 4$, тогда плоскость $f_t(H)$ квази-конформно отображается для всех t порожденных ξ.*

Заключение

В данной работе были получены оценки коэффициентного функционала для функций класса Блоха и, как следствие, из этих оценок получены оценки $|a_3 - \mu a_2^2|$; изучена проблема Фекете-Сегё для класса равномерно локально однолистных функций. Также была рассмотрена общая теория Лёвнера, введено понятие областей Лёвнера, доказана теорема Каратеодори и выведено уравнение Лёвнера для круга. Кроме того, было исследовано условие на управление в уравнении Лёвнера, при которых оно пораждает полуплоскость с квазиконформным разрезом. Приведены все необходимые доказательства.